BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

HOÀNG THỊ DIỆU HIỀN

PHƯƠNG PHÁP GIẢI VÀ SÁNG TẠO CÁC BÀI TOÁN TÌM GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 60.46.01.13

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Đà Nẵng – Năm 2016

Công trình được hoàn thành tại
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

Người hướng dẫn khoa học: TS. PHẠM QUÝ MƯỜI

Phản biện 1: TS. Nguyễn Duy Thái Sơn

Phản biện 2: PGS. TS. Huỳnh Thế Phùng

Luận văn đã được bảo vệ tại Hội đồng chấm Luận văn tốt nghiệp thạc sĩ Khoa học chuyên ngành Phương pháp Toán sơ cấp tại Đại học Đà Nẵng vào ngày 13 tháng 8 năm 2016.

Tìm hiểu luận văn tại:

- Trung tâm Thông tin-Học liệu, Đại học Đà Nẵng
- Thư viện trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Giới hạn là một đối tượng nghiên cứu trọng tâm của hàm số và là khái niệm cơ bản của giải tích toán học. Nó là cơ sở để xây dựng khái niệm hàm số liên tục, đạo hàm, tích phân,...Tóm lại, giới hạn hàm số là viên gạch để xây dựng nên chuyên ngành toán Giải tích.

Trong chương trình toán THPT, Giải tích chiếm thời lượng tương đối nhiều, trong đó phần giới hạn của hàm số chủ yếu nằm ở Học kỳ 2 của lớp 11 và một vài dạng toán liên quan ở lớp 12. Tuy nhiên, hầu hết học sinh đều lúng túng khi giải các dạng toán liên quan đến giới hạn của hàm số như cách khử các dạng vô định, cách xét tính liên tục của hàm số hoặc khi tính đạo hàm của hàm số bằng định nghĩa,... Các bài toán về giới hạn cũng được xem là một trong những dạng toán khó ở bậc THPT. Trong phạm vi giảng dạy cũng như bồi dưỡng học sinh giỏi cấp thành phố, tôi nhận thấy hầu hết học sinh đều thấy khó khăn trong việc nhận dạng và khử các dạng vô định khi giải các bài toán về giới hạn của hàm số. Bản thân giáo viên cũng hạn chế trong việc tự ra một số bài toán liên quan.

Hiện nay, tài liệu về giới hạn của hàm số dành cho học sinh và giáo viên THPT thì rất nhiều , tuy nhiên rất ít tác giả, tài liệu, giáo trình tiếng việt nghiên cứu và đề cập đến các phương pháp chuyên sâu cũng như các phương pháp sáng tạo các bài toán về giới hạn của hàm số. Là một giáo viên đang giảng dạy môn toán THPT, bản thân tự nhận thấy vai trò quan trọng của giới hạn hàm số trong giải tích, với mong muốn được tìm hiểu sâu sắc hơn về các phương pháp giải và sáng tạo các bài toán về giới hạn của hàm số, tôi quyết định chọn đề tài: **"PHƯƠNG PHÁP GIẢI VÀ SÁNG TẠO CÁC BÀI TOÁN TÌM GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ"** cho luận văn thạc sĩ của mình.

2. Mục đích và nhiệm vụ nghiên cứu

Nghiên cứu các phương pháp để giải các bài toán tìm giới hạn của hàm số. Đặc biệt, nghiên cứu các phương pháp sáng tạo ra các bài toán về giới hạn hàm số.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

* **Đối tượng nghiên cứu:** Các phương pháp khử các dạng vô định thường gặp.

* **Phạm vi nghiên cứu:** Các phương pháp giải bài toán giới hạn hàm số THPT và bồi dưỡng học sinh giỏi.

4. Phương pháp nghiên cứu

Với đề tài: **"PHƯƠNG PHÁP GIẢI VÀ SÁNG TẠO CÁC BÀI TOÁN TÌM GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ"** tôi đã sử dụng các phương pháp nghiên cứu sau :

+ Thu thập, tổng hợp, phân tích, so sánh, đánh giá.

+ Sử dụng, phát triển và ứng dụng các phương pháp đã có trong lý thuyết về giới hạn hàm số .

+ Tham khảo ý kiến đồng nghiệp và người hướng dẫn

5. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài

Đề tài có giá trị về mặt lý thuyết và ứng dụng. Có thể sử dụng luận văn như là tài liệu tham khảo dành cho học sinh giỏi chuyên toán và các đối tượng quan tâm đến các phương pháp tìm và sáng tạo ra các bài toán về giới hạn của hàm số.

6. Cấu trúc của luận văn

Ngoài phần mở đầu, kết luận và tài liệu tham khảo, luận văn được chia thành 3 chương, trong đó:
Chương 1 . Kiến thức cơ bản

Chương 2 . Phương pháp tìm giới hạn hàm số

Chương 3 . Phương pháp sáng tạo các bài toán tìm giới hạn hàm số

Cùng với sự hướng dẫn của Thầy giáo TS. Phạm Quý Mười, tôi đã chọn đề tài **"PHƯƠNG PHÁP GIẢI VÀ SÁNG TẠO CÁC BÀI TOÁN TÌM GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ"** cho luận văn thạc sĩ của mình.

CHƯƠNG 1
KIẾN THỨC CƠ BẢN

1.1. HÀM SỐ. HÀM SỐ ĐƠN ĐIỆU. HÀM SỐ BỊ CHẶN

1.2. CÁC PHÉP TÍNH ĐẠI SỐ TRÊN CÁC HÀM

1.3. GIỚI HẠN HÀM SỐ VÀ MỘT SỐ TÍNH CHẤT CƠ BẢN

Cho I là một khoảng của $\mathbb{R}$, không rỗng và cũng không thu về một điểm. Kí hiệu $\overline{I}$ chỉ khoảng đóng cùng có mút với I và $\overset{o}{I}$ chỉ khoảng mở có cùng mút với I

A. Các định nghĩa.

Định nghĩa 1.1. (Định nghĩa giới hạn hữu hạn)

Định nghĩa 1.2. (Định nghĩa giới hạn vô cùng)

Định nghĩa 1.3. (Định nghĩa giới hạn một bên)

B. Một số tính chất cơ bản của giới hạn hàm số

Mệnh đề 1.1. *(Tính duy nhất của giới hạn, nếu tồn tại)* *Nếu f nhận l và l' làm giới hạn tại a, thì $l = l'$.*

Mệnh đề 1.2. *Nếu $f : I \to \mathbb{R}$ có giới hạn hữu hạn tại $a \in \overline{I}$ thì f bị chặn trong một lân cận của a.*

Mệnh đề 1.3. *(Sử dụng dãy để thể hiện giới hạn hàm số)* *Để $f : X \to \mathbb{R}$ có giới hạn là l tại $a \in \overline{I}$, điều kiện cần và đủ là: với mọi dãy $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trong I sao cho $u_n \to a$ khi $n \to \infty$, ta có $f(u_n) \to l$ khi $n \to \infty$.*

Mệnh đề 1.4. *Cho* $a \in \overline{I} \cup \{-\infty; +\infty\}$, $f : I \to \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$, $(c, d) \in \mathbb{R}^2$. *Giả sử* f *có giới hạn là* l *tại* a.

1. *Nếu* $c < l$, *thì trong lân cận của* $a : c < f(x)$.

2. *Nếu* $l < d$, *thì trong lân cận của* $a : f(x) < d$.

3. *Nếu* $c < l < d$, *thì trong lân cận của* $a : c < f(x) < d$.

Mệnh đề 1.5. *(Chuyển qua giới hạn trong các bất đẳng thức)*
Cho $a \in \overline{I} \cup \{-\infty; +\infty\}$, $f : I \to \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$, $(c, d) \in \mathbb{R}^2$.
Giả sử f *có giới hạn là* l *tại* a.

1. *Nếu* $c \leq f(x)$ *trong lân cận của* a, *thì* $c \leq l$.

2. *Nếu* $f(x) \leq d$ *trong lân cận của* a, *thì* $l \leq d$.

3. *Nếu* $c \leq f(x) \leq d$ *trong lân cận của* a, *thì* $c \leq l \leq d$.

Mệnh đề 1.6. *(Định lý kẹp)*
Cho $f, g, h : I \to \mathbb{R}, a \in \overline{I} \cup \{-\infty; +\infty\}, l \in \mathbb{R}$.

$$\text{Nếu } \left\{ \begin{array}{l} f(x) \to l \text{ khi } x \to a \\ h(x) \to l \text{ khi } x \to a \\ f(x) \leq g(x) \leq h(x) \end{array} \right| \text{, thì } g \text{ có giới hạn là } l \text{ tại } a.$$

Mệnh đề 1.7. *Cho* $f, g : I \to \mathbb{R}, a \in \overline{I} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

$$\text{Nếu } \left\{ \begin{array}{l} f(x) \to +\infty \text{ khi } x \to a \\ \text{Trong lân cận của } a : f(x) \leq g(x) \end{array} \right| , \text{ thì } g(x) \to +\infty \text{ khi } x \to a.$$

Định lý 1.1. *Giả sử* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$ $(L, M \in \mathbb{R})$. *Khi đó:*

1. $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M$;

2. $\lim\limits_{x\to a}[f(x).g(x)] = L.M$;
   Đặc biệt, nếu C là hằng số thì $\lim\limits_{x\to a}[\mathrm{C}.f(x)] = C.L$;

3. *Nếu* $M \neq 0$ *thì* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$.

Định lý 1.2. *Giả sử* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \in \mathbb{R}$. *Khi đó:*

1. $\lim\limits_{x\to a}|f(x)| = |L|$;

2. $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{L}$;

3. *Nếu* $f(x) \geq 0$ *thì* $L \geq 0$ *và* $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.

4. *Nếu* $L = 0$ *và* $g(x)$ *bị chặn trong lân cận của a thì* $\lim\limits_{x\to a} f(x).g(x) = 0$.

Chú ý: Các định lý 1, 2 vẫn đúng khi thay $x \to a$ bởi $x \to \pm\infty$.

Mệnh đề 1.8. *Cho* $a \in \overline{I} \cup \{-\infty; +\infty\}$, $f, g : I \to \mathbb{R}$.

1. *Nếu* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ *và nếu g bị chặn dưới trong lân cận của a, thì:*
$$\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = +\infty$$
   Trường hợp riêng:
   $* \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty \end{array}\right| \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) = +\infty.$
   $* \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = l' \in \mathbb{R}_+^* \end{array}\right| \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) = +\infty.$

2. *Nếu* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ *và nếu g bị chặn dưới trong lân cận của a bởi một hằng số thực sự dương, thì:* $\lim\limits_{x\to a}(f(x).g(x)) = +\infty$
   Trường hợp riêng:

$$* \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty \end{array} \right| \Rightarrow \lim_{x\to a}(f(x).g(x)) = +\infty.$$

$$* \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = l' \in \mathbb{R}_+^* \end{array} \right| \Rightarrow \lim_{x\to a}(f(x).g(x)) = +\infty.$$

Định lý 1.3. *Cho* $(a, b) \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})^2$ *sao cho:* $a < b, f : (a; b) \to \mathbb{R}$ *là một ánh xạ tăng.*

1. *Nếu* f *bị chặn trên, thì* f *có giới hạn hữu hạn tại* b *và:*

$$\lim_{b} f = \sup_{x\in(a;b)} f(x).$$

2. *Nếu* f *không bị chặn trên, thì* f *có giới hạn là* $+\infty$ *tại* b.

Mệnh đề 1.9. *Nếu* $f : I \to \mathbb{R}$ *là một ánh xạ tăng, thì* f *có một giới hạn trái và một giới hạn phải hữu hạn tại mọi điểm* a *thuộc* $\overset{o}{I}$, *và:*

$$\lim_{x\to a^-} f \le f(a) \le \lim_{x\to a^+} f.$$

1.4. ĐẠI LƯỢNG VÔ CÙNG BÉ (VCB) VÀ ĐẠI LƯỢNG VÔ CÙNG LỚN (VCL)

1.4.1. Đại lượng VCB

Định nghĩa 1.4. Cho I là tập không rỗng của $\mathbb{R}$.

Hàm số $\alpha : I \to \mathbb{R}$ gọi là đại lượng VCB tại $a \in \overline{I}$ nếu như $\alpha(x) \underset{x\to a}{\to} 0$, a có thể là $+\infty$ hoặc $-\infty$.

Hệ quả 1.1. Để tồn tại $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, điều kiện cần và đủ là hàm số $\alpha(x) = f(x) - l$ là VCB tại a.

Định lý 1.4. *(Tính chất đại số của VCB)*

Định lý 1.5. *(So sánh các VCB)*

Hệ quả 1.2. Nếu $\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$ tại a thì $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha_1}{\beta_1}$.

Hệ quả 1.3. Nếu $\alpha = o(\beta)$ tại a thì $\alpha + \beta \sim \beta$ tại a.

Hệ quả 1.4. (Quy tắc ngắt bỏ VCB cấp cao)

Nếu α^* là VCB cấp thấp nhất trong số các VCB α_i, $(i = \overline{1, m})$ và β^* là VCB cấp thấp nhất trong số các VCB β_j, $(j = \overline{1, n})$ tại a. Khi đó:

$$\lim_{x\to a} \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i}{\sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j} = \lim_{x\to a} \frac{\alpha^*}{\beta^*}.$$

Chú ý 1.1. Ta có các chú ý sau:

A. Các VCB đáng nhớ:

B. Các VCB tương đương:

1.4.2. Đại lượng VCL

1.5. TÍNH LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ

Định nghĩa 1.5. Giả sử X là một tập hợp số thực, f là một hàm số xác định trên X. Ta nói rằng

1. f liên tục tại điểm $x_0 \in X$ nếu với mọi số dương ε bất kì, ồn tại một số $\delta > 0$ sao cho

$$\forall x \in X, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0| < \varepsilon.$$

2. f liên tục trên tập hợp X nếu f liên tục tại mọi điểm $x \in X$.

Hàm số f không liên tục tại điểm x_0 gọi là gián đoạn tại điểm này.

Hiển nhiên nếu f là một hàm xác định trên tập hợp số thực X và $x_0 \in X$ là một điểm cô lập của X thì f liên tục tại điểm x_0.

*** Tính liên tục của các hàm số sơ cấp.**

CHƯƠNG 2

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÌM GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

2.1. TỔNG QUAN VỀ BÀI TOÁN TÍNH GIỚI HẠN HÀM SỐ VÀ CÁC DẠNG VÔ ĐỊNH

2.2. CÁC PHƯƠNG PHÁP KHỬ DẠNG VÔ ĐỊNH $\frac{0}{0}$

2.2.1. Phương pháp dùng các giới hạn cơ bản

Ví dụ 2.1. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - cosax}{x^2}$.

Ví dụ 2.2. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$.

Ví dụ 2.3. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x^2} - e^{-2x^2}}{\ln(1+x^2)}$.

2.2.2. Phương pháp phân tích thành nhân tử, thêm, bớt, nhân lượng liên hợp

Ví dụ 2.4. Tính giới hạn

$$L = \lim_{x\to 1} \frac{x + x^2 + x^3 + ... + x^n - n}{x + x^2 + x^3 + ... + x^m - m} \quad (m, n \in \mathbb{N}^*).$$

Nhận xét: Phương pháp giải bài toán loại này là phân tích thành nhân tử với nhân tử chung là $x - x_0$.

Ví dụ 2.5. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[n]{x} - 1}{\sqrt[m]{x} - 1}$ $(m, n \in \mathbb{N}^*)$.

Nhận xét: Phương pháp giải loại toán này là nhân cả tử và mẫu với biểu thức liên hợp tương ứng của biểu thức chứa căn thức để trục các nhân tử $x - x_0$ ra khỏi các căn thức.

Ví dụ 2.6. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}}{x^2}$.

Nhận xét: Phương pháp chung để tính các giới hạn của biểu thức chứa các căn thức không cùng bậc là thêm, bớt một lượng nào đó, tách thành nhiều giới hạn rồi nhân liên hợp.

2.2.3. Phương pháp thay thế VCB tương đương

Ví dụ 2.7. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2}$.

Ví dụ 2.8. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^m - 1}{x^n - 1}$.

Ví dụ 2.9. Giả sử $P(x) = a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ và m là số nguyên. Chứng minh rằng:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+P(x)} - 1}{x} = \frac{a_1}{m}.$$

2.3. CÁC PHƯƠNG PHÁP KHỬ DẠNG VÔ ĐỊNH $\dfrac{\infty}{\infty}$

Ví dụ 2.10. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{9x^2+1} - \sqrt[3]{x^2+4}}{\sqrt[4]{16x^4+3} - \sqrt[5]{x^4+7}}$.

2.4. CÁC PHƯƠNG PHÁP KHỬ DẠNG VÔ ĐỊNH 1^∞

Ví dụ 2.11. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x\to 0} (1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}}$.

Ví dụ 2.12. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^{4-3x}$.

2.5. CÁC PHƯƠNG PHÁP KHỬ CÁC DẠNG VÔ ĐỊNH KHÁC

Ví dụ 2.13. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x\to\infty} [\sqrt{x^2 - x + 3} + x]$.

Ví dụ 2.14. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt{x^2 - 2x}\right]$.

Ví dụ 2.15. Tính giới hạn

$$L = \lim_{x\to1} \left[\frac{m}{1 - x^m} - \frac{n}{1 - x^n}\right] \quad , (m,\, n \in \mathbb{N}^*).$$

Ví dụ 2.16. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x\to1} (1 - x) \tan \dfrac{\pi x}{2}$.

2.6. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP ĐẶC BIỆT

2.6.1. Phương pháp sử dụng quy tắc L'Hospital

A. Quy tắc L'Hospital

1. Quy tắc L'Hospital 1 (khử dạng $\frac{0}{0}$)

2. Quy tắc L'Hospital 2 (khử dạng $\frac{\infty}{\infty}$)

B. Phương pháp sử dụng quy tắc L'Hospital

C. Một số ví dụ

Ví dụ 2.17. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^4}{x^2 + 2cosx - 2}$.

Ví dụ 2.18. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\alpha}{a^x}$ $(a > 1)$.

Ví dụ 2.19. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x\to1} \left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$.

Ví dụ 2.20. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) \tan x$.

Ví dụ 2.21. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

Ví dụ 2.22. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{s\,inx}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

2.6.2. Phương pháp tiếp tuyến

A. Thực trạng vấn đề

Trong quá trình tính giới hạn của hàm số mà phải khử dạng vô định $\frac{0}{0}$ đối với những giới hạn dạng:

$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\sqrt[m]{f(x)} - \sqrt[n]{g(x)}}{(x-x_0)^k}$ $(m, n, k$ tự nhiên, $2 \leq k \leq min\{m, n\})$,

ta thường dùng phương pháp thêm bớt một lượng mà chúng ta vẫn gọi là phương pháp gọi số hạng vắng, khi ấy ta thường gặp vấn đề là khử được dạng vô định $\frac{0}{0}$ nhưng lại gặp phải dạng vô định $\infty - \infty$ nếu như số hạng vắng là hằng số. Nguyên nhân là dạng vô định $\frac{0}{0}$ mà ta khử sau khi thêm bớt hằng số vắng, không phải là hai đại lượng vô cùng bé cùng cấp.

Vấn đề đặt ra là số hạng vắng đó tìm như thế nào để thu được dạng vô định $\frac{0}{0}$ mà vô cùng bé ở tử và vô cùng bé ở mẫu là cùng cấp để có thể khử dạng vô định trên mà không phải gặp tình huống khử được dạng vô định này lại gặp dạng vô định khác.

Phương pháp tiếp tuyến sẽ giúp chúng ta giải quyết được vấn đề này.

B. Các bước thực hiện

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0. Ta đã biết tiếp tuyến của đồ thị $(C) : y = f(x)$ tại $M_0 \in (C)$ là giới hạn của

cát tuyến M_0M của đồ thị (C) khi M dần tới M_0 $(M, M_0$ thuộc đồ thị $(C))$. Và vì vậy có thể thấy rằng khi $x \to x_0$ thì $f(x)$ và $f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ là hai đại lượng "vô cùng bé tương đương".
Giả sử giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\sqrt[m]{f(x)} - \sqrt[n]{g(x)}}{(x-x_0)^k}$ được viết lại là:
$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{k(x)-h(x)}{(x-x_0)^k}$ $(y = k(x)$ và $y = h(x)$ có đạo hàm tại $x_0)$.
Khi đó ta thực hiện theo các bước sau:

1. Viết phương trình tiếp tuyến của hàm số $y = k(x)$ hoặc $y = h(x)$ tại x_0, giả sử phương trình tiếp tuyến là $y = t(x)$.

2. Tính $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\sqrt[m]{f(x)} - \sqrt[n]{g(x)}}{(x-x_0)^k}$

$$= \lim_{\mathrm{x}\to \mathrm{x}_0} \left[\frac{\sqrt[m]{f(x)} - \mathrm{t(x)}}{(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)^{\mathrm{k}}} + \frac{\mathrm{t(x)} - \sqrt[n]{g(x)}}{(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)^{\mathrm{k}}} \right].$$

C. Các ví dụ làm rõ phương pháp

Ví dụ 2.23. Tính giới hạn sau:
$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{8x^3+x^2+6x+9} - \sqrt[3]{9x^2+27x+27}}{x^3}.$$

Ví dụ 2.24. Tính giới hạn sau:
$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{cos2x-2x} - \sqrt[4]{\sqrt{1+2x^2}-4x}}{x^2}.$$

2.6.3. Phương pháp sử dụng công thức khai triển Taylor

A. Phần chính của hàm số

B. Công thức Taylor

Giả sử hàm số f có đạo hàm đến cấp n liên tục trên đoạn $I = [\alpha; \beta]$ và có đạo hàm cấp $n+1$ trên khoảng $(\alpha; \beta)$. Nếu $a, b \in I$

thì tồn tại một số thực c giữa a và b ($c \in (a;b)$ nếu $a, b, c \in (b;a)$ nếu $a > b$) sao cho

$$\begin{aligned} f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + ...+ \\ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Công thức (2.1) gọi là công thức Taylor, biểu thức

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

được gọi là phần dư dạng Lagrang.

Nếu $a = 0$ thì (2.1) được gọi là công thức Maclaurin.

Từ công thức Maclaurin, ta nhận được 5 khai triển quan trọng:

1. $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + ... + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n)$.
2. $sinx = x - \dfrac{x^3}{3!} + ... + (-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n})$.
3. $cosx = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + ... + (-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$.
4. $(1+x)^m = 1 + mx + \dfrac{m(m-1)}{2!}x^2 + ...$
   $+ \dfrac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$.
5. $ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + ... + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + o(x^n)$.

C. Một số ví dụ

Ví dụ 2.25. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sin(sinx) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$.

Ví dụ 2.26. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - sinx}$.

CHƯƠNG 3

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP SÁNG TẠO CÁC BÀI TOÁN TÌM GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

3.1. TẠO RA CÁC BÀI TOÁN ĐỂ DÙNG TÍNH CHẤT GIỚI HẠN CỦA TỔNG, HIỆU, TÍCH, THƯƠNG

Bài toán 3.1. Tính giới hạn:

$$L = \lim_{x\to 1}\left(2x^2 + \ln x - \frac{e^x}{3}\right) = 2 - \frac{e}{3}.$$

3.2. SÁNG TẠO CÁC BÀI TOÁN DẠNG $\frac{0}{0}$

3.2.1. Sử dụng các giới hạn cơ bản và giới hạn của hàm hợp

*** Ý tưởng**

Dựa vào các giới hạn cơ bản đã trình bày ở phần 2 của chương 2, ta có thể tạo ra một số bài toán tìm giới hạn của hàm số có dạng vô định $\frac{0}{0}$.

*** Một số bài toán**

Bài toán 3.2. Từ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{s\,inx}{x} = 1$, ta lấy hàm $f(u)$ và chọn u_0 sao cho $u \to u_0$ thì $f(u) \to 0$. Khi đó: $\lim\limits_{u\to u_0}\frac{sinf(u)}{f(u)} = 1$.

Như vậy, ta có thể tạo ra các bài toán tính giới hạn sau:

$$L_1 = \lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x-1}.\frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}.$$

$$L_2 = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sin 2(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{1-x}{2\sin(x-1).cos(x-1)}$$
$$= -\frac{1}{2} \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sin(x-1)}.\frac{1}{cos(x-1)} = -\frac{1}{2}.$$
$$L_3 = \lim_{x\to 0} \frac{cos2x-1}{4x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin^2 x}{2x^2} = -\frac{1}{2} \lim_{x\to 1} \frac{\sin^2 x}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$
$$L_4 = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}} = -1.$$
$$L_5 = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x} = \frac{3}{5} \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x}.\frac{5x}{\sin 5x} = \frac{3}{5}.$$

Bài toán 3.3. Từ giới hạn cơ bản $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$, ta có thể tạo ra các bài toán tính giới hạn sau:

$$L_1 = \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x} = 2\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{2x} = 2.$$
$$L_2 = \lim_{x\to 1} \frac{e^{2x^2}-e^2}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{e^2.e^{2x^2-2}-e^2}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{e^2\left(e^{2(x^2-1)}-1\right)}{x^2-1}$$
$$= 2\lim_{x\to 1} \frac{e^2\left(e^{2(x^2-1)}-1\right)}{2(x^2-1)} = 2e^2.$$
$$L_3 = \lim_{x\to \infty} \frac{e^{\frac{2}{x}}-1}{\frac{3}{x}} = \frac{2}{3} \lim_{x\to \infty} \frac{e^{\frac{2}{x}}-1}{\frac{2}{x}} = \frac{2}{3}.$$

Bài toán 3.4. Từ giới hạn cơ bản $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-1}{x} = \ln a$, ta có thể tạo ra một số bài toán tính các giới hạn sau:

$$L_1 = \lim_{x\to 0} \frac{a^{2x^2}-1}{3x^2} = \frac{2}{3} \lim_{x\to 0} \frac{a^{2x^2}-1}{2x^2} = \frac{2}{3}\ln a.$$
$$L_2 = \lim_{x\to 2} \frac{a^{x^2-x}-a^2}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{a^2\left(a^{x^2-x-2}-1\right)}{x-2}$$
$$= \lim_{x\to 2} \frac{a^2.(x+1)\left[a^{(x+1)(x-2)}-1\right]}{(x+1)(x-2)} = 3a^2\ln a.$$

3.2.2. Sử dụng các VCB tương đương

*** Ý tưởng**

Sử dụng các VCB tương đương của một số hàm, ta có thể tạo ra một số bài toán tìm giới hạn bằng cách lập tích hoặc thương của các hàm đó.

*** Một số bài toán**

Bài toán 3.5. Ta có $sinx \sim x, e^x - 1 \sim x$. Ta suy ra được các bài toán tính giới hạn sau:

$$L_1 = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{e^x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1.$$

$$L_2 = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin \dfrac{x}{4}} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \dfrac{x}{2}}{\sin \dfrac{x}{4}} = \lim_{x\to 0} \frac{2.\dfrac{x^2}{4}}{\dfrac{x}{4}} = \lim_{x\to 0} 2x = 0.$$

Bài toán 3.6. Ta có $\dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{3}{5}x^5 \sim \dfrac{1}{4}x^4, x^4 + x^6 \sim x^4$, một cách đơn giản, ta suy ra được bài toán tính giới hạn sau:

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{3}{5}x^5}{x^4 + x^6} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{4}x^4}{x^4} = \frac{1}{4}.$$

Bài toán 3.7. Ta có $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2$. Ta suy ra được các bài toán tính giới hạn sau:

$$L_1 = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^5 - 1}{x + 2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{5x + 10x^2}{x + 2x^2} = \lim_{x\to 0} 5 = 5.$$

$$L_2 = \lim_{x\to 1} \frac{x^{2015} - 1}{x^{2016} - 1}.$$

$$L_3 = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{1 + 2x + 3x^2 - x^3} - 1}{x}.$$

3.2.3. Sử dụng phương pháp tiếp tuyến

*** Ý tưởng**

Sử dụng phương pháp này để tạo ra các bài toán tìm giới hạn của hàm số dạng vô định $\dfrac{0}{0}$ chứa các căn thức không cùng bậc.

*** Một số bài toán**

Bài toán 3.8. Tính giới hạn:

$$L = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{3x^2 - x + 6} - \sqrt{4x^3 + 2x^2 - x - 1}}{x - 1}.$$

Bài toán 3.9. Tính giới hạn:

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\sin 2x + 4} - \sqrt[3]{7 + \sqrt{1 + 3x^2}}}{x}.$$

3.2.4. Sử dụng công thức khai triển Taylor

Bài toán 3.10. Từ các khai triển:

$$ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3),$$

$$sinx = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Ta có bài toán tính giới hạn sau:

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + x) - \sin x}{2x^2}$$

$$= \lim_{\mathrm{x}\to 0} \frac{\mathrm{x} - \frac{\mathrm{x}^2}{2} + \frac{\mathrm{x}^3}{3} - \mathrm{x} + \frac{\mathrm{x}^3}{6} + \mathrm{o}(\mathrm{x}^3)}{2\mathrm{x}^2}$$

$$= \lim_{\mathrm{x}\to 0} \frac{\frac{\mathrm{x}^3}{2} - \frac{\mathrm{x}^2}{2} + \mathrm{o}(\mathrm{x}^3)}{2\mathrm{x}^2} = \lim_{\mathrm{x}\to 0} \frac{\frac{\mathrm{x}}{2} - \frac{1}{2}}{2} = -\frac{1}{4}.$$

Bài toán 3.11. Từ các khai triển:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5),$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + o(x^5),$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} + o(x^5).$$

Ta suy ra bài toán tính giới hạn sau:

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x - e^x + e^{-x}}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{2}{3}x^3 + o(x^5)}{x^3} = -\frac{2}{3}.$$

Bài toán 3.12. Từ khai triển $\tan x = x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$ và các khai triển trên, ta suy ra các bài toán tính giới hạn sau:

$$L_1 = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \tan x}{5x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-\dfrac{x^3}{2} + o(x^3)}{5x^3} = -\frac{1}{10}.$$

$$L_2 = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \tan x}{2\sin x - e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to 0} \frac{-\dfrac{x^3}{2} + o(x^3)}{-\dfrac{2}{3}x^3 + o(x^3)} = \frac{3}{4}.$$

Bài toán 3.13. Ta có $e^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + \dfrac{4}{3}x^3 + o(x^3)$. Ta suy ra bài toán tính giới hạn sau:

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - e^x - \dfrac{7}{6}x^3 + o(x^3)}{2x + 3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x + \dfrac{3}{2}x^2 + o(x^3)}{2x + 3x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 + \dfrac{3}{2}x + o(x^2)}{2 + 3x} = \frac{1}{2}.$$

Bài toán 3.14. Ta có

$$s\,inx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(x^8),$$
$$tanx = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^8).$$

Ta suy ra bài toán tính giới hạn:

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\tan(\sin x) - \sin(\tan x)}{x^7}.$$

3.2.5. Sử dụng quy tắc L'Hospital

*** Ý tưởng**

Sử dụng công thức $[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x).\ln f(x)}$ $(f(x) > 0)$ và áp dụng quy tắc L'Hospital, ta có thể tạo ra bài toán tìm giới hạn của hàm số có dạng vô định này.

Bài toán 3.15. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+2x)^{\frac{1}{2x}} - e}{2x}$.

Giải:

Ta có $\lim\limits_{x \to 0} (1+2x)^{\frac{1}{2x}} = e$ nên

$$
\begin{aligned}
L &= \lim_{x \to 0} \frac{(1+2x)^{\frac{1}{2x}} - e}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{\frac{1}{2x}\ln(1+2x)} - e}{2x} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{e^{\frac{1}{2x}\ln(1+2x)} \cdot \left(-\dfrac{\ln(1+2x)}{2x^2} + \dfrac{2}{2x(1+2x)} \right)}{2} \\
&= e \lim_{x \to 0} \frac{2x - (1+2x)\ln(1+2x)}{4x^2(1+2x)} \\
&= e \lim_{x \to 0} \frac{2 - [2\ln(1+2x) + 2]}{8x + 24x^2} = e \lim_{x \to 0} \frac{-2\ln(1+2x)}{8x + 24x^2} \\
&= e \lim_{x \to 0} \frac{-\dfrac{4}{1+2x}}{8 + 48x} = -\frac{1}{2}e.
\end{aligned}
$$

3.3. SÁNG TẠO CÁC BÀI TOÁN DẠNG $\dfrac{\infty}{\infty}$

Bài toán 3.16. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(4-x)^{40}(2x+5)^{10}}{(3x-1)^{50}}$.

Bài toán 3.17. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5x^2 + 2 + \sqrt{9x^4 - 1}}{3x - \sqrt[3]{x^6 - 5}}$.

Bài toán 3.18. Tính giới hạn:

$$L = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x + 3} + \sqrt{x^2 + 4x + 5}}{2x + \sqrt{x^2 + 4}}.$$

3.4. SÁNG TẠO CÁC BÀI TOÁN DẠNG 1^∞

*** Ý tưởng**: Từ các giới hạn cơ bản và giới hạn của hàm hợp, ta có thể tạo ra một số bài toán tìm giới hạn của hàm số có dạng vô định 1^∞.

Các giới hạn cơ bản thường gặp:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e,\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

*** Một số bài toán**

Bài toán 3.19. Tính các giới hạn sau:

$$L_1 = \lim_{x\to 2}(3-x)^{\frac{1}{4-x^2}} = e^{\frac{1}{4}}.$$

$$L_2 = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+x-1}{2x^2-x+3}\right)^{\frac{2x^2-x+3}{x}}$$

$$= \lim_{\mathrm{x}\to\infty}\left(1+\frac{2\mathrm{x}-4}{2\mathrm{x}^2-\mathrm{x}+3}\right)^{\frac{2\mathrm{x}^2-\mathrm{x}+3}{\mathrm{x}}}$$

$$= \lim_{\mathrm{x}\to\infty}\left(1+\frac{2\mathrm{x}-4}{2\mathrm{x}^2-\mathrm{x}+3}\right)^{\frac{2\mathrm{x}^2-\mathrm{x}+3}{2\mathrm{x}-4}.\frac{2\mathrm{x}-4}{\mathrm{x}}} = \mathrm{e}^2.$$

$$\mathrm{L}_3 = \lim_{\mathrm{x}\to -2}(3+\mathrm{x})^{\frac{\mathrm{x}^2+\mathrm{x}+1}{\mathrm{x}+2}}$$

$$= \lim_{\mathrm{x}\to -2}[1+(2+\mathrm{x})]^{\frac{1}{2+\mathrm{x}}.(\mathrm{x}^2+\mathrm{x}+1)} = \mathrm{e}^3.$$

Bài toán 3.20. Chứng minh rằng: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{bx+c} = e^{ab}$.

Ngoài ra, ta cũng có thể sử dụng phương pháp L'Hospital để tạo ra một số bài toán tìm giới hạn dạng vô định này. Chẳng hạn, bằng cách sử dụng công thức $[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x).\ln f(x)}\quad (f(x)>0)$ và áp dụng quy tắc L'Hospital, ta tính được các giới hạn sau:

Bài toán 3.21.

$$L_1 = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\dfrac{2}{\tan x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{\tan x}.\ln(1+x)}$$
$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{1+x}.\dfrac{1}{1+\tan^2 x}} = e^2.$$
$$L_2 = \lim_{x\to 2}(x-1)^{\dfrac{1}{2-x}} = e^{\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{2-x}.\ln(x-1)}$$
$$= e^{\lim\limits_{x\to 2}\left(-\dfrac{1}{x-1}\right)} = e^{-1}.$$
$$L_3 = \lim_{x\to -3}(4+x)^{\tan\dfrac{\pi x}{2}} = e^{\lim\limits_{x\to -3}\tan\dfrac{\pi x}{2}.\ln(4+x)}$$
$$= e^{\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{1}{\cot\dfrac{\pi x}{2}}.ln(4+x)} = e^{\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{-1}{4+x}.\dfrac{\sin^2\dfrac{\pi x}{2}}{\dfrac{\pi}{2}}} = e^{-\dfrac{2}{\pi}}.$$

3.5. SÁNG TẠO CÁC BÀI TOÁN DẠNG VÔ ĐỊNH KHÁC

Bài toán 3.22. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x\to 0}\left(\cot x - \dfrac{1}{x}\right)$.

Bài toán 3.23. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right)$.

Bài toán 3.24. Tính giới hạn

$$L = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\tan x - \frac{1}{\dfrac{\pi}{2} - x}\right).$$

Bài toán 3.25. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x\to 0}[ln(2x+1).cotx]$.

Bài toán 3.26. Tính giới hạn

$$L = \lim_{x\to +\infty}\left[(x+2)\sqrt{\frac{x+5}{8x^3-3x^2+7}}\right].$$

KẾT LUẬN

Sau một thời gian tìm hiểu, học hỏi từ những tài liệu được Thầy giáo TS. Phạm Quý Mười cung cấp, tôi đã hoàn thành đề tài của mình. Luận văn *Phương pháp giải và sáng tạo các bài toán tìm giới hạn của hàm số* đã giải quyết được những vấn đề sau:

1. Hệ thống được các tính chất cơ bản của hàm số, giới hạn của hàm số.

2. Đưa ra các phương pháp tìm giới hạn của hàm số.

3. Trên cơ sở đó đã sáng tạo được một số bài toán tìm giới hạn của hàm số có dạng vô định thường gặp.

Với những gì đã tìm hiểu được, tôi hy vọng luận văn sẽ là một tài liệu tham khảo hữu ích cho bản thân trong công tác giảng dạy sau này và hy vọng luận văn cũng là nguồn tư liệu tốt cho học sinh phổ thông cũng như những ai quan tâm đến lớp các bài toán về giới hạn của hàm số.

Mặc dù đã hết sức cố gắng, nhưng do thời gian và khả năng có hạn nên chắc chắn luận văn còn có những thiếu sót. Vì thế, tôi rất mong nhận được nhiều ý kiến đóng góp của quý thầy cô, bạn bè, đồng nghiệp để luận văn được hoàn thiện hơn.