

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG
*****◇◇◇*****

ĐẶNG THỰC ĐOAN

CÁC PHƯƠNG PHÁP ĐẾM
TRONG LÝ THUYẾT TỔ HỢP

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp

Mã số: 60.46.40

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Đà Nẵng - 2011

Công trình được hoàn thành tại
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TS NGUYỄN GIA ĐỊNH

Phản biện 1:.....

Phản biện 2:.....

Luận văn sẽ được bảo vệ trước Hội đồng chấm Luận văn tốt nghiệp thạc sĩ
khoa học họp tại Đại học Đà Nẵng vào ngàytháng năm
Có thể tìm hiểu luận văn tại:

- Trung tâm Thông tin - Học liệu, Đại học Đà Nẵng
- Thư viện trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Tổ hợp là một lĩnh vực toán học có tư duy ra đời từ rất sớm. Hiện nay, cùng với sự bùng nổ và thịnh hành của máy tính điện tử, tổ hợp đã chuyển sang lĩnh vực toán ứng dụng và phát triển mạnh mẽ và được áp dụng trong nhiều lĩnh vực khác nhau: lý thuyết số, hình học hữu hạn, biểu diễn nhóm, đại số không giao hoán, quy trình ngẫu nhiên, thống kê xác suất, quy hoạch thực nghiệm, v.v... Có bốn bài toán tổ hợp cơ bản là bài toán đếm, bài toán liệt kê, bài toán tối ưu tổ hợp, bài toán tồn tại. Trong đó, bài toán đếm là bài toán cơ bản và quan trọng nhất. Phương pháp đếm được coi là nền tảng cho hầu như tất cả các phương pháp khác.

Xuất phát từ nhu cầu phát triển của lý thuyết tổ hợp, đặc biệt là bài toán đếm trong lĩnh vực này, cùng với những ứng dụng của nó, tôi quyết định chọn đề tài "Các phương pháp đếm trong lý thuyết tổ hợp" để tiến hành nghiên cứu. Tôi, dưới sự hướng dẫn tận tình của PGS. TS Nguyễn Gia Định, hy vọng tạo được một tài liệu tham khảo tốt cho những người muốn tìm hiểu về lý thuyết tổ hợp và hy vọng tìm ra được một số ví dụ minh họa đặc sắc và tính chất mới nhằm góp phần làm phong phú thêm các kết quả trong lĩnh vực này.

2. Mục đích nghiên cứu: Mục tiêu của đề tài nhằm tạo điều kiện cho bản thân có thể khám phá và hiểu được các ứng dụng của phương pháp đếm trong giải toán tổ hợp và có thể tạo được tài liệu tham khảo bổ ích cho những người muốn tìm hiểu về lĩnh vực này.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu: Đối tượng nghiên cứu của đề tài là các phương pháp đếm trong lý thuyết tổ hợp và các ứng dụng của nó. Phạm vi nghiên cứu là Lý thuyết tổ hợp dành cho chương trình phổ thông và nâng cao.

4. Phương pháp nghiên cứu:

- Thu thập các bài báo khoa học, các giáo trình của các tác giả nghiên cứu liên quan đến Bài toán đếm trong lý thuyết tổ hợp.
- Tham gia các buổi seminar hàng tuần để trao đổi các kết quả đang nghiên cứu.

5. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài:

- Tổng quan các kết quả của các tác giả đã nghiên cứu liên quan đến *Các phương pháp đếm trong lý thuyết tổ hợp*.
- Chứng minh chi tiết và làm rõ một số mệnh đề, cũng như đưa ra một số ví dụ minh họa đặc sắc nhằm làm cho người đọc dễ dàng tiếp cận vấn đề được đề cập.

6. Cấu trúc của luận văn:

- Trong Chương 1, tôi sẽ trình bày chi tiết các nguyên lý đếm cơ bản, nguyên lý Dirichlet, một số bài toán đếm cơ bản và một vài ví dụ ứng dụng minh họa.
- Trong Chương 2, tôi sẽ đề cập tới chuỗi lũy thừa hình thức, các toán tử trong $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, phép truy hồi trong $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, các phương pháp đếm dùng hàm sinh: hàm sinh thông thường và hàm sinh mũ.
- Trong Chương 3, tôi sẽ đề cập tới nguyên lý bù trừ và phương pháp đếm bằng công thức nghịch đảo. Ngoài ra còn đề cập đến một số kỹ thuật như: tính tổng bằng tích phân hữu hạn, xác định hệ thức trong các dãy số bằng phép hàm tuyến tính.

Chương 1

NGUYÊN LÝ ĐẾM VÀ BÀI TOÁN ĐẾM CƠ BẢN

1.1 Khái quát về tổ hợp

1.2 Những nguyên lý đếm cơ bản

Định nghĩa 1. *Khi hai công việc có thể được làm đồng thời, ta không thể dùng quy tắc cộng hay quy tắc nhân để tính số cách thực hiện nhiệm vụ gồm cả hai việc. Để tính đúng số cách thực hiện nhiệm vụ này, ta cộng số cách làm mỗi một trong hai việc rồi trừ đi số cách làm đồng thời cả hai việc. Ta có thể phát biểu nguyên lý đếm này bằng ngôn ngữ tập hợp.*

Cho k tập hữu hạn A_1, A_2, \dots, A_k , ta có:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k| = N_1 - N_2 + N_3 - \dots + (-1)^{k-1} N_k,$$

trong đó

$$N_m = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq k} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_m}|.$$

Ta đồng nhất tập A_m ($1 \leq m \leq k$) với tính chất A_m cho trên tập vũ trụ hữu hạn U nào đó. Gọi \bar{N} là số phần tử của U sao cho không thỏa mãn bất kỳ một tính chất A_m nào, N là số phần tử của U . Ta có:

$$\bar{N} = N - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k| = N - N_1 + N_2 - N_3 + \dots + (-1)^k N_k,$$

trong đó N_m là tổng các phần tử của U thỏa mãn m tính chất lấy từ k tính chất đã cho. Công thức này được gọi là nguyên lý bù trừ.

Ví dụ 1. *Có n lá thư và n phong bì ghi sẵn địa chỉ. Bỏ ngẫu nhiên các lá thư vào bì sao cho mỗi phong bì chỉ chứa một lá thư. Hỏi xác suất để xảy ra không một lá thư nào đúng địa chỉ là bao nhiêu?*

Có tất cả $n!$ cách bỏ thư. Gọi U là tập hợp tất cả các cách bỏ thư $|U| = n!$, và A_m là tính chất lá thư thứ m bỏ đúng địa chỉ ($m = 1, 2, \dots, n$). Theo nguyên lý bù trừ $\bar{N} = n! - N_1 + N_2 - N_3 + \dots +$

$(-1)^n N_n$, trong đó, ta ký hiệu N_m là số cách bỏ thư sao cho có đúng m lá thư đúng địa chỉ ($m = 0, 1, \dots, n$). Ta có:

$$N_m = C_n^m (n-m)! = \frac{n!}{m!(n-m)!} (n-m)! = \frac{n!}{m!}.$$

$$\bar{N} = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right),$$

trong đó C_n^m là tổ hợp chập m của tập n phần tử. Xác suất cần tìm là: $1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!}$.

1.3 Nguyên lý Dirichlet

Định nghĩa 2. Với x là một số thực, phần nguyên của x , ký hiệu là $[x]$, là số nguyên lớn nhất không vượt quá x , tức là $[x] \in \mathbb{Z}, [x] \leq x < [x] + 1$. Ta còn gọi $[x]$ là giá trị hàm sàn của x . Đối ngẫu với khái niệm này là giá trị hàm trần của x , ký hiệu $]x[$, đó là số nguyên nhỏ nhất không nhỏ hơn x , tức là $]x[\in \mathbb{Z},]x[-1 < x \leq]x[$.

Mệnh đề 1. Nếu có N đồ vật được đặt vào trong k cái hộp thì tồn tại một hộp chứa ít nhất $\lceil \frac{N}{k} \rceil$ đồ vật.

Ví dụ 2. Trong hình chữ nhật cỡ $1m \times 2m$, lấy 201 điểm tùy ý. Chứng minh rằng luôn tồn tại 5 điểm ở trong hình tròn bán kính $\frac{1}{7}m$.

Chia hình chữ nhật thành 50 ô vuông kích cạnh $\frac{1}{5}m$. Phân 201 điểm đó vào các ô vuông, theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại một ô vuông có ít nhất $\lceil \frac{201}{50} \rceil = 5$ điểm. Mỗi ô này nội tiếp trong đường tròn bán kính $\frac{1}{5} \frac{\sqrt{2}}{2} m$ mà $\left(\frac{1}{5} \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{1}{50} < \frac{1}{49} = \left(\frac{1}{7} \right)^2$.

Do đó, luôn tồn tại 5 điểm ở trong hình tròn bán kính $\frac{1}{7}m$.

1.4 Một số bài toán đếm cơ bản

Mệnh đề 2 (Hàng đẳng thức Pascal). Cho n và k là các số nguyên dương và $k < n$. Khi đó: $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k$.

Mệnh đề 3 (Hàng đẳng thức Vandermonde). Cho m, n, k là 3 số tự nhiên sao cho $k \leq m$ và $k \leq n$. Khi đó: $C_{m+n}^k = \sum_{i=0}^k C_m^i \cdot C_n^{k-i}$.

Ví dụ 3. Cho n là số nguyên dương. Hãy chứng minh bằng công cụ tổ hợp rằng $\sum_{k=1}^n kC_n^k = n \cdot 2^{n-1}$.

Bài toán trở thành tìm số cách chọn hội đồng trong đó có một chủ tịch hội đồng từ một nhóm gồm n người bằng hai cách. Ta có thể chọn đầu tiên là một chủ tịch hội đồng rồi chọn các thành viên hội đồng. Theo quy tắc nhân, ta có $n \cdot 2^{n-1}$ cách chọn hội đồng có một chủ tịch hội đồng. Có thể làm cách khác: chọn hội đồng gồm k ($1 \leq k \leq n$) người rồi chọn ra một chủ tịch hội đồng. Theo quy tắc cộng có $\sum_{k=1}^n kC_n^k$ cách chọn hội đồng có một chủ tịch. Kết hợp lại ta có đẳng thức cần chứng minh.

Định nghĩa 3. Một cách sắp xếp có thứ tự k phần tử có thể lập lại của một tập n phần tử được gọi là một chỉnh hợp lặp chập k của tập n phần tử.

Định nghĩa 4. Một tổ hợp lặp chập k của tập n phần tử là một cách chọn không có thứ tự k phần tử có thể lập lại của tập có n phần tử đó. Ở đây, có thể chọn $k > n$.

Mệnh đề 4. Số tổ hợp lặp chập k của tập n phần tử là C_{n+k-1}^k .

Định nghĩa 5. Cho A là một tập hữu hạn n phần tử, trong đó có n_1 phần tử như nhau thuộc loại 1, n_2 phần tử như nhau thuộc loại 2, ..., n_k phần tử như nhau thuộc loại k sao cho $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ và khi hoán vị các phần tử cùng loại không sinh ra cấu hình tổ hợp mới. Một hoán vị các phần tử của A được gọi là một hoán vị lặp theo tham số lặp n_1, n_2, \dots, n_k .

Mệnh đề 5. Số hoán vị lặp của tập n phần tử theo tham số n_1, n_2, \dots, n_k là

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$$

Ví dụ 4. Phương trình $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm?

Mỗi nghiệm của phương trình tương ứng với một cách chọn 10 phần tử từ một tập có 3 loại, sao cho có x_1 phần tử loại 1, x_2 phần tử loại 2 và x_3 phần tử loại 3. Như vậy, số nghiệm nguyên không âm của phương trình tương ứng với tổ hợp lặp chập 10 của tập có 3 phần tử. Vậy số nghiệm nguyên không âm của phương trình trên là:

$$C_{3+10-1}^{10} = C_{12}^{10} = C_{12}^2 = \frac{12 \cdot 11}{1 \cdot 2} = 66.$$

Định nghĩa 6. Số tất cả các phân hoạch thành k khối của một tập hợp n phần tử được gọi là số Stirling loại hai và được ký hiệu là $S(n, k)$. Để thấy rằng $S(n, k) = 0$ nếu $k > n$. Ta cũng quy ước $S(n, 0) = 0$.

Số $T_n = S(n, 1) + S(n, 2) + \dots + S(n, n)$ được gọi là số Bell. Như vậy, số Bell chính là số tất cả các phân hoạch của tập hợp n phần tử.

Trong Chương 2, ta sẽ tìm công thức cho số Stirling loại hai:

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \left[\sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} C_k^j j^n \right].$$

Mệnh đề 6. $S(n + 1, k) = kS(n, k) + S(n, k - 1)$.

Chương 2

PHƯƠNG PHÁP ĐẾM DÙNG HÀM SINH

2.1 Chuỗi lũy thừa hình thức

Định nghĩa 7. Với tập số tự nhiên \mathbb{N} và tập hợp số phức \mathbb{C} , ký hiệu $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ là tập hợp tất cả các ánh xạ từ \mathbb{N} vào \mathbb{C} . Mỗi phần tử $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ có thể biểu diễn dưới dạng: $a = a(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$, trong đó, $a_j = a(j)$ với mọi $j \in \mathbb{N}$ và gọi đó là chuỗi lũy thừa hình thức của $a(x)$.

Giả sử $a(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ và $b(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j$ là hai chuỗi lũy thừa hình thức bất kỳ. Ta định nghĩa phép cộng, phép nhân trong $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ và phép nhân vô hướng một số $z \in \mathbb{C}$ với phần tử của $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ như sau:

$$a(x) + b(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j + \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j = \sum_{j=0}^{\infty} (a_j + b_j) x^j$$

$$a(x)b(x) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^j a_k b_{j-k} \right) x^j$$

$$za(x) = z \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \right) = \sum_{j=0}^{\infty} (za_j) x^j$$

$\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ là một không gian vectơ trên trường \mathbb{C} với phép cộng và phép nhân vô hướng, $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ là một vành giao hoán có đơn vị với phần tử đơn vị là $1(x) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} 0x^j$. Và $z[a(x)b(x)] = [za(x)]b(x) = a(x)[zb(x)]$.

Định lý 1. Tập $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ với phép cộng, phép nhân và phép nhân vô hướng lập thành một đại số giao hoán trên \mathbb{C}

Mệnh đề 7. Chuỗi $a(x) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ là khả nghịch khi và chỉ khi $a_0 \neq 0$.

Nếu $a(x)$ là phần tử khả nghịch trong $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ thì phần tử nghịch đảo của nó sẽ được ký hiệu là $(a(x))^{-1}$ hay $\frac{1}{a(x)}$ hay $a^{-1}(x)$. Với mọi $a(x) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ ta định nghĩa

$$a^0(x) = 1, a_n(x) = \underbrace{a(x)a(x) \cdots a(x)}_{n \text{ lần}} \text{ với mọi số nguyên dương } n.$$

Nếu $a(x)$ là khả nghịch thì ta định nghĩa

$$a^{-n}(x) = \underbrace{a^{-1}(x)a^{-1}(x)\cdots a^{-1}(x)}_{n \text{ lần}} \text{ với mọi số nguyên dương } n.$$

Mệnh đề 8. Với mọi $z \in \mathbb{C}$ và $0 \neq n, k \in \mathbb{N}$, ta có

$$(1) \frac{1}{1 - zx^n} = \sum_{j=1}^{\infty} z^j x^{nj}; \quad (2) \frac{1}{(1 - zx^n)^k} = \sum_{j=1}^{\infty} C_{k+j-1}^j z^j x^{nj}.$$

Mệnh đề 9. Giả sử $a(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ với $a_0 = 1$ và n là một số nguyên dương bất kỳ. Khi đó, tồn tại duy nhất $b(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j$ với $b_0 = 1$ sao cho $b^n(x) = a(x)$.

Mệnh đề 10. Giả sử $a(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ với $a_0 = 1$ và n là một số nguyên dương bất kỳ. Khi đó, $(a^{-1}(x))^n = (a^n(x))^{-1}$ và do đó $a^{-n}(x) = (a^n(x))^{-1}$.

Mệnh đề 11. Giả sử $a(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ với $a_0 = 1$, m là một số nguyên và n là một số nguyên dương bất kỳ. Khi đó, tồn tại duy nhất một $b(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j$ với $b_0 = 1$ sao cho $b^n(x) = a^m(x)$.

Chuỗi $b(x)$ tồn tại duy nhất trong Mệnh đề 11 được ký hiệu là $a^{m/n}(x)$.

Định nghĩa 8. Giả sử $c_1(x), c_2(x), \dots, c_k(x), \dots$ là một dãy các phần tử của $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ với $c_k(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{jk} x^j$ và $c_{0k} = 0, k = 1, 2, \dots$. Khi đó, dãy $1 + c_1(x), 1 + c_2(x), \dots, 1 + c_k(x), \dots$ được gọi là khả tích nếu với mọi $j \geq 0$ tồn tại số nguyên dương $N = N(j)$ sao cho với mọi $n > N$ hệ số của x^j trong $\prod_{k=1}^n (1 + c_k(x))$ đều bằng nhau. Nếu $c_1(x), c_2(x), \dots, c_k(x), \dots$ là một dãy khả tích thì ta có thể định nghĩa tích

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + c_k(x)) = \prod_{j=0}^{\infty} s_j x^j \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$$

trong đó hệ số s_j của x^j trong tích này chính là hệ số của x^j trong tích

$$\prod_{k=1}^n (1 + c_k(x)) \text{ với } n > N.$$

Dãy $a_1(x), a_2(x), \dots, a_k(x), \dots$ các phần tử $a_k(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{jk}x^j$, $k = 1, 2, \dots$ trong $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ được gọi là khả tổng nếu với mọi số nguyên $r \geq 0$ tồn tại số nguyên dương $N = N(r)$ sao cho với mọi $n > N$ ta có $a_{0n} = a_{1n} = \dots = a_{rn} = 0$. Nếu dãy $a_1(x), a_2(x), \dots, a_k(x), \dots$ là khả tổng thì đối với dãy này, ta có thể định nghĩa tổng $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) = \sum_{j=0}^{\infty} s_j x^j$, ở đây $s_j = a_{j1} + a_{j2} + \dots + a_{jN}$.

Định nghĩa 9. Giả sử $b(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ với $b_0 = 0$, còn $a(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ là một phần tử bất kỳ. Khi đó, chuỗi $\sum_{j=0}^{\infty} a_j (b^j(x)) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ được gọi là hợp thành của $a(x)$ với $b(x)$ và được ký hiệu là $a(x) \circ b(x)$.

2.2 Các toán tử trong $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

Định nghĩa 10.

Ánh xạ $D : \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : a(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \mapsto D(a(x)) = b(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (j + 1)a_{j+1} x^j$

được gọi là toán tử đạo hàm trong $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Ta cũng định nghĩa: $D^0(a(x)) = a(x)$, $D^n(a(x)) = D(D^{n-1}(a(x)))$, cho mọi số nguyên dương n và $S(a(x)) = a_0$.

Mệnh đề 12.

- (1) $D(a(x) + b(x)) = D(a(x)) + D(b(x))$.
- (2) $D(a(x)b(x)) = D(a(x))b(x) + a(x)D(b(x))$.
- (3) $D(a^n(x)) = na^{n-1}(x)D(a(x))$ cho mọi n nguyên dương.
- (4) Nếu $a(x)$ khả nghịch thì $D(a^{-n}(x)) = -na^{-n-1}(x)D(a(x))$ cho mọi n nguyên dương.
- (5) Với mọi số hữu tỷ s và mọi $a(x) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ thỏa mãn $S(a(x)) = 1$, ta có $D(a^s(x)) = sa^{s-1}(x)D(a(x))$.

$$(6) \text{ Với mọi } n \in \mathbb{N}, D^n(a(x)) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+n)!}{j!} a_{j+n} x^j.$$

$$(7) \text{ Với mọi } a(x) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \text{ ta có } a(x) = \sum_{j=0}^{\infty} S(D^j(a(x))) \frac{x^j}{j!},$$

$$(8) \text{ Nếu } a_1(x), a_2(x), \dots, a_k(x), \dots \text{ là dãy khả tổng, thì } D\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} D(a_k(x)).$$

Tính chất (7) có thể xem như là phân tích MacLaurin của $a(x)$.

Định nghĩa 11. Ánh xạ

$$D^* : \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : a(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \mapsto D^*(a(x)) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_{j-1}}{j} x^j$$

được gọi là toán tử tích phân trong $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Định nghĩa 12. Giả sử $b(x) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j x^j$, và $a(x) = 1 + b(x)$. Khi đó logarit $L(a(x))$ của $a(x)$ được xác định bằng đẳng thức

$$L(a(x)) = L(1 + b(x)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} b^k(x).$$

Mệnh đề 13. Giả sử $a(x), c(x) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ thỏa mãn $S(a(x)) = S(c(x)) = 1$. Khi đó,

$$(1) D(L(a(x))) = \frac{D(a(x))}{a(x)},$$

$$(2) L(a(x)c(x)) = L(a(x)) + L(c(x)),$$

$$(3) \text{ Với mọi số hữu tỷ } r, \text{ ta có } L(a^r(x)) = rL(a(x)),$$

$$(4) \text{ Nếu } L(a(x)) = L(b(x)), \text{ thì } a(x) = b(x),$$

(5) Nếu $b(x) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ thỏa mãn $S(b(x)) = 0$, thì với mọi số hữu tỷ r ta có:

$$(1 + b(x))^r = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} C_r^j b^j(x) \quad \text{với} \quad C_r^j = \frac{r(r-1)\dots(r-j+1)}{j!}.$$

Định nghĩa 13. Giả sử $b(x) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j x^j$. Khi đó, mũ $E(b(x))$ của $b(x)$ được xác định bằng đẳng thức $E(b(x)) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} b^j(x)$ với $b^0(x) = 1$.

Mệnh đề 14. Giả sử $b(x), c(x) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ thỏa mãn $S(b(x)) = S(c(x)) = 0$. Khi đó:

- (1) $D(E(b(x))) = E(b(x))D(b(x))$;
- (2) Nếu $E(b(x)) = E(c(x))$ thì $b(x) = c(x)$,
- (3) $L(E(b(x))) = b(x)$, $E(L(1 + b(x))) = 1 + b(x)$,
- (4) $E(b(x) + c(x)) = E(b(x))E(c(x))$.

Định nghĩa 14. Giả sử $a(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ với $a_0 = 1$ và $r \in \mathbb{C}$ là một số phức bất kỳ. Khi đó, ta định nghĩa $a^r(x)$ là chuỗi lũy thừa hình thức $E(rL(a(x)))$.

Mệnh đề 15. Giả sử $a(x) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ thỏa mãn $S(a(x)) = 1$ và $r, s \in \mathbb{C}$. Khi đó,

- (1) $a^r(x)a^s(x) = a^{r+s}(x)$;
- (2) $D(a^r(x)) = r a^{r-1}(x)D(a(x))$;
- (3) $L(a^r(x)) = rL(a(x))$;
- (4) Nếu $b(x) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ thỏa mãn $S(b(x)) = 0$, thì

$$(1 + b(x))^r = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} C_r^j b^j(x) \quad \text{với} \quad C_r^j = \frac{r(r-1)\dots(r-j+1)}{j!}.$$

Định nghĩa 15. Giả sử $a(x) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ và $S(a(x)) = 0$, tức là $a(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x^j$. Khi đó, ta định nghĩa

$$\sin(a(x)) = \frac{1}{2i} [E(ia(x)) - E(-ia(x))] = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{a^{2j+1}(x)}{(2j+1)!},$$

$$\cos(a(x)) = \frac{1}{2} [E(ia(x)) + E(-ia(x))] = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^{2j}(x)}{(2j)!},$$

$\tan(a(x)) = (\sin(a(x)))(\cos(a(x)))^{-1}$, $\sec(a(x)) = (\cos(a(x)))^{-1}$, ở đây i là đơn vị ảo, tức là $i^2 = -1$ và $a^0(x) = 1$.

Định lý 3. Giả sử $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ là các số sao cho phương trình $x^2 - c_1x - c_2 = 0$ có nghiệm kép $r_0 \neq 0$. Khi đó, $a(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ là lời giải của phép truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc 2 với hệ thức truy hồi $a_n - c_1 a_{n-1} - c_2 a_{n-2} = 0$ với mọi $n \geq 2$ khi và chỉ khi $a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 (n-1)r_0^n$, với mọi $n = 0, 1, 2, \dots$, ở đây $\alpha_1 = \frac{a_1}{r_0}$ và $\alpha_2 = \frac{a_1 - a_0 r_0}{r_0}$.

2.4 Phương pháp đếm bằng hàm sinh thông thường

Định nghĩa 17. Giả sử $a_j \in \mathbb{C}$ với $j \in \mathbb{N}$. Ta nói rằng phần tử $b(x) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ là hàm sinh cho dãy số $a_0, a_1, a_2, \dots, a_j, \dots$ mà ta sẽ thường giản đơn ký hiệu là $(a_j)_0^{\infty}$ nếu tồn tại một tự đẳng cấu φ của không gian vectơ $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ sao cho $\varphi(a(x)) = b(x)$, ở đây $a(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$.

Nếu φ là tự đẳng cấu đồng nhất của không gian vectơ $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, tức là $\varphi(c(x)) = c(x)$, với mọi $c(x) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ thì $\varphi(a(x))$ được gọi là hàm sinh thông thường cho dãy $(a_j)_0^{\infty}$. Như vậy hàm sinh thông thường cho dãy $(a_j)_0^{\infty}$ là chuỗi lũy thừa hình thức $a(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$.

Nếu $\varphi : \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j \mapsto \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_j}{j!} x^j$ thì φ là một tự đẳng cấu của $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Khi đó, $\varphi(a(x))$ được gọi là hàm sinh mũ cho dãy $(a_j)_0^{\infty}$. Như vậy hàm sinh mũ cho dãy $(a_j)_0^{\infty}$ là chuỗi lũy thừa hình thức $b(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j$, trong đó $b_j = \frac{a_j}{j!}$ với mọi $j \in \mathbb{N}$.

Ví dụ 5. Số Fibonacci.

Ta định nghĩa $F_0 = 0, F_1 = 1$ còn với $j \geq 2$, số $F_j, j = 0, 1, 2, \dots$ được gọi là các số Fibonacci thứ j . Ta có với mọi $j \geq 2, F_j = F_{j-1} + F_{j-2}$.

Giả sử $f(x)$ là hàm sinh thông thường cho dãy $(F_j)_0^{\infty}$. Khi đó

$$f(x) = F_0 + F_1 x + F_2 x^2 + F_3 x^3 + \dots$$

Do đó, $f(x) - x f(x) - x^2 f(x) = x$. Suy ra $f(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$. Bằng phương pháp hệ số bất định, với a, b là hai nghiệm của phương trình

$1 - x - x^2$ ta có

$$\frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{a}{(b - a)(x - a)} - \frac{b}{(b - a)(x - b)}.$$

$$\frac{x}{1 - x - x^2} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^j - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^j \right] x^j.$$

Vậy $F_j = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^j - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^j \right].$

2.5 Phương pháp đếm bằng hàm sinh mũ

Ví dụ 6. Số mất thứ tự

Giả sử X là một tập hữu hạn và $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Ta sẽ đồng nhất hoán vị (a_1, a_2, \dots, a_n) của các phần tử của X với song ánh $\varphi : X \rightarrow X : x_i \mapsto a_i$. Khi đó phần tử $x_i \in X$ được gọi là điểm bất động của hoán vị φ trên X nếu $\varphi(x_i) = x_i$. Hoán vị φ của X mà không có điểm bất động nào, được gọi là một mất thứ tự của X . Số tất cả các mất thứ tự của tập hữu hạn X có n phần tử được ký hiệu là D_n .

Giả sử $P([n])$ là tập tất cả các hoán vị của tập $[n]$ và $p(x)$ là hàm sinh mũ cho dãy $P([0]), P([1]), \dots, P([n]), \dots$. Mỗi hoán vị φ của $[n]$ có thể được xem là cặp (σ, τ) , với σ là một hoán vị không có điểm bất động trên $K \subseteq [n]$ và τ là một hoán vị đồng nhất trên $\bar{K} = [n] \setminus K$.

Ký hiệu: $I([n])$ là tập các hoán vị đồng nhất trên $[n]$, còn $D([n])$ là tập các mất thứ tự trên $[n]$. Khi đó, $|I([n])| = 1$ và $|D([n])| = D_n$ cho mọi $n = 0, 1, 2, \dots$. Do đó, hàm sinh mũ cho dãy $(I([n]))_0^\infty$ và $(D([n]))_0^\infty$ tương ứng là:

$$i(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots = E(x),$$

$$d(x) = D_0 + \frac{D_1}{1!}x + \frac{D_2}{2!}x^2 + \frac{D_3}{3!}x^3 + \dots$$

Vì $|P([n])| = n!$ nên hàm sinh mũ cho dãy $(P([n]))_0^\infty$ là:

$$p(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{2!}{2!}x^2 + \frac{3!}{3!}x^3 + \dots = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

Mặt khác, ta có $P([n]) = DI([n])$. Suy ra:

$$\begin{aligned} d(x) &= p(x)(i(x))^{-1} = p(x)(E(x))^{-1} = p(x)E(-x) \\ &= (1 + x + x^2 + x^3 + \dots) \left(1 - \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \dots \right) \\ &= 1 + \dots + \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right) x^n + \dots \end{aligned}$$

Do đó số tất cả các mat thứ tự của tập hữu hạn X lực lượng n là:

$$D_n = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right).$$

Chương 3

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP VÀ KỸ THUẬT ĐẾM CƠ BẢN KHÁC

3.1 Nguyên lý bù trừ suy rộng

Định nghĩa 18. Xét m vật a_1, a_2, \dots, a_m . Các vật này tương ứng được gắn với các trọng số $\omega(a_1), \omega(a_2), \dots, \omega(a_m)$, mà là các phần tử của một vành giao hoán K nào đó. Mỗi vật a_i đã cho có thể có hay không có các tính chất P_1, P_2, \dots, P_n . Ký hiệu

$$S_0 = \sum_{i=1}^m \omega(a_i), \quad S_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq m} M(P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_k}),$$

ở đây $M(P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_k})$ là tổng trọng số của tất cả các vật có các tính chất $P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_k}$,

$M(r)$ là tổng trọng số của tất cả các vật có đúng r tính chất,

M_r là tổng trọng số của tất cả các vật có không ít hơn r tính chất.

Định lý 4 (Nguyên lý bù trừ suy rộng).

$$M(r) = \sum_{k=r}^n (-1)^{k-r} C_k^r S_k, \quad M_r = \sum_{k=r}^n (-1)^{k-r} C_{k-1}^{r-1} S_k,$$

với mọi $r = 0, 1, \dots, n$.

Nếu $\omega(a_1) = \dots = \omega(a_m) = 1$ thì áp dụng Định lý trên, ta nhận được nguyên lý bù trừ dạng kinh điển.

3.2 Phương pháp đếm bằng công thức nghịch đảo

Định nghĩa 19. Dãy đa thức là một dãy có thứ tự $p_0(x), p_1(x), p_2(x), p_3(x), \dots, p_n(x)$ với $n \in \mathbb{N}$, mà ta đơn giản ký hiệu là $(p_n(x))_0^\infty$ thỏa mãn các điều kiện sau đây:

(i) Các hệ số của các $p_n(x)$ đều phải là số thực;

(ii) $p_0(x)$ là một hằng số khác 0;

(iii) Bậc của $p_n(x)$, ký hiệu là $\deg(p_n(x))$, bằng n .

Nếu $(q_n(x))_0^\infty$ là một dãy đa thức khác, thì $(q_0(x), q_1(x), \dots, q_n(x))$ lập thành một cơ sở cho không gian vectơ $\mathbb{C}_{n+1}[x]$ tất cả các đa thức trên \mathbb{C} bậc nhỏ hơn $n+1$. Do đó, với mỗi $p_n(x), n \in \mathbb{N}$ của dãy

đa thức $(p_n(x))_0^\infty$, tồn tại các số $a_{n,0}, a_{n,1}, \dots, a_{n,n}$ sao cho $p_n(x) = \sum_{k=0}^n a_{n,k} q_k(x)$. Tương tự, tồn tại các số $b_{n,0}, b_{n,1}, b_{n,2}, \dots, b_{n,n}$ sao cho

$$q_n(x) = \sum_{k=0}^n b_{n,k} p_k(x),$$

Các số $a_{n,k}$ và $b_{n,k}$ cũng được gọi là các hệ số nói.

Biểu diễn của $m+1$ đa thức $p_n(x)$ đầu tiên qua $q_k(x)$ có thể viết dưới dạng ma trận $P = AQ$, ở đây P và Q là các vectơ cột $(p_k(x))_0^m$ và $(q_k(x))_0^m$, còn $A = (a_{i,j})$ là ma trận vuông cấp $m+1$.

Tương tự biểu diễn của $m+1$ đa thức $q_n(x)$ đầu tiên qua $p_n(x)$ có thể viết dưới dạng ma trận $Q = BP$, ở đây P và Q là các vectơ cột nói ở trên, còn $B = (b_{i,j})$ là ma trận vuông cấp $m+1$.

Từ $P = AQ$ và $Q = BP$ suy ra $P = A(BP) = (AB)P$ và $Q = B(AQ) = (BA)Q$. Do sự độc lập tuyến tính của các đa thức $(p_k(x))_0^m$ và $(q_k(x))_0^m$ suy ra $AB = BA = E$ với E là ma trận đơn vị. Vậy A và B là các ma trận nghịch đảo của nhau.

Định lý 5 (Công thức nghịch đảo các đồng nhất thức tổ hợp).

Giả sử $A = (a_{i,j})$ và $B = (b_{i,j})$ là các ma trận nhận được từ hai dãy đa thức $(p_n(x))_0^\infty$ và $(q_n(x))_0^\infty$ như nói tới ở trên. Ta cũng giả sử rằng dãy các số $(u_n)_0^\infty$ và $(v_n)_0^\infty$ liên hệ với nhau bằng đẳng thức:

$$u_n = \sum_{k=0}^n a_{n,k} v_k \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}. \text{ Khi đó, } v_n = \sum_{k=0}^n b_{n,k} u_k \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}$$

Định nghĩa 20. Dễ thấy rằng các dãy $(x^n)_0^\infty$ và $((x-1)^n)_0^\infty$ là các dãy đa thức. Ta có

$$x^n = ((x-1) + 1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k (x-1)^k,$$

$$(x-1)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k (x)^k.$$

Do đó các ma trận A và B nhận được từ hai dãy đa thức được gọi là các ma trận của các công thức nghịch đảo nhị thức. Theo Định

lý 5 nếu hai dãy số $(u_n)_0^\infty$ và $(v_n)_0^\infty$ liên hệ với nhau bằng đẳng thức $u_n = \sum_{k=0}^n C_n^k v_k$ thì $v_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k u_k$.

Ví dụ 7. Tính số phân hoạch $S(n, m)$ của tập $[n]$ thành m khối theo n và m .

Nếu $S_n([m])$ là tập tất cả các hàm từ tập $[n]$ vào tập $[m]$, còn $T_n([m])$ là tập tất cả các hàm toàn ánh từ $[n]$ lên $[m]$ thì $|S_n([m])| = u_m = m^n$, $|T_n([m])| = v_m = m!S(n, m)$.

Ký hiệu $F_k = \{f \in S_n([m]) \mid f([n]) = k\}$, với $k = 1, \dots, m$. Khi đó $F_k \cap F_l = \emptyset$ nếu $k \neq l$ và $S_n([m]) = F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_m$. Theo nguyên lý cộng, $|S_n([m])| = |F_1| + |F_2| + \dots + |F_m|$. Mỗi $f \in F_k$ có thể xem là một nhiệm vụ gồm hai công việc: công việc 1 là tạo ra tập con $K \subseteq [m]$ lực lượng k ; công việc 2 là tạo ra toàn ánh f từ $[n]$ lên K . Theo nguyên lý nhân, $|F_k| = C_m^k k! S(n, k)$. Do $S(n, 0) = 0$, ta có $m^n = \sum_{k=0}^m C_m^k k! S(n, k)$.

Áp dụng công thức nghịch đảo nhị thức ở trên ta được số phân hoạch $S(n, m)$ của tập gồm n phần tử thành m khối là

$$S(n, m) = \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} C_m^k k^n.$$

Định nghĩa 21. Ký hiệu $(x)_n = x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)$. Xét các dãy $(x^n)_0^\infty$ và $((x)_n)_0^\infty$. Dễ thấy rằng các dãy này là các dãy đa thức. Do $m^n = \sum_{k=0}^n S(n, k)(m)_k$ với mọi số nguyên dương m , ở đây $(m)_k = C_m^k k! = m(m-1)(m-2)\dots(m-k+1)$, nên đa thức $x^n - \sum_{k=0}^n S(n, k)(x)_k$ có vô số nghiệm.

Do đó $x^n - \sum_{k=0}^n S(n, k)(x)_k = 0$ hay $x^n = \sum_{k=0}^n S(n, k)(x)_k$.

Giả sử $(x)_n = \sum_{k=0}^n s(n, k)x^k$ là biểu diễn của $(x)_n$ theo x^k . Các hệ số nối $s(n, k)$ trong đẳng thức này được gọi là số Stirling loại một. Gọi A và B là các ma trận nhận được từ hai dãy đa thức trên. Khi

đó, các ma trận A và B ở trên được gọi là các ma trận của công thức nghịch đảo Stirling. Vì $BA = E$, nên ta có đồng nhất thức

$$\sum_{k=0}^n s(l, k)S(k, j) = \delta_{l, j}, \text{ ở đây } \delta_{l, j} \text{ là ký hiệu Kronecker.}$$

Theo định lý (5), nếu hai dãy số $(u_n)_0^\infty$ và $(v_n)_0^\infty$ liên hệ với nhau bằng đẳng thức $u_n = \sum_{k=0}^n S(n, k)v_k$ thì $v_n = \sum_{k=0}^n s(n, k)u_k$.

Ta thấy $s_0 = |X| = e_1 + e_1 + e_2 + \cdots + e_n$.

$$s_k = C_k^k e_k + C_{k+1}^k e_{k+1} + \cdots + C_n^k e_n.$$

Nếu ta ký hiệu s là vectơ cột của các $s_k, k = 1, 2, e$ là vectơ cột của các e_k và A_1 là ma trận trong phương trình $s = A_1 e$. nên $A_1^{-1} = (A^t)^{-1} = (A^{-1})^t = B^t$, trong đó B là ma trận của công thức nghịch đảo nhị thức còn B^t là ma trận chuyển vị của B . Ta suy ra $e = B^t s$.

Mệnh đề 16 (Công thức sàng).

$$e_k = s_k - C_{k+1}^k s_{k+1} + C_{k+2}^k s_{k+2} - \cdots + (-1)^{n-k} C_n^k s_n.$$

Từ công thức sàng, ta có thể chứng minh được công thức tính số phần tử của X chứa trong một số lẻ hay một số chẵn các tập con A_1, A_2, \dots, A_n .

3.3 Một vài kỹ thuật cơ bản

Định nghĩa 22. Giả sử $f(x)$ là một hàm số (ta sẽ xét chủ yếu các hàm số với miền xác định và miền giá trị chỉ gồm các số nguyên). Toán tử sai phân tiến Δ ánh xạ hàm f thành hàm Δf được xác định như sau: $\Delta f : x \mapsto [f(x+1) - f(x)]$, ở đây ta giả thiết rằng miền xác định của f chứa $x+1$ mỗi khi nó chứa x .

Giả sử ta phải tính tổng $f(a) + f(a+1) + f(a+2) + \cdots + f(n)$, ở đây $f(x)$ là hàm số xác định tại $a, a+1, a+2, \dots, n$. Nếu ta tìm được hàm $F(x)$ sao cho $\Delta F(x) = f(x)$, thì hàm $F(x)$ cũng được ký hiệu là $\Delta^{-1} f(x)$. Khi đó, theo định nghĩa của toán tử Δ ta có $f(a) + f(a+1) + f(a+2) + \cdots + f(n) = F(n+1) - F(a)$. Ta ký hiệu hiệu $F(n+1) - F(a)$ bằng $F(x) \Big|_a^{n+1}$ hay $\Delta^{-1} f(x) \Big|_a^{n+1}$.

Định lý 6 (Định lý cơ bản cho tích phân hữu hạn). Giả sử tồn tại hàm số $F(x)$ sao cho $\Delta F(x) = f(x)$. Khi đó $f(a) + f(a+1) + \dots + f(n) = F(n+1) - F(a) = \Delta^{-1}f(x) \Big|_a^{n+1}$.

Ví dụ 8. Tính tổng $1 + 7 + 19 + 37 + \dots + (3n^2 + 3n + 1)$.

Ta có $\Delta x^3 = (x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$. Do đó, theo Định lý cơ bản cho tích phân hữu hạn, ta có

$$1 + 7 + 19 + 37 + \dots + (3n^2 + 3n + 1) = x^3 \Big|_0^{n+1} = (n+1)^3 - 0^3 = (n+1)^3.$$

▲ Với số nguyên dương n đã cho, ta định nghĩa $(x)_n = x(x-1)\dots(x-n+1)$. Mệnh đề sau đây cho phép ta tính $\Delta^{-1}(x)_n$

Mệnh đề 17. $\Delta^{-1}(x)_n = \frac{(x)_{n+1}}{n+1}$.

Ví dụ 9. Tính tổng $1.2 + 2.3 + \dots + (n-1)n$.

Ta có $\Delta^{-1}(x)_3 = \frac{(x)_3}{3}$. Do đó, theo Định lý cơ bản cho tích phân hữu hạn,

$$\begin{aligned} 1.2 + 2.3 + \dots + (n-1)n &= \Delta^{-1}(x)_3 \Big|_2^{n+1} = \frac{(x)_3}{3} \Big|_2^{n+1} \\ &= \frac{1}{3}(n-1)n(n+1) - \frac{1}{3}0.1.2 = \frac{1}{3}(n-1)n(n+1). \end{aligned}$$

Định lý 7 (Tính tích phân hữu hạn theo từng phần). Nếu với các hàm $f(x)$ và $g(x)$, $\Delta^{-1}[f(x+1)\Delta g(x)]$ tồn tại, thì $\Delta^{-1}[g(x)\Delta f(x)]$ cũng tồn tại và

$$\Delta^{-1}[g(x)\Delta f(x)] = f(x)g(x) - \Delta^{-1}[f(x+1)\Delta g(x)].$$

Ví dụ 10. Tính tổng $1a + 2a^2 + 3a^3 + \dots + na^n$, với $a > 1$.

Đặt $f(x) = \frac{a^x}{a-1}$, $g(x) = x$. Khi đó $\Delta f(x) = a^x$ và $\Delta g(x) = 1$.

Do đó $f(x+1)\Delta g(x) = \frac{a^{x+1}}{a-1}$. Ta cũng có

$$\Delta^{-1}[f(x+1)\Delta g(x)] = \Delta^{-1}\left(\frac{a^{x+1}}{a-1}\right) = \frac{a^{x+1}}{(a-1)^2}.$$

Suy ra theo quy tắc tích phân hữu hạn theo từng phần, ta có

$$\Delta^{-1}(xa^x) = \frac{xa^x}{a-1} - \frac{a^{x+1}}{(a-1)^2}.$$

Vì vậy

$$\begin{aligned} 1a + 2a^2 + 3a^3 + \dots + na^n &= \Delta^{-1}(xa^x)|_1^{n+1} \\ &= \left[\frac{(n+1)a^{n+1}}{a-1} - \frac{a^{n+2}}{(a-1)^2} \right] - \left[\frac{a}{a-1} - \frac{a^2}{(a-1)^2} \right] \\ &= \frac{a^{n+1}(na - n - 1) + a}{(a-1)^2}. \end{aligned}$$

Chú ý 1. Ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathbb{C}$ của không gian vectơ $\mathbb{C}[x]$ vào không gian vectơ \mathbb{C} (trên trường \mathbb{C}) được gọi là một phiếm hàm tuyến tính của $\mathbb{C}[x]$. Với một dãy đa thức $(p_j(x))_0^\infty$ và một dãy các số $(a_j)_0^\infty$, tồn tại duy nhất một phiếm hàm tuyến tính $f : \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathbb{C}$ với $f(p_j(x)) = a_j, j \in \mathbb{N}$

Ví dụ 11.

Xét dãy đa thức $((x)_n)_0^\infty$. Ta định nghĩa phiếm hàm tuyến tính $f_k, k \in \mathbb{N}$ bằng cách đặt $f_k((x)_n) = \delta_{k,n}$, và mở rộng tuyến tính f lên toàn bộ $\mathbb{C}[x]$. Áp dụng f_k vào đồng nhất thức $(x)_{(n+1)} = (x)_n(x-n) = x(x)_n - n(x)_n$ ta được

$$\begin{aligned} f_{k-1}((x)_n) &= \delta_{k-1,n} = \delta_{k,n+1} = f_k((x)_{n+1}) = f_k[x(x)_n] - nf_k[(x)_n] \\ &= (f_k g_x - kf_k)((x)_n), \quad (\text{vì } f_k((x)_n) = \delta_{k,n}). \end{aligned}$$

Mặt khác, ta lại có

$$f_k(x^n) = f_k \left[\sum_{j=0}^n S(n, j)(x)_j \right] = \sum_{j=0}^n S(n, j)\delta_{k,j} = S(n, k).$$

Do đó, $S(n, k-1) = S(n+1, k) - kS(n, k)$ hay $S(n+1, k) = kS(n, k) + S(n, k-1)$. Đây chính là đồng nhất thức cho số Stirling loại hai mà ta đã chứng minh ở Chương 1.

KẾT LUẬN

Qua một thời gian tìm hiểu, tiếp cận và nghiên cứu về các phương pháp đếm trong lý thuyết tổ hợp, luận văn đã hoàn thành và đạt được mục tiêu nghiên cứu của đề tài với những kết quả cụ thể như sau:

▲ Trình bày một cách đầy đủ và chi tiết các nguyên lý đếm cơ bản, nguyên lý Dirichlet, một số bài toán đếm cơ bản và các ví dụ đặc sắc nhằm minh họa cho các vấn đề được nêu.

▲ Tổng quan và hệ thống một cách đầy đủ và chi tiết chuỗi lũy thừa hình thức, các toán tử trong $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, phép truy hồi trong $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, phương pháp đếm bằng hàm sinh thông thường và phương pháp đếm bằng hàm sinh mũ. Ngoài ra, một hệ thống các ví dụ minh họa được trình bày nhằm làm sáng tỏ vấn đề nghiên cứu.

▲ Cuối cùng là khảo sát nguyên lý bù trừ suy rộng, phương pháp đếm bằng công thức nghịch đảo bao gồm công thức nghịch đảo nhị thức, công thức nghịch đảo Stirling, công thức sàng và một vài kỹ thuật cơ bản như tính tổng bằng tích phân hữu hạn và xác định hệ thức trong các dãy số bằng phép hàm tuyến tính và chọn lọc một số ví dụ minh họa đặc sắc.

Với những gì tìm hiểu và nghiên cứu được, luận văn sẽ là một tài liệu tham khảo hữu ích cho bản thân khi tiếp tục đi sâu nghiên cứu sau này và hy vọng cũng là nguồn tư liệu tốt cho những ai quan tâm nghiên cứu về lý thuyết tổ hợp.

Trong điều kiện về thời gian và khuôn khổ của luận văn nên chúng tôi chưa đi nghiên cứu về lý thuyết Polya, đây là một lý thuyết nhằm cung cấp cho ta một công cụ mạnh cho bài toán đếm trong lý thuyết tổ hợp. Nghiên cứu về lý thuyết Polya sẽ là hướng phát triển tiếp theo của luận văn.