BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

HUỲNH ANH HIẾU

TÍCH NỬA TRỰC TIẾP VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành : Phương pháp toán sơ cấp

Mã số: 60.46.40

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Đà Nẵng - Năm 2013

Công trình được hoàn thành tại

ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

Người hướng dẫn khoa học: **TS. NGUYỄN NGỌC CHÂU**

Phản biện 1: **TS. LÊ HOÀNG TRÍ**

Phản biện 2: **PGS.TS. NGUYỄN GIA ĐỊNH**

Luận văn được bảo vệ tại Hội đồng chấm luận văn tốt nghiệp Thạc sĩ khoa học họp tại Đại học Đà Nẵng vào ngày 25 tháng 5 năm 2013.

** Có thể tìm hiểu luận văn tại:*

- Trung tâm Thông tin - Học liệu, Đại học Đà Nẵng
- Thư viện trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Bài toán phân loại nhóm hữu hạn là xác định tất cả các nhóm không đẳng cấu nhau có cấp n cho trước, đã được A. Cayley đặt ra vào năm 1878, và cho đến nay vẫn chưa có lời giải đầy đủ.

Với hai nhóm H và K cho trước, có nhiều cách xây dựng từ chúng một nhóm thứ ba, chẳng hạn bằng cách lấy tích trực tiếp, tích nửa trực tiếp, tích tâm, tích bện … của hai nhóm đó. Mỗi cách như vậy đều có những ứng dụng hữu ích trong lý thuyết nhóm, đặc biệt đối với bài toán phân loại và xác định nhóm hữu hạn. Nhằm tìm hiểu tích nửa trực tiếp của hai nhóm và bài toán phân loại đẳng cấu nhóm hữu hạn, tôi chọn cho mình đề tài luận văn thạc sĩ là:

“ TÍCH NỬA TRỰC TIẾP VÀ ỨNG DỤNG ”

2. Mục đích và nhiệm vụ nghiên cứu

- Nghiên cứu cấu trúc nhóm, p – nhóm.

- Tìm hiểu quan hệ đẳng cấu giữa các nhóm và bài toán phân loại đẳng cấu nhóm hữu hạn.

- Nghiên cứu tích trực tiếp, tích nửa trực tiếp của hai nhóm.

- Phân loại đẳng cấu một số lớp nhóm hữu hạn.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

- Các nhóm và p – nhóm hữu hạn, đặc biệt là các nhóm có cấp $2p$ và p^3, với p là một số nguyên tố.

- Quan hệ đẳng cấu giữa các nhóm hữu hạn.

- Tích trực tiếp, tích nửa trực tiếp của hai nhóm.

- Bài toán phân loại đẳng cấu nhóm hữu hạn.

4. Phương pháp nghiên cứu

- Tập hợp và hệ thống các tài liệu về lý thuyết nhóm có liên quan đến nội dung đề tài. Đặc biệt là tài liệu về tích nửa trực tiếp của hai nhóm.

- Khảo sát nhóm các tự đẳng cấu của một nhóm hữu hạn.

- Sử dụng tích nửa trực tiếp để xây dựng và phân loại đẳng cấu một số lớp nhóm hữu hạn.

- Trao đổi, thảo luận với người hướng dẫn.

5. Cấu trúc luận văn

MỞ ĐẦU

Chương 1: NHÓM VÀ p – NHÓM

Chương này trình bày sơ lược một số khái niệm và kết quả về cấu trúc nhóm và p – nhóm, để làm cơ sở cho chương sau. Các chi tiết liên quan có thể tìm thấy trong các tài liệu về lý thuyết nhóm.

Chương 2: TÍCH NỬA TRỰC TIẾP VÀ ỨNG DỤNG

Chương này là nội dung chính của luận văn, trình bày tích nửa trực tiếp của hai nhóm và áp dụng chúng để xây dựng và phân loại một số lớp nhóm.

KẾT LUẬN

TÀI LIỆU THAM KHẢO

CHƯƠNG 1
NHÓM VÀ p – NHÓM

Chương này trình bày sơ lược một số khái niệm và kết quả về cấu trúc nhóm và p – nhóm hữu hạn, để làm cơ sở cho chương sau. Các chi tiết liên quan có thể tìm xem trong các tài liệu về lý thuyết nhóm

1.1. NHÓM

1.1.1. Định nghĩa và một số nhóm đặc biệt

Định nghĩa 1.

Cho một tập hợp G cùng với phép toán hai ngôi trên G

$$\begin{aligned} G \times G &\to G \\ (a,b) &\mapsto a * b \end{aligned}$$

Cặp $(G, *)$ được gọi là một nhóm nếu thỏa mãn

i) $\forall\, a, b, c \in G,\ (a*b)*c = a*(b*c)$,

ii) Tồn tại một phần tử, ký hiệu $e \in G$, gọi là phần tử đơn vị, sao cho

$a * e = e * a = a$, với mọi $a \in G$

iii) Với mỗi $a \in G$ có một phần tử nghịch đảo trong G, nghĩa là có một phần tử $a^{-1} \in G$ sao cho $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

Nếu với mọi $a, b \in G, a*b = b*a$ thì $(G, *)$ được gọi là một nhóm Aben (hay nhóm giao hoán).

Nhóm G được gọi là nhóm hữu hạn nếu G là một tập hữu hạn. Lúc đó số phần tử của tập hợp G được gọi là cấp của nhóm G và được kí hiệu là $|G|$. Nếu nhóm G không phải là nhóm hữu hạn thì ta nói G là nhóm (có cấp) vô hạn.

Định nghĩa 2.

Cho một nhóm *G*. Tập $\varnothing \neq S \subset G$ được gọi là nhóm con của *G*, kí hiệu $S \leq G$, nếu thỏa mãn các điều kiện sau:

i) $\forall a, b \in S, ab \in S$

ii) $\forall a \in S, a^{-1} \in S$.

Mệnh đề 1.

Giả sử S là một bộ phận khác rỗng của một nhóm *G*. Các điều kiện sau đây là tương đương:

i) S là một nhóm con của *G*.

ii) Với mọi $x, y \in S, xy^{-1} \in S$

Mệnh đề 2. [4]

Giao của một họ bất kỳ các nhóm con của một nhóm G cũng là nhóm con của nhóm *G*.

Định nghĩa 3.

Cho G là một nhóm và X là một tập con khác rỗng của G. Nhóm con của G sinh bởi tập hợp X là giao của tất cả các nhóm con của G có chứa *X*, kí hiệu $< X >$.

$< X > = \{ x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \ldots x_n^{\varepsilon_n} \ / \ x_i \in X, \varepsilon_i = \pm 1, n$ là một số nguyên dương $\}$

Nhận xét 1.

Định nghĩa 4.

Một nhóm X được gọi là cyclic nếu X được sinh ra bởi chỉ một phần tử $a \in X$, kí hiệu $< a >$. Phần tử a được gọi là một phần tử sinh của *X*.

Nhóm cyclic cấp n được ký hiệu là C_n. Ta có

$$C_n = < a > = < a \ / \ a^n = e > = \{e, a^1, a^2, \ldots, a^{n-1}\}.$$

Mệnh đề 3.

Giả sử G là một nhóm cyclic hữu hạn và m là một ước nguyên dương của $|G|$. Khi đó tồn tại duy nhất một nhóm con H của G sao cho $|H| = m$.

Định nghĩa 5.

Giả sử G là một nhóm với phần tử đơn vị e và $a \in G$. Nếu $a^m \neq e, \forall m > 0$ thì a có cấp vô hạn. Nếu m là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho $a^m = e$ thì m được gọi là cấp của a. Cấp của phần tử a được kí hiệu là $ord(a)$.

Từ định nghĩa trên ta có $ord(a) = |<a>|$, và $ord(a) = 1 \Leftrightarrow a = 1$

Định nghĩa 6.

Giả sử N là một nhóm con của nhóm G. Với mỗi $a \in G$, các tập hợp

$$aN = \{an \ / \ n \in N\}$$

$$Na = \{na \ / \ n \in N\}$$

được gọi tương ứng là lớp kề trái và lớp kề phải của N bởi a.

Mệnh đề 4.

Hai lớp kề trái của N hoặc trùng nhau hoặc không có phần tử nào chung. Các lớp kề phải cũng vậy. Như thế, nhóm G được phân hoạch thành hợp rời của các lớp kề trái (tương ứng các lớp kề phải).

Định nghĩa 7.

Cho G là một nhóm với phép toán nhân, một nhóm con N của G được gọi là nhóm con chuẩn tắc của G nếu: $\forall x \in G, \forall a \in N, xax^{-1} \in N$, và kí hiệu $N \lhd G$.

Mệnh đề 5.

Giả sử N là một nhóm con của một nhóm G. Các điều kiện sau đây là tương đương:

i) N là nhóm con chuẩn tắc của G

ii) $xN = Nx$, với mọi $x \in G$.

Khi N là nhóm con chuẩn tắc của G, thì các lớp kề trái, lớp kề phải của N được gọi là lớp kề của N trong G.

Mệnh đề 6.

Cho G là một nhóm. Ký hiệu $Z(G) = \{g \in G \ / \ gs = sg, \forall s \in G\}$. Khi đó $Z(G)$ là một nhóm con chuẩn tắc của G, gọi là nhóm con tâm của nhóm G.

Định nghĩa 8.

Cho x và y là hai phần tử của một nhóm G. Ký hiệu $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy \in G$, và gọi là giao hoán tử của x với y.

Định nghĩa 9.

Cho G là một nhóm. Nhóm con sinh ra bởi các giao hoán tử $[x, y]$, $\forall x, y \in G$, ký hiệu $[G, G]$, và được gọi là nhóm giao hoán tử của nhóm G.

Mệnh đề 7.

Cho G là một nhóm, khi đó $[G, G] \lhd G$.

Mệnh đề 8.

Cho H là một nhóm con của nhóm G thỏa mãn điều kiện $[G: H] = 2$. Khi đó $H \lhd G$.

Mệnh đề 9.

Cho G là một nhóm và H là một nhóm con chuẩn tắc của G sao cho $H \subset Z(G)$. Khi đó G / H là nhóm cyclic thì G là nhóm aben.

Định nghĩa 10.

Cho G là một nhóm và $N \leq G$. Ta gọi tập gồm tất cả các lớp kề trái của N trong G là tập thương của G trên N và kí hiệu G / N.

$$G / N = \{xN \ / \ x \in G\}.$$

Lực lượng của tập G / N được gọi là chỉ số của nhóm con N trong nhóm G, và được kí hiệu là $[G : N]$.

Mệnh đề 10.

Cho N là một nhóm con chuẩn tắc của một nhóm G. Khi đó

i) Quy tắc cho tương ứng cặp (xN, yN) với lớp kề xyN là một ánh xạ từ $G / N \times G / N$ đến G / N.

ii) Tập thương G / N cùng với phép toán hai ngôi: $(xN, yN) \mapsto xyN$ là một nhóm, gọi là nhóm thương của G trên nhóm con chuẩn tắc N.

Định lý 1. *(Định lý Lagrange)*

Giả sử G là một nhóm hữu hạn và N là một nhóm con bất kỳ của G. Khi đó $|G|$ là một bội của $|N|$.

Hệ quả 1.

Cấp của một phần tử tùy ý của nhóm hữu hạn G là ước của cấp của G.

Hệ quả 2.

Mọi nhóm hữu hạn có cấp nguyên tố đều là cyclic và được sinh ra bởi phần tử bất kì, khác phần tử trung lập của nhóm.

Định nghĩa 11.

Cho X là một tập, kí hiệu $S(X)$ là tập gồm tất cả các song ánh từ X đến X. Tập $S(X)$ với phép hợp thành các ánh xạ là một nhóm và gọi là nhóm đối xứng trên tập X hay nhóm các phép thế của X.

Đặc biệt khi tập $X = \{1, 2, ..., n\}$ thì nhóm đối xứng của $S(X)$ được kí hiệu bởi S_n và gọi là nhóm đối xứng trên n phần tử.

Mệnh đề 11.

Nhóm S_n có $n!$ phần tử

Mệnh đề 12.

Một nghịch thế của phép thế $\alpha \in S_n$ là một cặp phần tử i, j của tập $\{1, 2, ..., n\}$ sao cho $i < j$ và $\alpha(i) > \alpha(j)$.

Định nghĩa 12

Ta gọi một phép thế α là chẵn hay lẻ tùy theo số các nghịch thế của α là số chẵn hay số lẻ.

Mệnh đề 13.

Tập gồm tất cả các phép thế chẵn trên tập $X = \{1, 2, ..., n\}$, $n > 1$, là một nhóm con của S_n, ký hiệu A_n, và được gọi là nhóm thay phiên trên n phần tử.

Định nghĩa 13. (*Nhóm Dihedral*)

Ta gọi nhóm Dihedral D_n, $n > 2$, là nhóm sinh bởi hai phần tử: a cấp n và b cấp 2, với quan hệ xác định $bab^{-1} = a^{-1}$. Nhóm D_n là nhóm không giao hoán, cấp $2n$ và có biểu diễn:

$$D_n = \langle a, b \ / \ a^n = b^2 = e, bab^{-1} = a^{-1} \rangle .$$

Định nghĩa 14. (*Nhóm Quaternion tổng quát*)

Ta gọi nhóm Quaternion Q_{2^n}, $n > 2$, là nhóm sinh bởi hai phần tử: a

cấp 2^{n-1} và b cấp 4, với các quan hệ xác định $a^{2^{n-2}} = b^2,\ bab^{-1} = a^{-1}$.

Nhóm Q_{2^n} là nhóm không giao hoán, cấp 2^n, và có biểu diễn:

$$Q_{2^n} = \langle a,\ b \ /\ a^{2^{n-1}} = e,\ a^{2^{n-2}} = b^2,\ bab^{-1} = a^{-1} \rangle .$$

Định nghĩa 15.

Giả sử G và G' là các nhóm (với phép toán nhân). Một ánh xạ $\varphi : G \to G'$ được gọi là một đồng cấu nhóm nếu $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y);\ \forall x, y \in G$.

Thí dụ 1.

Cho $X,\ Y$ là hai nhóm tùy ý, ánh xạ $f : X \to Y$

$x \mapsto e_Y$ (e_Y là phần tử đơn vị của Y)

là một đồng cấu, và được gọi là đồng cấu tầm thường.

Mệnh đề 14.

Giả sử $\varphi : G \to G'$ là một đồng cấu nhóm. Khi đó:

i) φ chuyển đơn vị của G thành đơn vị của G', tức là $\varphi(1_G) = 1_{G'}$.

ii) φ chuyển nghịch đảo của phần tử $x \in G$ thành nghịch đảo của phần tử $\varphi(x) \in G'$, tức là $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$.

Định nghĩa 16.

i) Một đồng cấu nhóm đồng thời là một đơn ánh (tương ứng toàn ánh, song ánh) được gọi là một đơn cấu (tương ứng toàn cấu, đẳng cấu) nhóm.

ii) Nếu có một đẳng cấu nhóm $\varphi : G \to G'$ thì ta nói G đẳng cấu với G' và kí hiệu $G \cong G'$.

Định nghĩa 17.

Cho một đồng cấu nhóm $\varphi : G \to G'$. Ký hiệu

$$Ker\varphi = \varphi^{-1}(1_{G'}) = \{x \in G / \varphi(x) = 1_{G'}\}$$

$$Im\varphi = \varphi(G) = \{\varphi(x) / x \in G\}$$

Ta gọi $Ker\varphi$ và $Im\varphi$ lần lượt là hạt nhân và ảnh của đồng cấu φ.

Mệnh đề 15.

Nếu $\varphi : G \to G'$ là một đồng cấu nhóm thì $Ker\varphi$ là nhóm con chuẩn tắc của G và $Im\varphi$ là nhóm con của G'.

Mệnh đề 16.

Đồng cấu nhóm $\varphi : G \to G'$ là một toàn cấu nếu và chỉ nếu $Im\varphi = G'$. Nó là một đơn cấu nếu và chỉ nếu $Ker\varphi = \{e\}$, trong đó e là đơn vị của G.

1.1.2. Một số kết quả về p – nhóm hữu hạn

Định nghĩa 18.

i) Một nhóm có cấp là một lũy thừa của một số nguyên tố được gọi là một p – nhóm.

ii) Nhóm H được gọi là p – nhóm con của G nếu H vừa là một nhóm con của G vừa là một p – nhóm.

iii) Nhóm H được gọi là một p – nhóm con Sylow của G nếu H là một p – nhóm con của G và $|H| = p^n$ là lũy thừa cao nhất của p chia hết $|G|$.

Định lý 2. (*Định lý Sylow thứ nhất*)

Giả sử G là một nhóm hữu hạn và p là một số nguyên tố chia hết $|G|$. Khi đó tồn tại một p – nhóm con Sylow của G.

Định lý 3. (*Định lý Sylow thứ hai*)

Giả sử G là một nhóm hữu hạn. Khi đó, mọi p – nhóm con của G đều chứa trong một p – nhóm con Sylow của G.

Định nghĩa 19.

Hai nhóm con S và T của nhóm G được gọi là liên hợp nếu có một phần tử $g \in G$ sao cho $g^{-1}Sg = T$.

Trong đó: $g^{-1}Sg = \{g^{-1}sg \;/\; s \in S\}$

Định lý 4. (*Định lý Sylow thứ ba*)

i) Mọi p – nhóm con Sylow của nhóm hữu hạn G đều liên hợp với nhau.

ii) Gọi s_p là số các p – nhóm con Sylow phân biệt của nhóm hữu hạn G. Khi đó $s_p \equiv 1 \ mod(p)$ hoặc $s_p = 1 + kp, k \in N$.

iii) s_p chia hết cấp của G.

Định lý 5.

Nếu $G \neq \{1\}$ và G là p – nhóm thì nhóm con tâm $Z(G)$ không tầm thường, nghĩa là $Z(G) \neq 1$.

Định lý 6.

Mọi nhóm có cấp p^2 với p là số nguyên tố đều là nhóm giao hoán.

Chứng minh:

Ta chứng minh $Z(G) = G$. Theo Định lý 5, ta có $Z(G)$ không tầm thường. Do đó, theo định lý Lagrange $|Z(G)| = p$ hoặc $|Z(G)| = p^2$. Nếu $|Z(G)| = p^2$ thì $Z(G) = G$. Ngược lại nếu $|Z(G)| = p$ thì $G / Z(G)$ là nhóm cyclic, theo mệnh đề 9 chương 1 suy ra G là nhóm aben, vô lý với $|Z(G)| = p$.

Như vậy $Z(G) = G$. Do đó G là nhóm Aben.

1.1.3. Tích trực tiếp

Mệnh đề 17.

Cho hai nhóm *N* và *Q*. Tập hợp tích Đề Các

$$N \times Q = \{(n, q) \,/\, n \in N, q \in Q\}$$

cùng với phép nhân xác định bởi $(n, q)(n', q') = (nn', qq')$ là một nhóm.

Định nghĩa 20.

Nhóm $N \times Q$ xác định trong mệnh đề ở trên được gọi là tích trực tiếp ngoài của hai nhóm *N* và *Q*.

Định lý 7.

Định lý 8.

Cho *G* là một nhóm và *N, Q* là hai nhóm con của *G* sao cho $N \cap Q = \{1\}$, $nq = qn, \forall n \in N, q \in Q$ và $NQ = G$. Khi đó $G \cong N \times Q$.

Hệ quả 3.

Cho *G* là một nhóm và *N, Q* là hai nhóm con chuẩn tắc của *G* thỏa mãn điều kiện $NQ = G$ và $N \cap Q = \{1\}$. Khi đó $G \cong N \times Q$.

Thí dụ 2.

Cho *n* là một số nguyên dương, lẻ, lớn hơn *2*. Khi đó:

$$D_{2n} \cong D_n \times C_2$$

trong đó nhóm $D_{2n} = \, < r, s \,/\, r^{2n} = s^2 = 1, srs = r^{-1} >$.

Định lý 9.

Cho *G* là một nhóm hữu hạn và *N, Q* là hai nhóm con chuẩn tắc của *G* sao cho $|N||Q| = |G|$. Nếu (i) $N \cap Q = \{1\}$ và (ii) $NQ = G$ thì $G \cong N \times Q$.

Định nghĩa 21.

Cho G là một nhóm, với hai nhóm con N và Q thỏa mãn hai điều kiện sau:

i) $nq = qn,\ \forall n \in N,\ q \in Q$

ii) $\forall g \in G,\ g$ có biểu diễn duy nhất dưới dạng $g = nq,\ n \in N,\ q \in Q$.

Khi đó G được gọi là tích trực tiếp trong của hai nhóm con N và Q và được kí hiệu là $G = N \otimes Q$.

Định lý 10.

Nếu G là tích trực tiếp trong của hai nhóm con N và Q thì $G \cong N \times Q$.

Định lý 11.

Cho G là một nhóm và N, Q là hai nhóm con của G thỏa mãn các điều kiện $N \cap Q = \{1\}, nq = qn,\ \forall n \in N, q \in Q$. Khi đó NQ là nhóm con của G, đẳng cấu với $N \times Q$.

Mệnh đề 18.

Cho C_n và C_m lần lượt là hai nhóm cyclic cấp n và cấp m. Khi đó

$$C_n \times C_m \cong C_{nm} \Leftrightarrow (n, m) = 1 .$$

1.2. TỰ ĐẲNG CẤU NHÓM

1.2.1. Nhóm các tự đẳng cấu

Mệnh đề 19.

Giả sử G là một nhóm. Gọi $Aut(G)$ là tập hợp tất cả các đẳng cấu nhóm từ G vào chính nó. Khi đó, $Aut(G)$ là một nhóm đối với phép hợp thành các ánh xạ.

Phần tử đơn vị của nhóm này là tự đẳng cấu đồng nhất $1_G : G \to G$ với

$1_G(x) = x, \forall x \in G$. Nghịch đảo của đẳng cấu $\alpha \in Aut(G)$ chính là đẳng cấu ngược $\alpha^{-1} \in Aut(G)$.

Định nghĩa 22.

Nhóm $Aut(G)$ được xác định như trên gọi là nhóm các tự đẳng cấu của nhóm *G*.

1.2.2. Nhóm các tự đẳng cấu của một số nhóm hữu hạn

Định lý 12.

Cho C_n là nhóm cyclic cấp n sinh bởi phần tử a. Khi đó nhóm các tự đẳng cấu của C_n là nhóm aben và được xác định

$Aut(C_n) = \{\varphi \ / \ \varphi : C_n \to C_n$ là đồng cấu và $\varphi(a) = a^k, k \in N, (k, n) = 1\}$.

Hệ quả 4.

Nhóm tự đẳng cấu của nhóm cyclic cấp *p*, với *p* là một số nguyên tố, là nhóm cyclic cấp $p - 1$.

Từ Mệnh đề 3 chương 1 và hệ quả trên, ta có

Hệ quả 5.

Nhóm tự đẳng cấu của nhóm cyclic cấp p , p là số nguyên tố lẻ, có duy nhất một phần tử cấp *2*.

Mệnh đề 20.

Nếu p là số nguyên tố lẻ thì $Aut(C_{p^2})$ là nhóm cyclic cấp $p(p-1)$.

Mệnh đề 21.

Nếu p là số nguyên tố thì $Aut(C_p \times C_p) \cong GL(2, Z_p)$, trong đó $GL(2, Z_p)$ là nhóm các ma trận vuông cấp hai không suy biến trên trường Z_p.

Mệnh đề 22.

Nếu p là số nguyên tố thì cấp của nhóm $GL(2, Z_p)$ là:

$$\left|GL(2, Z_p)\right| = p(p^2-1)(p-1).$$

Mệnh đề 23.

Nhóm các tự đẳng cấu của nhóm cyclic cấp *3*, là nhóm cyclic cấp *2*. Nếu $C_3 = <a>$ thì $Aut\left(C_3\right) = <\phi \,/\, \phi^2 = i_d>$, với ϕ là tự đẳng cấu của C_3 được xác định bởi $\phi\left(a\right) = a^2, \forall a \in C_3$.

Mệnh đề 24.

Nhóm các tự đẳng cấu $Aut(C_2 \times C_2)$ là nhóm dihedral D_3. Nếu $C_2 \times C_2 = \{1,b,c,bc\}$ thì $Aut(C_2 \times C_2)$ có *6* phần tử được xác định bởi bảng sau:

$Aut(C_2 \times C_2)$	$\varphi(b)$	$\varphi(c)$
$i_d = \varphi_1$	b	c
φ_2	b	bc
φ_3	c	b
φ_4	c	bc
φ_5	bc	b
φ_6	bc	c

Nhận xét 2.

Trong nhóm $Aut(C_2 \times C_2)$ của mệnh đề *24*, ta có $\varphi_4 = \varphi_2\varphi_5\varphi_2^{-1}$ nghĩa là φ_4 và φ_5 liên hợp nhau.

Mệnh đề 25.

Nhóm các tự đẳng cấu của nhóm cyclic cấp 4 là nhóm cyclic cấp *2*. Nếu $C_4 = <a>$ thì $Aut(C_4)$ có *2* phần tử xác định bởi bảng sau:

$Aut\left(C_4\right)$	$\alpha\left(a\right)$	$ord\left(\alpha\right)$
$i_d = \alpha_1$	a	*1*
α_2	a^3	*2*

CHƯƠNG 2
TÍCH NỬA TRỰC TIẾP VÀ ỨNG DỤNG

Chương này là nội dung chính của luận văn, trình bày tích nửa trực tiếp của hai nhóm và áp dụng chúng để xây dựng một số lớp nhóm.

2.1. TÍCH NỬA TRỰC TIẾP

Bổ đề 1.

Cho N và Q là hai nhóm và $\theta : Q \to Aut(N)$ là một đồng cấu nhóm. Khi đó tập hợp $\{(n, q) / n \in N, q \in Q\}$ với phép toán xác định bởi

$$(n, q)(n', q') = (n\theta(q)(n'), qq')$$

là một nhóm, ký hiệu là $N \times_\theta Q$.

Định nghĩa 1.

Cho N và Q là hai nhóm và $\theta : Q \to Aut(N)$ là một đồng cấu nhóm. Nhóm $N \times_\theta Q$ được gọi là tích nửa trực tiếp ngoài của hai nhóm N và Q bởi đồng cấu θ.

Nhận xét 1.

i) Nếu θ là đồng cấu tầm thường thì tích nửa trực tiếp $N \times_\theta Q$ chính là tích trực tiếp $N \times Q$.

ii) Nếu N và Q là các nhóm giao hoán và θ là đồng cấu tầm thường thì $N \times_\theta Q$ là nhóm giao hoán.

iii) Nếu N và Q là hai nhóm hữu hạn thì $|N \times_\theta Q| = |N| \times |Q|$

Thí dụ.

Xét $\quad Q \cong C_2 = < b / b^2 = 1 > = \{ 1, b \}$

$$N \cong C_4 = < a / a^4 = 1 > = \{ 1, a, a^2, a^3 \}$$

Theo Mệnh đề *25* (chương 1) ta có $Aut(C_4) = \{ 1_{C_3}, \alpha \}$ với α được xác định $\alpha(x) = x^3$. Suy ra có 2 đồng cấu từ nhóm Q lên nhóm các tự đẳng cấu *Aut(N)* là $\theta : Q \to Aut\ (N); 1 \mapsto 1_{C_3}; b \mapsto \alpha$, và θ_1 là đồng cấu tầm thường.

Khi đó tích nửa trực tiếp của N với Q bởi đồng cấu θ là một nhóm không giao hoán cấp 8

Dễ dàng kiểm chứng được *2* ánh xạ sau là hai đơn cấu

$$Q \to N \times_\theta Q \qquad \text{và} \qquad N \to N \times_\theta Q$$

$$b \mapsto (1_N, b) \qquad\qquad a \mapsto (a, 1_Q)$$

Đồng nhất $a \equiv (a, 1_Q)$ và $b \equiv (1_N, b)$ thì nhóm $N \times_\theta Q$ có biểu diễn là $N \times_\theta Q = < a, b / a^4 = b^2 = 1, bab^{-1} = a^{-1} >$. Nhóm này là nhóm không giao hoán cấp *8* và đẳng cấu với nhóm D_4.

Với $\theta_1 : Q \to Aut(N)$ là đồng cấu tầm thường theo nhận xét *1* (chương 2) thì $N \times_{\theta_1} Q$ chính là $N \times Q \cong C_4 \times C_2$.

Định lý 1.

Cho $G = N \times_\theta Q$. Khi đó:

i) N là nhóm con chuẩn tắc của G

ii) $NQ = G$

iii) $N \cap Q = \{1_G\}$.

Định nghĩa 2.

Cho G là một nhóm và N, Q là các nhóm con của G. Nhóm G được gọi là tích nửa trực tiếp trong của N và Q nếu:

i) N là nhóm con chuẩn tắc của G

ii) $NQ = G$

iii) $N \cap Q = \{1_G\}$

Định lý 2.

Cho G là một nhóm với hai nhóm con N và Q. Giả sử $G = NQ$ và $N \cap Q = \{1_G\}$. Khi đó mỗi $g \in G$ đều có biểu diễn duy nhất dưới dạng: $g = nq,\ n \in N$ và $q \in Q$.

Định lý 3.

Giả sử G là tích nửa trực tiếp trong của hai nhóm con N và Q. Khi đó $G \cong N \times_\theta Q$, trong đó $\theta : Q \to Aut(N)$ được cho bởi

$$\theta(q)(n) = qnq^{-1},\ q \in Q,\ n \in N.$$

Nhận xét 2.

i) Từ định lý 9 (chương 1), ta thấy nếu G là một nhóm có hai nhóm con N và Q, $N \lhd G$, $NQ = G$ và $N \cap Q = \{1_G\}$ thì tồn tại một đồng cấu $\theta : Q \to Aut(N)$ sao cho $G \cong N \times_\theta Q$. Như vậy ta có thể xác định được nhóm G nếu biết nhóm con Q và nhóm con chuẩn tắc N của G thỏa mãn $N \cap Q = \{1_G\}$ và $NQ = G$.

ii) Nếu G là nhóm cyclic cấp p^2 (p là số nguyên tố) thì G không phải là một tích nửa trực tiếp. Do trong G chỉ có một nhóm con cấp p.

iii) Cho hai nhóm N và Q. Gọi $G = N \times_\theta Q$ là tích nửa trực tiếp ngoài của

N và Q. Khi đó theo định lý *1* (chương 2), N là nhóm con chuẩn tắc của G, $N \cap Q = \{1_G\}$ và $NQ = G$. Do đó $G \cong N \times_{\theta'} Q$ với $\theta'(q)(n) = qnq^{-1},\ q \in Q,\ n \in N$.

Tuy nhiên $\theta,\ \theta'$ là một. Thật vậy, ta có:

$\theta'(q)(n) = (1_N,\ q).(n,\ 1_Q).(1_N,\ q^{-1}) = (1_N\theta(q)(n),\ q)(1_N,\ q^{-1}) = (\theta(q)(n).\theta(q)(1_N),\ qq^{-1})$

$= (\theta(q)(n).\theta(q)(1_N),\ qq^{-1}) = (\theta(q)(n),\ 1_Q) = \theta(q)n,\ \forall n \in N,\ q \in Q$.

Do đó $\theta = \theta'$.

Định lý 4.

Cho G là một nhóm có hai nhóm con chuẩn tắc N và Q sao cho $N \cap Q = \{1_G\},\ NQ = G$. Khi đó đồng cấu $\theta : Q \to Aut(N)$ được cho bởi:

$$\theta(q)(n) = qnq^{-1},\ q \in Q,\ n \in N$$

là đồng cầu tầm thường.

Định lý 5.

Nếu θ và θ' liên hợp, nghĩa là tồn tại $\alpha \in Aut(N)$ sao cho $\theta'(q) = \alpha \circ \theta(q) \circ \alpha^{-1}$, với mọi $q \in Q$, thì $N \times_\theta Q \cong N \times_{\theta'} Q$.

Định lý 6.

Nếu tồn tại $\alpha \in Aut(N)$ sao cho $\theta' = \theta \circ \alpha$ thì $N \times_\theta Q \cong N \times_{\theta'} Q$.

Định lý 7.

Nếu Q là nhóm cyclic và nhóm con $\theta(Q)$ của $Aut(N)$ liên hợp $\theta'(Q)$ thì $N \times_\theta Q \cong N \times_{\theta'} Q$.

2.2. ỨNG DỤNG TÍCH NỬA TRỰC TIẾP ĐỂ XÂY DỰNG VÀ PHÂN LOẠI MỘT SỐ LỚP NHÓM

2.2.1. Xây dựng và phân loại các nhóm không giao hoán cấp 12

Bổ đề 2.

Mọi nhóm có cấp *12* đều có một nhóm con chuẩn tắc cấp *3* hoặc một nhóm con chuẩn tắc cấp *4*.

Mệnh đề 1.

Mọi nhóm không giao hoán cấp *12* và có một nhóm con chuẩn tắc cấp *4* đều đẳng cấu với nhóm thay phiên A_4.

Mệnh đề 2.

Mọi nhóm không giao hoán có cấp *12* và chứa nhóm con chuẩn tắc cấp *3* đều đẳng cấu với nhóm dihedral D_6 hoặc nhóm $C_3 \times_\theta C_4$.

Từ Mệnh đề 1 và Mệnh đề 2 ở trên cho ta định lý sau:

Định lý 8.

Có đúng *3* nhóm không giao hoán cấp *12* không đẳng cấu nhau là: A_4, D_6 và $C_3 \times_\theta C_4$, với $\theta : C_4 \to Aut(C_3)$ là đồng cấu không tầm thường.

2.2.2. Xây dựng và phân loại các nhóm cấp 2p, với p là một số nguyên tố lẻ

Trước hết ta xét một trường hợp riêng, là phân loại đẳng cấu các nhóm cấp 6 (6 = 2 . 3)

Mệnh đề 3.

Có duy nhất hai nhóm cấp *6* (không đẳng cấu nhau) là C_6 và D_3.

Tổng quát mệnh đề trên, ta có

Định lý 9.

Cho *p* là một số nguyên tố lẻ. Khi đó mọi nhóm có cấp *2p* hoặc đẳng cấu với nhóm cyclic cấp $2p$ hoặc đẳng cấu với nhóm dehidral D_p.

2.2.3. Xây dựng và phân loại các nhóm không giao hoán cấp p^3, với p là một số nguyên tố lẻ

Bổ đề 3.

Giả sử G là một nhóm không aben cấp p^3. Khi đó

$$[G, G] = Z(G) \cong C_p.$$

Mệnh đề 4.

Giả sử G là một nhóm cấp p^3, với p là một số nguyên tố lẻ. Khi đó

i) Ánh xạ $\phi: G \to G$, với $\phi(g) = g^p$, $\forall g \in G$, là một đồng cấu, và $\phi(G) \subset Z(G)$

ii) Hoặc $Ker\,\phi$ có cấp p^3, hoặc $Ker\,\phi$ có cấp p^2 và G chứa một phần tử cấp p^2.

Mệnh đề 5.

Cho G là một nhóm không aben cấp p^3, với p là một số nguyên tố lẻ. Khi đó G chứa một nhóm con chuẩn tắc H cấp p^2 và một nhóm con K cấp p sao cho $H \cap K = \{1\}$.

Hệ quả.

Nếu G là một nhóm không aben cấp p^3, với p là một số nguyên tố lẻ, thì G là tích nửa trực tiếp của một nhóm con chuẩn tắc H cấp p^2 với một nhóm con K cấp p.

Định lý 10.

Nếu p là một số nguyên tố lẻ, thì chỉ có hai nhóm không aben cấp p^3 (sai khác một đẳng cấu).

Minh họa về nhóm E_{p^3} ***và*** M_{p^3} **.** [13]

i) Ký hiệu $E_{p^3} = \left\{ \begin{pmatrix} 1+pm & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ / \ m, b \in Z_{p^2} \right\}$

Đặt $x = \begin{pmatrix} 1+p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, và $y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Khi đó $\begin{pmatrix} 1+pm & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = y^b x^m$, $[x, y] = x^p$, $x^{p^2} = 1$ và $y^p = 1$

Suy ra E_{p^3} là nhóm không giao hoán có cấp p^3 và được biểu diễn

$$E_{p^3} = < x, y / \ x^{p^2} = 1, \ y^p = 1, \ yxy^{-1} = x^{p+1} > .$$

ii) Ký hiệu $M_{p^3} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ / \ a, b, c \in Z_p \right\}$

Dễ dàng kiểm tra được tập M_{p^3} cùng với phép nhân hai ma trận là một nhóm.

Đặt $x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ và $y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Khi đó $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = y^c x^a [x, y]^b$, $[x, y] = z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

và $x^p = y^p = z^p = 1$, $[x, z] = [y, z] = 1$

Suy ra M_{p^3} là nhóm không giao hoán, cấp p^3 và được biểu diễn

$$M_{p^3} = < x, y, z \ / \ x^p = y^p = z^p = 1, \ xz = zx, \ yz = zy, \ y^{-1}xy = xz > .$$

Nhận xét 3.

Với *H* là một nhóm con cấp *4* bất kỳ của nhóm quarternion Q_8. Do trong Q_8 có duy nhất một phần tử cấp *2*, và phần tử này thuộc *H*, nên không tồn tại nhóm con *K* cấp *2* nào của Q_8 mà $H \cap K = \varnothing$. Do đó khi $p = 2$, Mệnh đề *5* không đúng, nghĩa là nhóm Q_8 không phải là tích nửa trực tiếp của hai nhóm con thực sự của nó.

KẾT LUẬN

Luận văn "Tích nửa trực tiếp và ứng dụng" thực hiện được mục đích đã đề ra, cụ thể là các vấn đề sau:

1) Tìm hiểu và trình bày lại tích nửa trực tiếp của hai nhóm cũng như ví dụ minh họa.

2) Xây dựng và phân loại đẳng cấu một số lớp nhóm như:

- Các nhóm không giao hoán cấp *12*.
- Các nhóm có cấp $2p$, với p là một số nguyên tố lẻ.
- Các nhóm không giao hoán có cấp p^3, với p là một số nguyên tố lẻ.

Hy vọng rằng trong thời gian tới, nội dung của luận văn sẽ tiếp tục được bổ sung và hoàn thiện hơn, nhằm khẳng định tầm quan trọng và tính hiệu quả của tích nửa trực tiếp đối với bài toán xác định và phân loại nhóm hữu hạn.