BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

PHẠM THỊ MINH QUYÊN

MỘT SỐ DẠNG BÀI TOÁN ĐẠI SỐ TỔ HỢP VÀ XÁC SUẤT TRONG CHƯƠNG TRÌNH TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp

Mã số: 60.46.01.13

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Đà Nẵng – Năm 2016

Công trình được hoàn thành tại

ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TS. TRẦN ĐẠO DÕNG

Phản biện 1: TS. Lê Hải Trung

Phản biện 2: GS.TS. Lê Văn Thuyết

Luận văn đã được bảo vệ tại Hội đồng chấm Luận văn tốt nghiệp thạc sĩ Khoa học chuyên ngành Phương pháp Toán sơ cấp tại Đại học Đà Nẵng vào ngày 13 tháng 8 năm 2016.

Tìm hiểu luận văn tại:

Trung tâm Thông tin-Học liệu, Đại học Đà Nẵng

Thư viện trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà nẵng

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Toán đại số tổ hợp và xác suất là một trong các nội dung quan trọng của toán học có nhiều ứng dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực khoa học, công nghệ, kinh tế…. Do vậy đại số tổ hợp và xác suất đã được đưa vào chương trình toán từ lớp 11 nhằm cung cấp cho học sinh bậc phổ thông trung học những kiến thức cơ bản quan trọng liên quan đến lĩnh vực này.

Trong thực tế giảng dạy tôi nhận thấy đối với đa số học sinh việc tiếp thu kiến thức về đại số tổ hợp và xác suất là rất khó khăn. Sách giáo khoa đổi mới trình bày phần kiến thức này khá đầy đủ và dể hiểu, tuy nhiên học sinh làm bài lại không đạt yêu cầu do các em thường áp dụng máy móc, nếu gặp bài toán lạ hoặc thay đổi đề bài giữ nguyên dạng toán thì học sinh không biết cách xử lý.

Một trong các nguyên nhân là do học sinh chưa nắm bắt kiến thức, phân loại bài toán để giải quyết nên kết quả học tập không cao, kiến thức dễ quên. Để hiểu sâu, biết vận dụng linh hoạt các kiến thức về đại số tổ hợp và xác suất vào giải quyết các bài toán, học sinh cần phải nắm vững các khái niệm, các công thức cơ bản, nhận dạng và phân loại các bài toán để tìm phương pháp giải thích hợp.

Với mong muốn được tìm hiểu thêm về chủ đề đại số tổ hợp và xác suất cùng các phương pháp giải tương ứng thể hiện trong chương trình toán bậc trung học phổ thông nhằm góp phần nâng cao chất lượng dạy học của bản thân và được sự gợi ý của giáo viên hướng dẫn, tôi đã chọn đề tài “***Một số dạng bài toán đại số tổ hợp và xác suất trong chương trình trung học phổ thông***” làm đề tài cho luận văn Thạc sĩ của mình.

2. Mục tiêu và nội dung nghiên cứu của đề tài

Mục tiêu của đề tài nhằm nghiên cứu, tìm hiểu và nhận dạng các bài toán đại số tổ hợp và xác suất trong chương trình phổ thông trung học, từ đó thể hiện phương pháp giải tương ứng qua một số chủ đề cụ thể.

Trong mỗi dạng bài toán sẽ đưa vào các ví dụ minh họa và phương pháp giải tương ứng.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu:

Đối tượng nghiên cứu của đề tài là các dạng bài toán về đại số tổ hợp và xác suất.

Phạm vi nghiên cứu của đề tài là các phương pháp giải toán thích hợp cho các dạng bài toán đại số tổ hợp và xác suất trong chương trình phổ thông trung học.

4. Phương pháp nghiên cứu:

- Thu thập, tổng hợp các tài liệu liên quan đến nội dung đề tài luận văn.
- Phân tích, nghiên cứu các tài liệu thu thập được để thực hiện đề tài.
- Tham gia các buổi seminar của thầy hướng dẫn để trao đổi các kết quả đang nghiên cứu.

5. Cấu trúc của luận văn:

Mở đầu

Chương 1. Các kiến thức cơ bản về đại số tổ hợp và xác suất

Chương 2. Các dạng bài toán thường gặp và phương pháp giải.

CHƯƠNG 1
CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN VỀ ĐẠI SỐ TỔ HỢP VÀ XÁC SUẤT

Chương này nhắc lại một số kiến thức cơ bản về tập hợp, quy tắc cộng, quy tắc nhân, hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp, Nhị thức Newton, biến cố, xác suất của biến cố, các quy tắc tính xác suất, biến ngẫu nhiên rời rạc, ... nhằm làm cơ sở cho chương tiếp theo.

1.1. NHẮC LẠI VỀ TẬP HỢP

1.2. QUY TẮC CỘNG VÀ QUY TẮC NHÂN

1.3. HOÁN VỊ, CHỈNH HỢP, TỔ HỢP

1.4. NHỊ THỨC NEWTON

1.5. BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

1.6. CÁC QUY TẮC TÍNH XÁC SUẤT

1.7. BIẾN NGẪU NHIÊN RỜI RẠC

CHƯƠNG 2
CÁC DẠNG BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Trong chương này, tôi trình bày phương pháp giải và ví dụ minh họa một số bài toán như: Tìm số tổ hợp; chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức tổ hợp; giải phương trình, bất phương trình, hệ phương trình đại số tổ hợp; bài toán ứng dụng nhị thức Newton; bài toán tính xác suất của một biến cố... Các bài toán này thường gặp trong các đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng,... Phần kiến thức trình bày trong chương được tham khảo ở các tài liệu [1], [6], [7], [8], [9], [10] , [11] , [12] , [13] , [14] , [15] ,[16], [17] , [18] , [19] , [20] , [21].

2.1. BÀI TOÁN TÌM SỐ TỔ HỢP

Ứng dụng đặt trưng của các công thức tổ hợp là đếm số phương án. Nhờ các công thức này mà việc đếm số phương án trở nên đơn giản và chính xác. Tùy theo mỗi bài toán khác nhau mà ta đưa ra phương pháp giải cho phù hợp, ngắn gọn, dễ hiểu,...Đa số các bài toán dạng này đều đưa về hai phương pháp giải như sau:

Phương pháp tính trực tiếp:

- Dựa vào yêu cầu và số liệu của đề bài. Chia bài toán ra các trường hợp (nếu có), trong mỗi trường hợp lại phân thành các giai đoạn (nếu có).

- Xem xét mỗi trường hợp cụ thể, mỗi giai đoạn cụ thể ta có thể sử dụng quy tắc cộng, quy tắc nhân, hoán vị, chỉnh hợp hoặc tổ hợp.

- Đáp án là tổng kết quả của các trường hợp trên.

Phương pháp loại trừ: *Đối với nhiều bài toán, phương pháp trực tiếp rất dài. Ta sử dụng phương pháp loại trừ (phần bù) theo phép toán :*

$$A \cup \overline{A} = X \Rightarrow A = X \setminus \overline{A}.$$

- Chia yêu cầu của đề thành 2 phần là yêu cầu chung X và yêu cầu riêng A. Xét $\overline{A}$ là phủ định của A, nghĩa là không thỏa yêu cầu.

- Tính số $|X|$ và $|\overline{A}|$. Đáp án là $|X|$ - $|\overline{A}|$.

Ta có thể xét một số ví dụ cụ thể liên quan đến việc vận dụng công thức tổ hợp vào một trong hai phương pháp trên như sau:

2.1.1. Bài toán lập số tự nhiên

Phương pháp: Có nhiều phương pháp giải trong đó phương pháp giải thông thường nhất:

- Gọi số cần tìm là: n = $\overline{a_1 a_2 .... a_n}$.

- Liệt kê các tính chất của số n thỏa mãn yêu cầu.

- Dựa vào tính chất xem bài toán có chia trường hợp không.

- Đếm các chữ số theo thứ tự như sau:

+ Đếm các chữ số có mặt trong tính chất.

+ Đếm chữ số đầu tiên (nếu chưa đếm), lưu ý chữ số 0 không được đứng đầu tiên.

+ Đếm các chữ số còn lại.

- Sử dụng quy tắc cộng, quy tắc nhân, chỉnh hợp, hoán vị, tổ hợp...

**** Bài toán lập số tự nhiên (không có chữ số 0)***

Ví dụ 2.1. (ĐH khối A 2005).

Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên, mỗi số gồm 6 chữ số khác nhau và tổng các chữ số hàng chục, hàng trăm, hàng ngàn bằng 8.

Ví dụ 2.2. (ĐH khối B 2005).

Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên, mỗi số gồm 5 chữ số khác nhau và nhất thiết phải có 2 chữ số 1, 5.

Ví dụ 2.3. (ĐH Ngoại thương TPHCM khối A 2001).

Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể thiết lập được bao nhiêu số có 6 chữ số khác nhau mà hai chữ số 1 và 6 không đứng cạnh nhau?

**** Bài toán lập số tự nhiên (có chữ số 0)***

Ví dụ 2.4. (ĐH Giao thông vận tải 2001).

Cho 8 chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Hỏi có thể lập được bao nhiêu số gồm 6 chữ số khác nhau, trong đó nhất thiết phải có mặt chữ số 4.

Ví dụ 2.5.(ĐH Huế khối ABV 2001).

Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số sao cho không có chữ số nào lặp lại đúng 3 lần?

2.1.3. Bài toán sắp xếp các phần tử từ các tập hợp.

Đặc trưng của bài toán: Sắp xếp một tập hợp gồm có n phần tử khác nhau vào n chỗ, mỗi hoán vị n phần tử đó ta được một cách sắp *xếp mới.*

Phương pháp:

- Chọn các phần tử ra trước cho đủ số lượng và thỏa mãn tính chất mà bài toán yêu cầu.

- Phân chia trường hợp, giai đoạn (nếu có).

- Tính số cách sắp xếp bằng cách áp dụng công thức tổ hợp, chỉnh hợp, hoán vị...

Tôi xin minh họa giải bài toán chọn các phần tử từ các tập hợp qua một số ví dụ sau:

Ví dụ 2.8. (ĐH Cần Thơ 2001).

Một nhóm gồm 10 học sinh, trong đó có 7 nam và 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp 10 học sinh trên thành một hàng dài sao cho 7 học sinh nam đứng liền nhau..

Ví dụ 2.9. (ĐH Nông nghiệp I HN khối A 2001).

Có 6 học sinh nam và 3 học sinh nữ xếp thành một hàng dọc. Hỏi có bao nhiêu cách xếp để có đúng 2 học sinh nam đứng xen kẽ 3 học sinh nữ. (Khi đổi chỗ 2 học sinh bất kì cho nhau ta được một cách xếp mới).

Ví dụ 2.10. (ĐH Hàng hải 1999).

Có bao nhiêu cách sắp xếp năm bạn học sinh A, B, C, D, E vào một chiếc ghế dài sao cho:

a. Bạn C ngồi chính giữa.

b. Hai bạn A và E ngồi ở hai đầu ghế.

**** Bài toán sắp xếp n vật trong đó có m vật giống nhau (m < n):***

Có tất cả n vật trong đó có m vật giống nhau loại A; k vật giống nhau loại B;..., (m+k+⋯<n); các vật còn lại đôi một khác nhau; thì số cách xếp chúng thành một hàng ngang là $\frac{n!}{k!m!...}$*. Cụ thể qua các ví dụ sau:*

Ví dụ 2.11. Có 5 viên bi xanh giống nhau, 4 viên bi trắng giống nhau và 3 viên bi đỏ đôi một khác nhau. Có bao nhiêu cách sắp xếp số bi trên vào 12 ô theo một hàng ngang sao cho mỗi ô có một viên bi?

**** Bài toán sắp xếp theo bàn tròn:***

Ví dụ 2.12. Xếp ngẫu nhiên 5 người vào một bàn 5 chỗ. Tính số cách sắp xếp sao cho:

a. A và B ngồi cạnh nhau ở bàn tròn có đánh số.

b. A và B ngồi cạnh nhau ở bàn tròn không đánh số.

Ví dụ 2.13. Có bao nhiêu cách xếp vị trí cho 5 học sinh nam và 3 học sinh nữ quanh một bàn tròn sao cho không có hai học sinh nữ nào cạnh nhau? hai cách xếp khác nhau về vị trí nhưng có cùng thứ tự như đối với các học sinh trên được coi là một.

Ví dụ 2.14. Tìm số cách sắp xếp n cặp vợ chồng ngồi quanh một bàn tròn sao cho:

a. Đàn ông và đàn bà ngồi xen kẽ.

b. Mỗi người đàn bà ngồi bên cạnh chồng mình.

2.1.4. Bài toán phân chia các phần tử từ các tập hợp.

Đặc trưng của bài toán là phân chia một tập hợp n phần tử khác nhau thành k nhóm, mỗi nhóm gồm n_i phần tử. Việc chọn n_i phần tử trong n phần tử là phép chọn và loại trừ dần các phần tử đã chọn. ***Phương pháp:***

- Chọn các phần tử có tính chất thỏa mãn đề bài để chia cho mỗi nhóm (chia cho đến nhóm thứ k-1, nhóm thứ k là tất cả các phần tử còn lại).

- Phân chia trường hợp, giai đoạn (nếu có).

- Áp dụng các quy tắc cộng, quy tắc nhân, …

Ví dụ 2.15: (HV Kỹ thuật quân sự 2001).

Một đồn cảnh sát khu vực có 9 người, trong ngày cần cử 3 người làm nhiệm vụ ở điểm A, 2 người làm nhiệm vụ ở điểm B, 4 người làm nhiệm vụ ở điểm C. Hỏi có bao nhiêu cách phân công nhiệm vụ.

Ví dụ 2.16. (ĐH khối B 2005).

Một đội thanh niên tình nguyện có 15 người, gồm 12 nam và 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách phân công đội thanh niên tình nguyện đó về giúp đỡ 3 tỉnh miền núi, sao cho mỗi tỉnh có 4 nam và 1 nữ.

**** Phương pháp tạo vách ngăn:***

- *Xếp m vật giống nhau vào m vị trí theo hàng ngang giữa chúng sẽ tạo ra m-1 chỗ trống.*
- *Đặt bất kỳ n-1 vạch vào m-1 chỗ trống ta sẽ được n nhóm khác nhau, mỗi nhóm có ít nhất 1 vật.*
- *Số cách chia m vật giống nhau thành n nhóm thỏa mỗi nhóm có ít nhất 1 vật là:* C_{m-1}^{n-1}.

Ví dụ 2.17. Có bao nhiêu cách phân chia 100 đồ vật giống nhau cho 4 người sao cho mỗi người được ít nhất một đồ vật.

Ví dụ 2.18. Có bao nhiêu cách chia 10 viên kẹo đỏ giống nhau cho 3 em bé, mỗi em có ít nhất 1 viên.

2.2. BÀI TOÁN CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC, BẤT ĐẲNG THỨC TỔ HỢP

Trong phần này tùy thuộc vào các bài toán cụ thể mà ta lựa chọn cách giải phù hợp như:

- Sử dụng các công thức quan hệ giữa các đại lượng tổ hợp.
- Sử dụng các đẳng thức, bất đẳng thức đã học.
- Sử dụng quy nạp toán học.
- Sử dụng tính đơn điệu của hàm số.

Phương pháp:

- *Sử dụng các công thức tổ hợp đưa đẳng thức, bất đẳng thức đại số tổ hợp thành đẳng thức, bất đẳng thức đại số thông thường.*

- *Chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức đại số thông thường suy ra điều phải chứng minh.*

2.2.1. Bài toán chứng minh đẳng thức tổ hợp:

Ví dụ 2.19. (ĐH khối D 2003).

Tìm số tự nhiên n thoả mãn: $C_n^2C_n^{n-2}+2C_n^2C_n^3+C_n^3C_n^{n-3}=100.$

Ví dụ 2.20. (CĐ Khí tượng thuỷ văn khối A 2003).

Tìm số nguyên dương n thoả mãn đẳng thức: $\mathrm{A}_n^3+2C_n^2=16n.$

Ví dụ 2.21.

Chứng minh rằng: Với n, k $\in\mathbb{N}$, $3\le k\le n$ ta có:

$\mathrm{A}_{n+k}^{n+2}+\mathrm{A}_{n+k}^{n+1}=k^2\mathrm{A}_{n+k}^{n}$. …..

2.2.1. Bài toán chứng minh bất đẳng thức tổ hợp:

Ví dụ 2.22. (CĐ Giao thông II 2003).

Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ≥ 2, ta đều có:

$$C_n^0C_n^1.....C_n^n\le\left(\frac{2^n-2}{n-1}\right)^{n-1}.$$

Ví dụ 2.23. Chứng minh rằng:

$$n^n<(1.2...n)^2<\left(\frac{n+1}{2}\right)^{2n},\ \text{với}\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ n>2.$$

Ví dụ 2.24. Chứng minh rằng: $n!>2^{n-1},n\in\mathbb{Z},n\ge 3$

Ví dụ 2.25: Chứng minh:

$$C_{2n+k}^nC_{2n-k}^n\le(C_{2n}^n)^2\ (\text{với}\ 0\le k\le n;\mathrm{n,k}\in\mathbb{N}^*).$$

2.3. BÀI TOÁN GIẢI PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH, HỆ ĐẠI SỐ TỔ HỢP

Phương pháp:

- *Đặt điều kiện bài toán.*

- Vận dụng các công thức liên quan đến đại số tổ hợp và rút gọn chúng.

- Đưa về phương trình, bất phương trình, hệ đại số tổ hợp về các phương trình, bất phương trình, hệ phương trình, hệ bất phương trình cơ bản (đặt ẩn phụ nếu cần) . Giải tìm nghiệm và chọn nghiệm thích hợp.

- Kết luận nghiệm.

2.3.1. Bài toán giải phương trình

Ví dụ 2.26. Giải phương trình $\frac{1}{2}P_xC_{x+1}^3+30=3C_{x+1}^{x-2}+5P_x$.

Ví dụ 2.27. Giải phương trình: $C_4^x+C_5^x=C_6^x+\frac{2}{P_x}$.

Ví dụ 2.28. Giải phương trình: 2($C_x^2+C_x^3$) = $3x^2-5x$.

Ví dụ 2.29. Giải phương trình:

$$C_x^2C_x^{x-2}+2C_x^2C_x^3+C_x^3C_x^{x-3}=100.$$

2.3.2. Bài toán giải bất phương trình

Ví dụ 2.30. (ĐHBKHN-2000) .

Giải bất phương trình: $\frac{1}{2}A_{2x}^2-A_x^2\le\frac{6}{x}C_x^3+10$.

Ví dụ 2.31. (ĐH hàng hải 99).

Giải bất phương trình: $\frac{C_{x-1}^{x-3}}{A_{x+1}^4}>\frac{1}{14P_3}$.

2.3.3. Bài toán giải hệ đại số tổ hợp

Ví dụ 2.32.

Tìm x,y biết:

$$(A_{x-1}^y+yA_{x-1}^{y-1}):A_x^{y-1}:C_x^{y-1}=10:2:1.$$

Ví dụ 2.33. (ĐHBK HN 2001). Giải hệ $\begin{cases} 2A_x^y + 5C_x^y = 90 \\ 5A_x^y - 2C_x^y = 80 \end{cases}$

2.4. CÁC BÀI TOÁN ỨNG DỤNG NHỊ THỨC NEWTON

2.4.1. Bài toán tìm hệ số của số hạng chứa x^{α} trong khai triển nhị thức Newton

a. Bài toán tìm hệ số của số hạng chứa x^{α} trong khai triển nhị thức Newton

Phương pháp: *Tìm hệ số của số hạng chứa x^{α} (α là một số cho trước) trong khai triển nhị thức Newton của $p(x) = \left[f(x) \right]^n$ ta làm như sau:*

- Viết $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{g(k)}$, số hạng chứa x^{α} tương ứng với $g(k) = \alpha$; giải phương trình ta tìm được k .

- Nếu $k \in \mathbb{N}, k \le n$ thì hệ số phải tìm là a_k. Nếu $k \notin \mathbb{N}$ hoặc $k > n$ thì trong khai triển không có số hạng chứa x^{α} , hệ số phải tìm bằng 0.

Ví dụ 2.34. (Đề ĐH Khối A - 2003).

Tìm hệ số của số hạng chứa x^8 trong khai triển $\left(\frac{1}{x^3} + \sqrt{x^5} \right)^n$ biết rằng $C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^{n} = 7\left(n+3\right)$.

Ví dụ 2.35. (ĐH khối D năm 2007).

Tìm hệ số của x^5 trong khai triển $x\left(1-2x\right)^5 + x^2\left(1+3x\right)^{10}$.

Ví dụ 2.36. Tìm hệ số của một hạng tử chứa x^4 trong khai triển: $\left(1+2x+3x^2\right)^{10}$.

Lưu ý:

- Hệ số x^{α} *trong khai triển tổng đa thức* $p_1(x)+p_2(x)+...$ *là tổng các hệ số của số hạng chứa* x^{α}*. Hệ số* x^{α} *trong khai triển của tích* $p(x)q(x)...$ *là tổng các hệ số sau khi phân tích đầy đủ dạng* $x^{\alpha}=x^{\alpha}x^{0}=x^{\alpha-1}x^{1}=...=x^{0}x^{\alpha}$.

- Để tìm hệ số của số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức Newton của $p(x)=\left[f(x)\right]^{n}$ *ta viết* $p(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k x^{g(k)}$*, số hạng không chứa x tương ứng với* $g(k)=0$*. Giải phương trình* $g(k)=0$ *với điều kiện* $k\in N, k\le n$*, ta tìm được* k*. Thay k tìm được vào số hạng tổng quát để tìm hệ số của số hạng không chứa x.*

b. Bài toán tìm hệ số lớn nhất trong khai triển nhị thức Newton

Phương pháp:

- Khai triển $(\mathrm{ax}+b)^{m}$ *thành đa thức. Tìm hệ số của số hạng tổng quát.*

- Giải các bất phương trình $a_{k+1}<a_k$ *và* $a_{k+1}>a_k$*, hoặc* $a_{k-1}<a_k$ *và* $a_{k-1}>a_k$ *với ẩn k tìm nghiệm.*

Hoặc giả sử a_k *là hệ số lớn nhất, xét hệ* $\begin{cases} a_k>a_{k+1} \\ a_k>a_{k-1} \end{cases}$ *giải tìm nghiệm k.*

- Chọn số tự nhiên $k\le m$ *thỏa mãn* a_k *là hệ số lớn nhất phải tìm.*

Ví dụ 2.37. (ĐH khối A năm 2008).

Cho khai triển $(1+2x)^{n}=a_0+a_1x+a_2x^{2}+...+a_nx^{n}$, trong đó $n\in N^{*}$.Tìm số lớn nhất trong các số $a_0,a_1,a_2,...,a_n$ biết các hệ số $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ thỏa mãn hệ thức $a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + ... + \frac{a_n}{2^n} = 4096.$

Ví dụ 2.38. (ĐHSP HN khối A 2001).

Trong khai triển của $\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x\right)^{10}$ thành đa thức: $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_9x^9 + a_{10}x^{10}$ ($a_k \in R$). Hãy tìm hệ số a_k lớn nhất ($0 \le k \le 10$).

Ví dụ 2.39. Xét khai triển

$$\left(x+2\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k 2^{n-k} = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n.$$

Tìm n để $max\left\{a_0, a_1, a_2, ..., a_n\right\} = a_{10}.$

2.4.2. Áp dụng nhị thức Newton để chứng minh một số hệ thức, tính tổng tổ hợp

a. Sử dụng công thức khai triển nhị thức Newton, các công thức tổ hợp, các tính chất của tổ hợp

Phương pháp.

- *Áp dụng công thức nhị thức Newton:*

$$(a+b)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b + ...C_n^ka^{n-k}b^k + ... + C_n^nb^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^ka^{n-k}b^k$$

$(k \le n; k, n \in \mathbb{N}^*)$

- *Sử dụng các phép biến đổi đại số, ...*
- *Vận dụng các công thức tổ hợp*
- *Dựa vào điều kiện bài toán thay a,b bởi một giá trị cụ thể.*

Tùy vào mỗi bài toán ta có thể thực hiện thứ tự các bước biến đổi cho phù hợp.

Ví dụ 2.40. (CĐ Xây dựng số 2- 2006).

Chứng minh:

$$C_n^0 3^n - C_n^1 3^{n-1} + ... + (-1)C_n^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n.$$

Ví dụ 2.41. (ĐH Hàng Hải-2000).

Chứng minh rằng:

$$C_{2n}^0 + 3^2 C_{2n}^2 + 3^4 C_{2n}^4 + ... + 3^{2n} C_{2n}^{2n} = 2^{2n-1}\left(2^{2n} + 1\right).$$

** Ngoài các ví dụ chỉ áp dụng nhị thức Newton ta còn có thể kết hợp sử dụng nhị thức Newton kết hợp với sử dụng các công thức khác có liên quan đại số tổ hợp để giải bài toán.*

+ Bài toán áp dụng công thức : $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$ **(*)**

Ví dụ 2.42. (ĐH khối A-2005).

Tìm số nguyên dương n sao cho:

$$C_{2n+1}^1 - 2.2C_{2n+1}^2 + 3.2^2.C_{2n+1}^3 - 4.2^3 C_{2n+1}^4 + ... + (2n+1).2^{2n}.C_{2n+1}^{2n+1} = 2005.$$

Ví dụ 2.43. (ĐH Bách khoa HN-1999).

Chứng minh đẳng thức sau:

$$1C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - ... + (-1)^{n-1} nC_n^n = 0$$

+ Bài toán áp dụng công thức :

$$(k+1)C_{n+1}^{k+1} = (n+1)C_n^k \text{ hoặc } \frac{1}{k+1}C_n^k = \frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}. \ (k \le n; k, n \in \mathbb{N}^*).$$

Ví dụ 2.44. (ĐHGTVT 2000).

Cho n là số tự nhiên $n \ge 1$. Chứng minh đẳng thức sau:

$$C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \frac{1}{4}C_n^3 + ... + \frac{1}{n}C_n^{n-1} + \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

Ví dụ 2.45. (ĐH khối A-2007)

Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2}C_{2n}^1 + \frac{1}{4}C_{2n}^3 + \frac{1}{6}C_{2n}^5 + ... + \frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1} = \frac{2^{2n}-1}{2n+1}.$$

Trong trường hợp nếu số hạng tổng quát của tổng chưa có dạng đó thì cần biến đổi trước khi áp dụng tính chất (**). *Ta xét ví dụ sau:*

Ví dụ 2.46.

Tính tổng S= $\frac{1}{2}.C_{2n}^{0}+\frac{1}{4}.C_{2n}^{2}+\frac{1}{6}.C_{2n}^{4}+...+\frac{1}{2n+2}C_{2n}^{2n}$.

+ Bài toán áp dụng công thức:

$C_{n}^{k}=C_{n}^{n-k}\quad (0\le k\le n;k\in\mathbb{N},n\in\mathbb{N}^{*})$

Ví dụ 2.47. Chứng minh đẳng thức sau:

$C_{2n+1}^{0}+C_{2n+1}^{1}+C_{2n+1}^{2}+...+C_{2n+1}^{n}=2^{2n}\qquad (n\in N^{*})$

b. Ứng dụng đạo hàm cấp 1

Phương pháp :

- Khi hệ số đứng trước tổ hợp tăng dần hoặc giảm dần từ 1,2,3,...,n hay n,...,3,2,1 tức là số hạng đó có dạng kC_{n}^{k} *hoặc* $kC_{n}^{k}a^{n-k}b^{k-1}$ *thì ta có thể dùng đạo hàm cấp 1 để tính.*

- Xét đa thức:

$\left(a+x\right)^{n}=C_{n}^{0}a^{n}+C_{n}^{1}a^{n-1}x+...+C_{n}^{n-1}ax^{n-1}+C_{n}^{n}x^{n}.$

- Lấy đạo hàm hai vế theo x ta được:

$n\left(a+x\right)^{n-1}=C_{n}^{1}a^{n-1}+....+(n-1)C_{n}^{n-1}a\ x^{n-2}+nC_{n}^{n}x^{n-1}.$

- Thay a, x bằng hằng số thích hợp ta giải quyết được bài toán.

Ví dụ 2.48. (Đề tuyển sinh đại học A -2005)

Tìm số nguyên dương n sao cho :

$C_{2n+1}^{1}-2.2C_{2n+1}^{2}+3.2^{2}C_{2n+1}^{3}-4.2^{3}C_{2n+1}^{4}+...+(2n+1)2^{2n}C_{2n+1}^{2n+1}=2005.$

Ví dụ 2.49. (CĐ Cộng đồng Tiền Giang 2003).

Hãy khai triển nhị thức Newton $(1-x)^{2n}$, với n là số nguyên dương. Từ đó chứng minh rằng:

$1C_{2n}^{1}+3C_{2n}^{3}+...+(2n-1)C_{2n}^{2n-1}=2C_{2n}^{2}+4C_{2n}^{4}+2nC_{2n}^{2n}$.

<u>Lưu ý</u>: Cũng có những bài toán ta phải nhân thêm với một biểu thức của x hoặc tách ra thành tổng 2 biểu thức hoặc nhân chia, cộng, trừ với một biểu thức khác, ...rồi mới lấy đạo hàm hai vế hoặc ngược lại.

Ví dụ 2.50. Tính tổng: $2008C_{2007}^{0}+2007C_{2007}^{1}+...+C_{2007}^{2007}$.

Ví dụ 2.51.

Tính tổng: $S=4C_{2014}^{2}+8C_{2014}^{4}+12C_{2014}^{6}+...+4028C_{2014}^{2014}$.

c. Ứng dụng đạo hàm cấp 2

Phương pháp:

- Khi hệ số đứng trước tổ hợp có dạng 1.2,2.3,...,(n-1)n hay (n-1) n,...,3.2,2.1 hay $1^2,2^2,...,n^2$ (không kể dấu) tức có dạng tổng quát hơn $k\left(k-1\right)C_n^k a^{n-k}b^k$ thì ta có thể dùng đạo hàm đến cấp 2 để tính.

- Xét đa thức $\left(a+bx\right)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}bx+...+C_n^nb^nx^n$.

Khi đó đạo hàm hai vế theo x ta được:

$$bn\left(a+bx\right)^{n-1}=C_n^1a^{n-1}b+2C_n^2a^{n-2}b^2x...+nC_n^nb^nx^{n-1}.$$

Đạo hàm lần nữa:

$$b^2n\left(n-1\right)\left(a+bx\right)^{n-2}=2.1C_n^2a^{n-2}b^2+...+n\left(n-1\right)C_n^nb^nx^{n-2}.$$

- Thay a, b, x bởi các hằng số thích ta giải quyết được bài toán.

Ví dụ 2.52. (ĐH AN-CS Khối A 1998)

Cho $f\left(x\right)=\left(1+x\right)^n,\left(2\le n\in\mathbb{N}^*\right)$.

a. Tính $f''\left(1\right)$.

b. Chứng minh rằng:

$$2.1C_n^2+3.2C_n^3+...+\left(n-1\right)nC_n^n=n\left(n-1\right)2^{n-2}.$$

Ví dụ 2.53. Chứng minh:

$$1.C_n^1+2^2C_n^2+3^2C_n^3+...+n^2C_n^n=(n^2+n).2^{n-2},\ n\in\mathbb{N}^*.$$

d. Ứng dụng tích phân

Phương pháp: *Nếu trong tổng dãy tổ hợp, các số hạng chứa các phân số* $1;\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4};...;\frac{1}{n};...$ *và mẫu số được xếp theo thứ tự tăng hoặc giảm đều theo một quy luật nào đó, ta nghĩ đến việc sử dụng tích phân. Khi đó, ta thực hiện theo các bước sau:*

- *Tìm hàm để tính tích phân với các cận thích hợp.*
- *Lấy tích phân cả hai vế: vế chưa khai triển nhị thức Newton và vế đã khai triển.*
- *Cho hai kết quả bằng nhau và kết luận.*

Lưu ý: Căn cứ vào đẳng thức hay bất đẳng thức cần chứng minh để chọn tích phân hai vế của khai triển nhị thức Niu tơn $(a+b)^n$ *theo a hay b rồi thay giá trị của a, b cho phù hợp.*

Ví dụ 2.54. (ĐHGTVT 2000).

Cho n là số tự nhiên $n \geq 1$. Chứng minh đẳng thức sau:

$$C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \frac{1}{4}C_n^3 + ... + \frac{1}{n}C_n^{n-1} + \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

Ví dụ 2.55. (ĐH Khối B-2003)

Cho $n \in N^*$. Tính tổng:

$$S = C_n^0 + \frac{2^2-1}{2}C_n^1 + \frac{2^3-1}{3}C_n^2 + ... + \frac{2^{n+1}-1}{n+1}C_n^n.$$

- Trong một số bài toán ta cần phải nhân thêm x, x^2,...hoặc ta cần kết hợp giữa đạo hàm và tích phân như trong ví dụ sau.

Ví dụ 2.56. Tính $S = \frac{1}{2}C_n^0 + \frac{1}{3}C_n^1 + \frac{1}{4}C_n^2 + ... + \frac{1}{n+2}C_n^n$.

Ví dụ 2.57. Chứng minh đẳng thức sau:

$$C_n^1 + 3C_n^2 + 7C_n^3 + ... + (2^n-1)C_n^n = 3^n - 2^n \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

e. Sử dụng số phức

Ta dùng số phức để tính tổng của các C_n^k khi tổng này có hai đặc điểm:

+ Các dấu trong tổng xen kẽ đều nhau.

+ k luôn lẻ hoặc luôn chẵn.

Phương pháp:

- Khai triển $(1 + x)^n$, cho x nhận giá trị là những số phức thích hợp (thường ta chọn là x = i). So sánh phần thực và phần ảo của cùng một số phức trong hai cách tính.

- Khai triển trực tiếp các số phức theo dạng lượng giác của số phức hoặc áp dụng công thức Moivre. Sau đó so sánh phần thực và phần ảo của cùng một số phức trong hai cách tính.

+ Áp dụng dạng lượng giác của số phức:

Ví dụ 2.58. Tính tổng sau:

S = $C_{2009}^0 - C_{2009}^2 + C_{2009}^4 - ... - C_{2009}^{2006} + C_{2009}^{2008}$.

B = $C_{2009}^1 - C_{2009}^3 + C_{2009}^5 - ... - C_{2009}^{2007} + C_{2009}^{2009}$.

Ví dụ 2.59. Chứng minh đẳng thức:

$C_{2013}^1 - C_{2013}^3 + C_{2013}^5 - ... + C_{2013}^{2013} = -2^{1006}$.

+ Áp dụng công thức Moivre:

Ví dụ 2.60. Tính các tổng sau:

S = $C_{19}^0 - C_{19}^2 + C_{19}^4 - ... + C_{19}^{16} - C_{19}^{18}$.

Ví dụ 2.61. Tính tổng

S= $2.3C_{20}^2 - 4.3^2C_{20}^4 + 6.3^3C_{20}^6 - ... + 18.3^9C_{20}^{18} - 20.3^{10}C_{20}^{20}$.

2.5. TÍNH XÁC SUẤT CỦA MỘT BIẾN CỐ

2.5.1. Tính xác suất của một biến cố theo định nghĩa cổ điển.

Phương pháp:

- Để tính xác suất P(A) của một biến cố A ta thực hiện các bước sau:

- *Xác định không gian mẫu Ω, rồi tính số phần tử n(Ω) của Ω.*

- *Xác định tập con mô tả biến cố A, rồi tính số phần tử n(A) của tập hợp A.*

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}.$$

Ví dụ 2.62. Một túi đựng 4 quả cầu đỏ, 6 quả cầu xanh. Chọn ngẫu nhiên 4 quả cầu. Tính xác suất để trong 4 quả cầu đó có cả quả màu đỏ và màu xanh.

Ví dụ 2.63. (ĐH Đà Nẵng 1997).

Xét phép thử T: Gieo đồng thời hai con xúc sắc.

a. Tính xác suất để tổng số chấm trên mặt xuất hiện của hai con xúc sắc bằng 8.

b. Tìm xác suất để tổng số chấm trên mặt hai con xúc sắc là 1 số lẻ hoặc chia hết cho 3.

Ví dụ 2.64. Có 30 đề thi trong đó có 10 đề khó, 20 đề trung bình. Tìm xác suất để:

a) Một học sinh bắt một đề gặp được đề trung bình.

b) Một học sinh bắt hai đề, được ít nhất một đề trung bình.

2.5.2. Tính xác suất của một biến cố bằng quy tắc cộng, quy tắc nhân

a. Tính xác suất của một biến cố bằng quy tắc cộng

Phương pháp:

- Trong những bài toán mà các kết quả thuận lợi của biến cố A chia thành nhiều nhóm ta có thể coi biến cố A là biến cố hợp của các biến cố A_1 , ..., A_k. Sau đó sử dụng quy tắc cộng xác suất để tính xác suất của biến cố A.

- Sử dụng các quy tắc đếm và các công thức sau để tính xác suất của biến cố A, biến cố đối $\overline{A}$, biến cố hợp,...

Ví dụ 2.65. Một hộp đựng 3 quả cầu xanh, 4 quả cầu đỏ và 2 quả cầu vàng. Chọn ngẫu nhiên 2 quả cầu. Tính xác suất để chọn được 2 quả cầu cùng màu.

Ví dụ 2.66. Một hộp bóng đèn có 12 bóng, trong đó có 7 bóng tốt. Lấy ngẫu nhiên 3 bóng. Tính xác suất để trong 3 bóng lấy được có ít nhất 1 bóng tốt.

Ví dụ 2.67. Lớp có 100 Sinh viên, trong đó có 50 SV giỏi Anh Văn, 45 SV giỏi Pháp Văn, 10 SV giỏi cả hai ngoại ngữ. Chọn ngẫu nhiên một sinh viên trong lớp. Tính xác suất:

a) Sinh viên này giỏi ít nhất một ngoại ngữ.
b) Sinh viên này không giỏi ngoại ngữ nào hết.

b. Tính xác suất của một biến cố bằng quy tắc nhân:

Phương pháp:

Trong những bài toán mà các kết quả thuận lợi của biến cố A phải đồng thời thỏa mãn nhiều điều kiện ràng buộc khác nhau ta có thể coi biến cố A là biến cố giao của các biến cố A_1 , ..., A_n độc lập tương ứng. Sau đó sử dụng quy tắc nhân xác suất để tính xác suất của biến cố A.

Ví dụ 2.68. Có 2 hộp đựng các viên bi có cùng kích thước. Hộp thứ nhất đựng 2 viên màu đen và 3 viên màu trắng. Hộp thứ 2 đựng 3 viên màu đen và 4 viên màu trắng. Lấy ngẫu nhiên ở mỗi hộp 1 viên bi. Tính xác suất để 2 viên bi lấy ra đều màu trắng.

Ví dụ 2.69. Xạ thủ A bắn 2 viên đạn vào mục tiêu, xác suất bắn trúng của A trong một lần bắn là 0,7. Xạ thủ B bắn 3 viên đạn vào mục tiêu, xác suất bắn trúng của B trong một lần bắn là 0,9. Tính xác suất để mục tiêu không trúng đạn.

Ví dụ 2.70. Có 6 chính và 4 phế phẩm

Lần 1: Lấy ra 1sản phẩm: Nếu là chính phẩm thì bỏ chính phẩm vào và thêm 3 chính phẩm nữa. Nếu là phế phẩm thì bỏ vào thêm 1 phế phẩm.

Lần 2: Lấy ra 1 sản phẩm . Tìm xác suất để 2 sản phẩm lấy ra ở 2 lần đều chính phẩm.

Ví dụ 2.71. Trong một hộp có 12 bóng đèn, trong đó có 3 bóng hỏng. Lấy ngẫu nhiên lần lượt không hoàn lại ba bóng để dùng. Tính xác suất để:

a) Cả ba bóng đều hỏng.

b) Cả ba bóng đều không hỏng?

c) Có ít nhất một bóng không hỏng?

d) Chỉ có bóng thứ hai hỏng?

c. Sự kết hợp quy tắc cộng và quy tắc nhân trong bài toán xác suất

Trong công thức cộng xác suất lại xuất hiện xác suất của biến cố tích, nếu các biến cố xung khắc thì xác suất của biến cố tích bằng 0. Tuy nhiên nhiều trường hợp không có sự xung khắc thì ta phải áp dụng quy tắc nhân để tính xác suất của biến cố tích này. Vì vậy có những bài toán cần kết hợp quy tắc cộng và quy tắc nhân để tính xác suất của một biến cố nào đó.

Ví dụ 2.72. Có hai lớp 10A và 10 B mỗi lớp có 45 học sinh, số học sinh giỏi văn và số học sinh giỏi toán được cho trong bảng sau. Có một đoàn thanh tra. Hiệu trưởng nên mời vào lớp nào để khả năng gặp được một em giỏi ít nhất một môn là cao nhất ?

Lớp / Giỏi	10A	10B
Văn	25	25
Toán	30	30
Văn và Toán	20	10

Ví dụ 2.73. Xác suất bắn trúng đích của 1 người bắn cung là 0,2. Tính xác suất để trong 3 lần bắn độc lập.

a. Người đó chỉ bắn trúng đích 1 lần.

b. Người đó bắn trúng đích ít nhất 1 lần.

Ví dụ 2.74. Một chàng trai viết thư cho 3 cô gái, vì không chú tâm nên bỏ các thư vào phong bì một cách ngẫu nhiên. Tính xác suất để có ít nhất một cô nhận được đúng thư viết cho mình.

Ví dụ 2.75. Trong một kì thi. Thí sinh được phép thi 3 lần. Xác suất lần đầu vượt qua kì thi là 0,9. Nếu trượt lần đầu thì xác suất vượt qua kì thi lần hai là 0,7. Nếu trượt cả hai lần thì xác suất vượt qua kì thi ở lần thứ ba là 0,3. Tính xác suất để thí sinh thi đậu.

2.5.3. Lập bảng phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc

Phương pháp:

+ Xác định các giá trị có thể nhận của X $(x_1, x_2, ..., x_n)$.

+ Tính xác suất $p_i = P(\mathrm{X} = x_i)$*, trong đó* $\{X = x_i\}$ *là biến cố "X nhận giá trị* x_i*".*

+ Lập bảng phân phối xác suất .

Ví dụ 2.76. Gieo đồng xu sấp ngửa 3 lần liên tiếp. Lập bảng phân phối cho số lần xảy ra mặt sấp.

Ví dụ 2.77. Một sinh viên thi ba môn Toán, Lý, Hóa với xác suất đậu lần lượt là 0,6; 0,7; 0,8. Hãy lập bảng phân phối xác suất số môn anh ta đậu trong ba môn đó.

Ví dụ 2.78. Một lô hàng gồm 10 sản phẩm trong đó có 3 sản phẩm xấu. Chọn ngẫu nhiên cùng lúc 4 sản phẩn để kiểm tra. Gọi X là số sản phẩm xấu gặp phải khi kiểm tra. Lập bảng phân bố xác suất của x.

2.5.4. Xác định kỳ vọng, phương sai, độ lệch chuẩn của biến ngẫu nhiên rời rạc

***Phương pháp**: Để tính kỳ vọng, phương sai và độ lệch chuẩn của biến ngẫu nhiên rời rạc X ta dùng các công thức sau:*

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n.$$

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - \mu^2,$$

trong đó $\mu = E(X)$; $p_i = P(X = x_i), \forall i = \overline{1,n}$.

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Ví dụ 2.79. Một chiếc hộp đựng 10 tấm thẻ, trong đó có bốn thẻ ghi số 1, ba thẻ ghi số 2, hai thẻ ghi số 3 và một thẻ ghi số 4. Chọn ngẫu nhiên hai tấm thẻ rồi cộng hai số trên hai tấm thẻ với nhau. Gọi X là số thu được.

a) Lập bảng phân bố xác suất của X.

b) Tính kì vọng, phương sai và độ lệch chuẩn của X.

Ví dụ 2.80. Một người dùng chùm chìa khóa có 5 chìa (có 2 chìa mở được và 3 chìa không mở được) để mở cửa. Gọi X là lần mở cửa.

a) Lập bảng phân bố xác suất của X.

b) Tính kì vọng, phương sai và độ lệch chuẩn của X.

KẾT LUẬN

Luận văn “***Một số dạng bài toán đại số tổ hợp và xác suất trong chương trình phổ thông trung học***” đã thực hiện được mục tiêu và nhiệm vụ đề ra ; cụ thể luận văn đã đạt được các nội dung sau:

1. Tổng quan một số kiến thức cơ bản về đại số tổ hợp và xác suất: Tập hợp, quy tắc cộng, quy tắc nhân, hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp, Nhị thức Newton, biến cố, xác suất của biến cố, các quy tắc tính xác suất, biến ngẫu nhiên rời rạc, ...

2. Khảo sát một số dạng bài toán đại số tổ hợp và xác suất trong chương trình phổ thông trung học thường gặp trong các đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng... Đối với mỗi dạng bài toán, đều giới thiệu phương pháp giải chung và kèm theo nhiều ví dụ minh họa, bài toán tham khảo.

Các kết quả đạt được trong luận văn tuy còn khá khiêm tốn nhưng đã góp phần giúp bản thân tìm hiểu và làm rõ hơn một số vấn đề về các dạng bài toán đại số tổ hợp và xác suất trong chương trình phổ thông trung học, phục vụ tốt cho công tác giảng dạy. Mặc dù bản thân đã cố gắng rất nhiều trong quá trình làm luận văn, tuy nhiên do thời gian và năng lực còn hạn chế nên không tránh khỏi những thiếu sót trong luận văn này. Rất mong quý thầy cô và các bạn đọc góp ý để luận văn được hoàn thiện hơn.

Tôi xin chân thành cảm ơn!