BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

NGUYỄN THỊ THU NGUYỆT

ỨNG DỤNG HÌNH HỌC GIẢI TÍCH VÀO GIẢI PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ

Chuyên ngành: Phương pháp toán sơ cấp

Mã số:60.46.01.13

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Đà Nẵng – Năm 2016

Công trình được hoàn thành tại
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TS TRẦN ĐẠO DÕNG

Phản biện 1: TS. Phạm Quý Mười
Phản biện 2: TS. Trịnh Đào Chiến

Luận văn đã sẽ được bảo vệ trước Hội đồng chấm Luận văn tốt nghiệp thạc sĩ khoa học họp tại Đại học Đà Nẵng.Vào ngày 13 tháng 8 năm 2016

Có thể tìm hiểu luận văn tại:

- Trung tâm Thông tin-Học liệu, Đại học Đà Nẵng
- Thư viện trường Đại học sư phạm, Đại học Đà Nẵng

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài:

Hình học giải tích là môn học cơ bản của chương trình toán bậc phổ thông cũng như ở đại học, là một trong các kiến thức cơ sở có liên quan mật thiết với các môn học khác như đại số, lượng giác,...Chính vì vậy, việc tìm hiểu và vận dụng các kiến thức của hình học giải tích là rất cần thiết và giúp việc học tập các môn học khác được hiệu quả hơn.

Hình học giải tích được sáng lập ra đồng thời do hai nhà bác học người Pháp là Descartes (1596-1650) và Ferma (1601-1655) với đặc trưng của môn học này là ứng dụng phương pháp tọa độ và đại số vectơ để khảo sát các bài toán hình học. Phương pháp này không chỉ ứng dụng để giải các bài toán hình học trong mặt phẳng hay trong không gian ba chiều mà còn ứng dụng trong trong các không gian nhiều chiều với hình dạng phức tạp và việc vẽ hình để giải toán là điều rất khó thực hiện.

Gần đây, trong nhiều kì thi tuyển sinh đại học, thi học sinh giỏi, thi toán Olympic quốc tế hay trên các tạp chí toán học có nhiều bài toán không liên quan đến hình học nhưng có thể vận dụng kiến thức hình học để giải. Một trong các dạng bài toán đó là bài toán giải phương trình, bất phương trình và hệ phương trình đại số với nhiều phương pháp giải đặc thù, mới lạ và tương đối khó vận dụng đối với học sinh lẫn giáo viên.

Được sự định hướng của thầy giáo hướng dẫn và với mong muốn tìm hiểu thêm về chủ đề này nhằm nâng cao trình độ chuyên môn của bản thân, tôi đã chọn đề tài “Ứng dụng hình học giải tích vào giải phương trình, bất phương trình và hệ phương trình đại số” cho đề tài luận văn Thạc sĩ của mình.

2. Mục tiêu và nội dung nghiên cứu của đề tài:

Mục tiêu của đề tài nhằm nghiên cứu và tìm hiểu các bài toán về phương trình, bất phương trình và hệ phương trình đại số, vận dụng các phương pháp thích hợp trong hình học giải tích để giải các bài toán nêu trên trong chương trình phổ thông trung học.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu:

Đối tượng nghiên cứu của đề tài là các bài toán ứng dụng hình học giải tích vào giải phương trình, bất phương trình và hệ phương trình đại số.

Phạm vi nghiên cứu của đề tài là vận dụng các phương pháp giải toán thích hợp trong hình học giải tích để giải quyết các bài toán phương trình, bất phương trình và hệ phương trình đại số.

4. Phương pháp nghiên cứu:

- Thu thập, tổng hợp các tài liệu liên quan đến nội dung đề tài luận văn.

- Phân tích, nghiên cứu các tài liệu thu thập được để thực hiện đề tài.

- Tham gia các buổi seminar của thầy hướng dẫn để trao đổi các kết quả đang nghiên cứu.

5.Cấu trúc của luận văn:

Mở đầu

Chương 1.Kiến thức cơ sở về hình học giải tích.

Chương 2.Ứng dụng hình học giải tích vào giải phương trình, bất phương trình và hệ phương trình.

Kết luận.

CHƯƠNG 1
KIẾN THỨC CƠ SỞ VỀ HÌNH HỌC GIẢI TÍCH

Chương này nhắc lại một số kiến thức cơ sở về hình học phẳng và hình học giải tích liên quan đến việc nghiên cứu trong chương tiếp theo. Các nội dung trình bày trong chương chủ yếu được tham khảo từ các tài liệu [1], [2], [3], [4], [5].

1.1. KIẾN THỨC CƠ SỞ VỀ HÌNH HỌC PHẲNG

1.1.1. Các hệ thức lượng trong tam giác

1.1.2.Các bất đẳng thức trong tam giác

1.1.3. Công thức tính chu vi, diện tích của đa giác, đường tròn

1.2. KIẾN THỨC CƠ SỞ VỀ HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG MẶT PHẲNG

1.2.1. Tích vô hướng giữa hai vectơ

1.2.2.Đường thẳng và tương giao giữa các đường thẳng

1.2.3.Đường tròn và ba đường conic

1.3. KIẾN THỨC VỀ HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG KHÔNG GIAN

1.3.1. Tích vô hướng giữa hai vectơ

1.3.2. Tích có hướng và tích hỗn hợp

1.3.3.Đường thẳng và mặt phẳng

1.3.4.Mặt cầu

CHƯƠNG 2
ỨNG DỤNG HÌNH HỌC GIẢI TÍCH VÀO GIẢI PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Trong chương này chúng tôi vận dụng các kiến thức về hình học giải tích để giải một số dạng bài toán về phương trình, bất phương trình và hệ phương trình trong chương trình toán phổ thông. Các kiến thức trình bày trong chương được tham khảo từ các tài liệu [6], [7], [8], [9], [10].

2.1. ỨNG DỤNG HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG MẶT PHẲNG

Phương trình, bất phương trình và hệ phương trình là những phân môn quan trọng của Đại số. Có rất nhiều phương pháp để giải như: biến đổi tương đương, đặt ẩn phụ, dùng bất đẳng thức, lượng giác hóa, phương pháp hàm số…Tuy nhiên thực tế có nhiều bài toán đại số nếu giải theo cách nhìn đại số thì rất khó hoặc phức tạp, nhưng nếu khéo léo chuyển sang cách nhìn hình học và sử dụng các kết quả đã biết của hình học thì lời giải sẽ ngắn gọn, đẹp và dễ hiểu hơn so với các phương pháp khác. Trong phần này chúng tôi khảo sát và ứng dụng hình học giải tích trong mặt phẳng để giải một số dạng bài toán liên quan đến phương trình, bất phương trình và hệ phương trình.

2.1.1. Ứng dụng vào giải phương trình

a. Ứng dụng phương pháp vectơ

Để sử dụng tọa độ vectơ trong mặt phẳng giải phương trình ta cần nắm vững các kiến thức sau đây:

Trong mặt phẳng Oxy xét các vectơ $\vec{u} = (x_1; y_1), \vec{v} = (x_2; y_2)$.

Ta có:

Tích vô hướng: $\vec{u}.\vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2$.

$$\left|\vec{u}\right| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}.$$

Bất đẳng thức: $\vec{u}.\vec{v} \le \left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|$. (2.1)

$$\left|\vec{u} + \vec{v}\right| \le \left|\vec{u}\right| + \left|\vec{v}\right|. \quad (2.2)$$

$$\left|\left|\vec{u}\right| - \left|\vec{v}\right|\right| \le \left|\vec{u} + \vec{v}\right|. \quad (2.3)$$

Dấu đẳng thức trong (2.1) và (2.2) xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u}, \vec{v}$ cùng hướng. Dấu đẳng thức trong (2.3) xảy ra khi và chỉ khi xảy ra một trong hai trường hợp: $\vec{v} = 0$ hoặc $\vec{u}, \vec{v}$ ngược hướng.

Để giải phương trình $f(x) = g(x)$. Ta biến đổi đồng thời $f(x)$ trở thành vế trái, $g(x)$ trở thành vế phải của một trong các hệ thức sau đây:

$$\vec{u}.\vec{v} = \left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|.$$

$$\left|\vec{u}\right| + \left|\vec{v}\right| = \left|\vec{u} + \vec{v}\right|.$$

$$\left|\vec{u}\right| - \left|\vec{v}\right| = \left|\vec{u} + \vec{v}\right|.$$

$$\vec{u}.\vec{v} \geq \left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|.$$

$$\left|\vec{u}\right| + \left|\vec{v}\right| \geq \left|\vec{u} + \vec{v}\right|.$$

$$\left|\vec{u}\right| - \left|\vec{v}\right| \leq \left|\vec{u} + \vec{v}\right|.$$

Từ đó ứng dụng các điều kiện về dấu đẳng thức xảy ra ở trên để tìm nghiệm của phương trình.

Dưới đây là một số ví dụ minh họa.

Ví dụ 1.1. *Giải phương trình:*

$$\sqrt{x^2+2x+10}+\sqrt{x^2-6x+13}=\sqrt{41}.$$

Ví dụ 1.2. *Giải phương trình:*

$$\left|\sqrt{x^2+2x+5}-\sqrt{x^2-4x+40}\right|=x^2+5x+\frac{45}{4}.$$

Ví dụ 1.3. *Giải phương trình:*

$$\begin{aligned}&\sqrt{\frac{1}{2}x^2+2}+\sqrt{\frac{1}{2}x^2-\frac{16}{5}x+\frac{32}{5}}\\&\qquad+\sqrt{\frac{1}{2}x^2-4x+10}+\sqrt{\frac{1}{2}x^2-\frac{4}{5}x+\frac{8}{5}}\quad.\\&\qquad\qquad=4+2\sqrt{2}\end{aligned}$$

Ví dụ 1.4. *Giải phương trình:*

$$\sqrt{2y^2-6y+9}+\sqrt{2y^2-\frac{10}{3}xy+\frac{13}{9}x^2}+\sqrt{\frac{13}{9}x^2-4x+4}=\sqrt{13}.$$

Ví dụ 1.5. *Giải phương trình:*

$$x\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}=2\sqrt{x^2+1}.$$

Ví dụ 1.6. *Giải phương trình:*

$$3-x\ \sqrt{x-1}+\sqrt{5-2x}=\sqrt{40-34x+10x^2-x^3}.$$

Một số ví dụ tham khảo với phương pháp giải tương tự.

Ví dụ 1.7. *Giải phương trình:*

$$\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x^2+2x+10}=\sqrt{29}\,.$$

Ví dụ 1.8. *Giải phương trình:*

$$\sqrt{x^2-8x+816}+\sqrt{x^2+10x+267}=2003.$$

Ví dụ 1.9. *Giải phương trình:*

$$\left|\sqrt{x^2-4x+5}-\sqrt{x^2-4x+13}\right|=2.$$

Ví dụ 1.10. *Giải phương trình:*

$$x\sqrt{3x+2}+\sqrt{4-x}=\sqrt{2\ \ x^2+1\ \ \ x+3}\,.$$

Ví dụ 1.11. *Giải phương trình:*

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{x}=\sqrt{x+9}.$$

Ví dụ 1.12. *Giải phương trình:*

$$\sqrt{1-2x}+\sqrt{1+2x}=\frac{\sqrt{1-2x}}{\sqrt{1+2x}}+\frac{\sqrt{1+2x}}{\sqrt{1-2x}}.$$

Ví dụ 1.13. *Giải phương trình:*

$$\sqrt{x^2+4y^2+6x+9}+\sqrt{x^2+4y^2-2x-12y+10}=5\,.$$

b. Ứng dụng tương giao giữa đường thẳng và các đường conic

Một số phương trình đại số sau một số bước biến đổi sẽ xuất hiện dạng tọa độ giao điểm của các đường cong nên ta có thể xét sự tương giao của các đường cong để giải phương trình ban đầu. Đối với các bài toán ứng dụng tương giao giữa đường thẳng và các đường conic thường là những bài toán có dạng xác định số nghiệm của phương trình. Trước hết chúng ta biến đổi phương trình đã cho về một phương trình tương đương sao cho mỗi vế là phương trình của một đường quen thuộc trong mặt phẳng. Từ đó tìm giao điểm của các đường tương ứng và suy ra số nghiệm của phương trình ban đầu.

Dưới đây là một số ví dụ minh họa.

Ví dụ 1.14. *Biện luận theo tham số thực m số nghiệm của phương trình:*

$$\sqrt{4-x^2} = mx + 2 - m\,.$$

Ví dụ 1.15. *Giải và biện luận theo tham số thực m phương trình:*

$$\sqrt{m+x} + \sqrt{m-x} = m\,.$$

Ví dụ 1.16. *Biện luận theo tham số thực m số nghiệm của phương trình:*

$$\sqrt{12-3x^2} = x - m\,.$$

Ví dụ 1.17. *Biện luận theo tham số thực m số nghiệm của phương trình:*

$$\sqrt{x^2-9} = x - m\,.$$

Ví dụ 1.18. *Biện luận theo tham số thực m số nghiệm của phương trình:*

$$x^2 + 2x = m - 4\,.$$

Một số ví dụ tham khảo với phương pháp giải tương tự:

Ví dụ 1.19. *Xác định tham số thực k để phương trình sau có hai nghiệm phân biệt:*

$$x + \sqrt{1-x^2} = k.$$

Ví dụ 1.20. *Biện luận theo tham số thực m số nghiệm của phương trình:*

$$m\sqrt{9-x^2}-x+5m=0.$$

Ví dụ 1.21. *Biện luận theo tham số thực a số nghiệm của phương trình:*

$$a\sqrt{9-x^2}+x\quad x-a\sqrt{3}\quad=0.$$

Ví dụ 1.22. *Biện luận theo tham số thực m số nghiệm của phương trình:* $\sqrt{9-2x-x^2}=x+m.$

Ví dụ 1.23. *Biện luận theo tham số thực m số nghiệm của phương trình:*

$$2\sin t-\quad m+3\quad\cos t=m-1,\ t\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right].$$

2.1.2. Ứng dụng vào giải bất phương trình

a. Ứng dụng phương pháp vectơ

Khi gặp các bài toán giải bất phương trình chứa căn thức bậc hai, trước hết chúng ta thiết lập các vectơ có tọa độ thích hợp trên hệ trục tọa độ Descartes sao cho độ dài của các vectơ tương ứng bằng các căn bậc hai đã cho và tổng hoặc hiệu các vectơ bằng vectơ còn lại. Từ đó sử dụng bất đẳng thức về độ dài ba cạnh của một tam giác để đi đến kết quả của bài toán**.**

Khi chúng ta đã thiết lập được các hệ tọa độ vectơ, thông thường các bất phương trình sẽ rơi vào những trường hợp sau:

TH1: $\left|\vec{u}+\vec{v}\right|\geq\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|;\left|\vec{u}\right|-\left|\vec{v}\right|\geq\left|\vec{u}-\vec{v}\right|;\vec{u}.\vec{v}\geq\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|$, khi đó bất phương trình trở thành $\vec{u}=k\vec{v}$.

TH2: $\left|\vec{u}+\vec{v}\right|>\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|;\left|\vec{u}\right|-\left|\vec{v}\right|>\left|\vec{u}-\vec{v}\right|;\vec{u}.\vec{v}>\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|$,khi đó bất phương trình vô nghiệm.

TH3: $\left|\vec{u}+\vec{v}\right| \le \left|\vec{u}\right| + \left|\vec{v}\right|; \left|\vec{u}\right| - \left|\vec{v}\right| \le \left|\vec{u}-\vec{v}\right|; \vec{u}.\vec{v} \le \left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|$, khi đó bất phương trình nghiệm đúng trên tập xác định.

Dưới đây là một số ví dụ minh họa.

Ví dụ 1.24. *Giải bất phương trình:*

$$x\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x} \ge 2\sqrt{x^2+1}.$$

Ví dụ 1.25. *Giải bất phương trình:*

$$\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1} \le 1.$$

Ví dụ 1.26. *Giải bất phương trình:*

$$\sqrt{x-1}+x-3 \ge \sqrt{2(x-3)^2+2(x-1)}.$$

Một số ví dụ tham khảo với phương pháp giải tương tự:

Ví dụ 1.27. *Giải bất phương trình:*

$$\sqrt{x-1}+x-3 < \sqrt{2(x-3)^2+2(x-1)}.$$

Ví dụ 1.28. *Giải bất phương trình:*

$$x\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x} \le 2\sqrt{x^2+1}.$$

Ví dụ 1.29. *Giải bất phương trình:*

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{x} \ge \sqrt{x+9}.$$

Ví dụ 1.30.*Giải bất phương trình:*

$$-\sqrt{x+1}+3-x\sqrt{2-x} \ge \sqrt{3(x^2-6x+10)}.$$

b. Ứng dụng tương giao giữa đường thẳng và các đường conic

Một số bất phương trình sau một vài bước biến đổi sẽ xuất hiện dạng hệ bất phương trình mà các bất phương trình của hệ là dạng các đường cong đã biết và có thể biểu diễn chúng trên mặt phẳng tọa độ.Vì vậy ta sẽ dựa vào hình vẽ để tìm miền nghiệm của hệ sau đó suy ra nghiệm của bất phương trình ban đầu.

Dưới đây là một số ví dụ minh họa.

Ví dụ 1.31. *Giải và biện luận theotham số thực a bất phương trình sau:*

$$\sqrt{a+\sqrt{x}}+\sqrt{a-\sqrt{x}}\le 2\,.$$

Ví dụ 1.32. *Cho bất phương trình sau:*

$$\sqrt{-x^2+6x-5}\ge m-2x\,.$$

a. Giải bất phương trình khi m=8.

b. Xác định tham số thực m để bất phương trình trên có nghiệm $\forall x\in\ 1,5$.

Một số ví dụ tham khảo với phương pháp giải tương tự

Ví dụ 1.33. *Giải bất phương trình sau:*

$$\sqrt{5-4\sqrt{x}}+\sqrt{5+4\sqrt{x}}\ge 4.$$

Ví dụ 1.34. *Xác định m để bất phương trình sau có nghiệm:*

$$\sqrt{x+4}-\sqrt{5-x}>m\,.$$

Ví dụ 1.35. *Cho bất phương trình:*

$$\sqrt{8+2x-x^2}\le\frac{3x+m}{2}.$$

a. Giải bất phương trình khi m=3.

b. Xác định tham số thực m để bất phương trình trên nghiệm đúng $\forall x\in\ -2;4$.

Ví dụ 1.36. *Cho bất phương trình:*

$$-4\sqrt{\ 4-x\quad 2+x\ }\le -x^2-2x+a-18.$$

a. Giải bất phương trình khi a=6.

b. Xác định tham số thực a để bất phương trình trên nghiệm đúng $\forall x \in -2;4$.

2.1.3.Ứng dụng vào giải hệ phương trình

a. Ứng dụng phương pháp vectơ

Khi gặp các bài toán giải hệ phương trình nhiều ẩn, để ứng dụng phương pháp vectơ, thông thường chúng ta biến đổi hệ phương trình đã cho về một hệ phương trình tương đương sao cho mỗi phương trình chứa các biểu thức nhận giá trị của tích vô hướng, độ dài của vectơ hoặc các phép toán về vectơ. Từ đó, xác định các vectơ thích hợp và ứng dụng các tính chất của vectơ, công thức về tọa độ để giải.

Dưới đây là một số ví dụ minh họa.

Ví dụ 1.37. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} \sqrt{3x} + \sqrt{3y} = 6 \\ \sqrt{3x+7} + \sqrt{3y+7} = 8 \end{cases}.$$

Ví dụ 1.38. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y-1} = 4 \\ \sqrt{x+6} + \sqrt{y+4} = 6 \end{cases}.$$

Ví dụ 1.39. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+x+y+1} + x + \sqrt{y^2+x+y+1} + y = 18 \\ \sqrt{x^2+x+y+1} - x + \sqrt{y^2+x+y+1} - y = 2 \end{cases}.$$

Ví dụ 1.40. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} x\ \ y-1\ +yz=0 \\ x\ \ 2x-3\ +y\ \ x-z\ =0 \\ \ 2x-3\ ^2+\ \ x-z\ ^2=\ \ y-1\ ^2+z^2 \end{cases}.$$

Ví dụ 1.41. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} x^2+y^2=-y\ \ x+z \\ x^2+x+y=-2yz \\ 3x^2+8y^2+8xy+8yz=2x+4z+2 \end{cases}.$$

Một số ví dụ tham khảo và phương pháp giải tương tự:

Ví dụ 1.42. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=10 \\ \sqrt{x+24}+\sqrt{y+24}=14 \end{cases}.$$

Ví dụ 1.43. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} x^2+yz=1 \\ y^2-zx=0. \\ z^2+zy=0 \end{cases}$$

Ví dụ 1.44. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} y\ \ z-1\ +xy=0 \\ y\ \ 2x-5\ +x\ \ x-z\ =0 \\ \ 2x-5\ ^2+\ \ x-z\ ^2=\ \ z-1\ ^2+y^2 \end{cases}.$$

b.Ứng dụng tương giao giữa đường thẳng và các đường conic

Một số hệ phương trình mà mỗi phương trình của hệ thể hiện dưới dạng biểu thức của các đường cong có thể biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ, do đó ta có thể xét sự tương giao giữa chúng để giải hệ phương trình ban đầu.

Dưới đây là một số ví dụ minh họa.

Ví dụ 1.45. *Xácđịnh tham số thực m để hệ*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x + y = m \end{cases}.$$

có 2 nghiệm phân biệt thỏa $x_1x_2 + y_1y_2 > 0.$

Ví dụ 1.46. *Xácđịnh tham số thực m để hệ*

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 16 \\ x - my = m \end{cases}.$$

có 2 nghiệm phân biệt thỏa $(x_1 - x_2)^2 + 4(y_1 - y_2)^2 = 3.$

Ví dụ 1.47. *Giải hệ phương trình ẩn (a;b;c;d) sau:*

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c + d = 3 \\ ac + bd + cd = \dfrac{9 + 6\sqrt{2}}{4} \end{cases}.$$

Một số ví dụ tham khảo với phương pháp giải tương tự:

Ví dụ 1.48. *Xác định tham số thực m để hệ có nghiệm*

$$x > 0, y > 1: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ 2x - y = m \end{cases}.$$

Ví dụ 1.49. *Xác định tham số thực m để hệ*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ 2x + my = m + 2 \end{cases}.$$

có 2 nghiệm phân biệt và $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$ *đạt giá trị nhỏ nhất*

Ví dụ 1.50. *Xác định tham số thực m để hệ sau đây có 2 nghiệm:*

$$\begin{cases} x+y\ {}^{2}=4 \\ x^2+y^2=2\ 1+m \end{cases}.$$

Ví dụ 1.51. *Biện luận theotham số thực m số nghiệm của hệ phương trình:*

$$\begin{cases} |x|+|y|=4 \\ x^2+y^2=m^2 \end{cases}.$$

Nhận xét: Như vậy qua các ví dụ trên ta thấy rằng kiến thức hình học không chỉ để giải các bài toán hình học mà còn vận dụng vào cả các bài toán đại số. Trong đó việc ứng dụng phương pháp vectơ để giải các bài toán phương trình, bất phương trình và hệ phương trình cho ta lời giải ngắn gọn hơn, dễ hiểu hơn. Ngoài ra, kiến thức hình học giải tích trong mặt phẳng phát huy một cách mạnh mẽ trong việc ứng dụng sự tương giao giữa đường thẳng và các đường conic để giải quyết các bài toán về biện luận theo tham số số nghiệm của phương trình, bất phương trình và hệ phương trình, giúp chúng ta nắm bắt bài toán một cách nhanh chóng nhờ hình vẽ trực quan. Tuy nhiên, những bài toán ứng dụng phương pháp hình học này thường không thể hiện một cách tường minh, hoặc phải sau những phép biến đổi mới phát hiện ra chúng. Do đó đòi hỏi tính tư duy, sáng tạo của học sinh trong học toán.

2.2. ỨNG DỤNG HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG KHÔNG GIAN

Như vậy ở phần 2.1 trên ta thấy được việc ứng dụng hình học vào giải các bài toán đại số thì lời giải trở nên đơn giản và sáng sủa hơn rất nhiều. Bên cạnh vận dụng những kiến thức hình học giải tích trong mặt phẳng thì có những bài toán chúng ta có thể ứng dụng kiến thức hình học giải tích trong không gian để giải.

2.2.1. Ứng dụng vào giải phương trình

a. Ứng dụng phương pháp vectơ

Để sử dụng tọa độ vectơ trong không gian giải phương trình ta cần nắm vững các kiến thức cơ bản sau đây:

Trong không gian $Oxyz$, xét các vectơ:

$$\vec{u} = (x_1, y_1, z_1),\ \vec{v} = (x_2, y_2, z_2).$$

Ta có:

- $\left|\vec{u}\right| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$.
- $\vec{u}.\vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.
- $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$.
- $\left[\vec{u}, \vec{v}\right] = (x_1y_2 - x_2y_1; y_1z_1 - y_2z_1; z_1x_2 - z_2x_1)$.
- $\sin(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\left|\left[\vec{u}, \vec{v}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|}$.

Bất đẳng thức:

- $\vec{u}.\vec{v} \le \left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|$, đẳng thức xảy ra khi có $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 1$, hay hai

vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng hướng, tức là:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} > 0.$$

Chuyển qua tọa độ ta có:

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \le \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}.$$

• $\vec{u}.\vec{v} \geq -|\vec{u}|.|\vec{v}|$, đẳng thức xảy ra khi có $\cos(\vec{u},\vec{v}) = -1$, hay hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ ngược hướng, tức là:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} < 0.$$

Chuyển qua tọa độ ta có:

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \geq -\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}.$$

• $|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng hướng. Chuyển qua tọa độ ta có:

$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$$
$$\geq \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 + (z_1 + z_2)^2}.$$

• $\left||\vec{u}| - |\vec{v}|\right| \leq |\vec{u} + \vec{v}|$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ ngược hướng. Chuyển qua tọa độ ta có:

$$\left|\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} - \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}\right|$$
$$\leq \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 + (z_1 + z_2)^2}.$$

• $|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}| + |\vec{w}|$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi các vectơ $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ cùng hướng. Chuyển qua tọa độ ta có:

$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} + \sqrt{x_3^2 + y_3^2 + z_3^2}$$
$$\geq \sqrt{(x_1 + x_2 + x_3)^2 + (y_1 + y_2 + y_3)^2 + (z_1 + z_2 + z_3)^2}.$$

Một cách tổng quát:

$$|\vec{u_1} + \vec{u_2} + \vec{u_3} + ... + \vec{u_n}| \leq |\vec{u_1}| + |\vec{u_2}| + |\vec{u_3}| + ... + |\vec{u_n}|.$$

Dưới đây là một số ví dụ minh họa.

Ví dụ 2.1. *Giải phương trình:*

$$\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}+4\sqrt{5-x}=12.$$

Ví dụ 2.2. *Giải phương trình:*

$$\sin x+\sqrt{2-\sin^2 x}+\sin x\sqrt{2-\sin^2 x}=3.$$

Ví dụ 2.3. *Giải phương trình:*

$$3+\cos x-\sqrt{1+\sin^2 x}+\cos x\sqrt{2-\cos^2 x}=0.$$

Một số ví dụ tham khảo với phương pháp giải tương tự:

Ví dụ 2.4. *Giải phương trình:*

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{50-3x}=12.$$

Ví dụ 2.5. *Giải phương trình:*

$$x\sqrt{3x+2}+\sqrt{4-x}=\sqrt{2\ \ x^2+1\ \ \ x+3}.$$

Ví dụ 2.6. *Giải phương trình:*

$$\cos x+\sqrt{2-\cos^2 x}+\cos x\sqrt{2-\cos^2 x}=3.$$

Ví dụ 2.7. *Giải phương trình:*

$$3\sqrt{1+2\sin^4 2x}+2\sqrt{40+\left[4\ \ \sin^6 x+\cos^6 x\ \ -1\right]^2}=5\sqrt{11}.$$

b. Ứng dụng tương giao giữa đường thẳng, mặt phẳng và mặt cầu.

Khi giải hay biện luận theo tham số của phương trình nhiều ẩn không mẫu mực thì đa số các bài toán đều ứng dụng phương pháp hình học. Một trong nhưng công cụ mạnh của hình học không gian để giải phương trình là ứng dụng tương giao giữa đường thẳng, mặt phẳng và mặt cầu.

Dưới đây là một số ví dụ minh họa.

Ví dụ 2.8. *Giải phương trình:*

$$x^2+y^2+z^2+x+y+z=6.$$

Ví dụ 2.9. *Xác định tham số thực m để phương trình sau có đúng một nghiệm:*

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + y - 2z - 1 + m = 0.$$

Ví dụ 2.10. *Xác định tham số thực m để phương trình sau vô nghiệm:*

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + y - 5z + 5 - m = 0.$$

Một số ví dụ tham khảo với phương pháp giải tương tự:

Ví dụ 2.11. *Giải phương trình:* $x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z = 2$.

Ví dụ 2.12. *Chứng minh rằng phương trình:*

$x^2 + y^2 + z^2 - y - 6 = 0$ *có duy nhất nghiệm.*

Ví dụ2.13. *Xácđịnh tham số thực m để phương trình sau có hai nghiệm phân biệt:*

$$x^2 + y^2 + z^2 + 5x - y + 4z + 7 - m = 0.$$

2.2.2. Ứng dụng vào giải bất phương trình

a. Ứng dụng phương pháp vectơ

Tương tự như giải bất phương trình chứa căn thức bậc hai ứng dụng hình học giải tích trong mặt phẳng. Trong không gian Oxyz chúng ta thiết lập các vectơ có tọa độ thích hợp sao cho độ dài của các vectơ tương ứng bằng các căn bậc hai đã cho và tổng hoặc hiệu các vectơ bằng vectơ còn lại. Từ đó sử dụng bất đẳng thức về độ dài ba cạnh của một tam giác để đi đến kết quả của bài toán.

Khi chúng ta đã thiết lập được các hệ tọa độ vectơ, thông thường các bất phương trình sẽ rơi vào những trường hợp sau:

TH1: $\left|\vec{u}+\vec{v}\right| \ge \left|\vec{u}\right| + \left|\vec{v}\right|; \left|\vec{u}\right| - \left|\vec{v}\right| \ge \left|\vec{u}-\vec{v}\right|; \vec{u}.\vec{v} \ge \left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|$,khiđóbất phương trình trở thành $\vec{u} = k\vec{v}$.

TH2: $\left|\vec{u}+\vec{v}\right| > \left|\vec{u}\right| + \left|\vec{v}\right|; \left|\vec{u}\right| - \left|\vec{v}\right| > \left|\vec{u}-\vec{v}\right|; \vec{u}.\vec{v} > \left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|$, khi đó bất phương trình vô nghiệm.

TH3: $\left|\vec{u}+\vec{v}\right| \le \left|\vec{u}\right| + \left|\vec{v}\right|; \left|\vec{u}\right| - \left|\vec{v}\right| \le \left|\vec{u}-\vec{v}\right|; \vec{u}.\vec{v} \le \left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|$, khi đó bất phương trình nghiệm đúng trên tập xác định.

Dưới đây là một số ví dụ minh họa

Ví dụ 2.14. *Giải bất phương trình:*

$$x\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x} \ge 2\sqrt{x^2+1}.$$

Ví dụ 2.15. *Giải bất phương trình:*

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{50-3x} \le 12.$$

Ví dụ 2.16.(Trích Đề thi tuyển sinh Đại học Khối A năm 2010).

Giải bất phương trình:

$$\frac{x-\sqrt{x}}{1-\sqrt{2(x^2-x+1)}} \ge 1.$$

Một số ví dụ tham khảo với phương pháp giải tương tự:

Ví dụ 2.17. *Giải bất phương trình:*

$$\sqrt{x-1}+x-3 \le \sqrt{2(x-3)^2+2(x-1)}.$$

Ví dụ 2.18. *Giải bất phương trình:*

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{50-3x} \ge 12.$$

Ví dụ 2.19. *Giải bất phương trình:*

$$x\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x} \le 2\sqrt{x^2+1}.$$

b. Ứng dụng tương giao giữa đường thẳng, mặt phẳng và mặt cầu

Ứng dụng tương giao giữa đường thẳng, mặt phẳng và mặt cầu vào giải bất phương trình là khó vận dụng nên chúng tôi không khảo sát chủ đề này trong luận văn.

2.2.3. Ứng dụng vào giải hệ phương trình

a. Ứng dụng phương pháp vectơ

Khi gặp các bài toán giải hệ phương trình nhiều ẩn, để ứng dụng phương pháp vectơ, tùy từng bài cụ thể ta xác định các vectơ thích hợp và ứng dụng các tính chất của vectơ, công thức về tọa độ để giải.

Dưới đây là một số ví dụ minh họa

Ví dụ 2.20. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=1 \\ x^3+y^3+z^3=1 \end{cases}.$$

Ví dụ 2.21. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2+(3-z)^2}+\sqrt{y^2+z^2+(3-x)^2}=2\sqrt{6} \\ \sqrt{y^2+z^2+(3-x)^2}+\sqrt{z^2+x^2+(3-y)^2}=2\sqrt{6} \\ \sqrt{z^2+x^2+(3-y)^2}+\sqrt{x^2+y^2+(3-z)^2}=2\sqrt{6} \end{cases}.$$

Một số ví dụ tham khảo với phương pháp giải tương tự:

Ví dụ 2.22. *Giải hệ phương trình:* $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x^2+y^2+z^2=3. \\ x^3+y^3+z^3=3 \end{cases}$

Ví dụ 2.23. *Giải hệ phương trình:* $\begin{cases} x^4+y^4+z^4=1 \\ x^2+y^2+2z^2=\sqrt{7} \end{cases}.$

b. Ứng dụng tương giao giữa đường thẳng, mặt phẳng và mặt cầu.

Khi giải hay biện luận theo tham số của hệ phương trình nhiều ẩn không mẫu mực thông thường giải bằng phương pháp đại số dài dòng, tính toán phức tạp. Nhưng nếu khéo léo chuyển qua phương pháp hình học thì bài toán trở nên dễ dàng hơn rất nhiều.Một trong nhưng công cụ mạnh của hình học để giải hệ phương trình là ứng dụng tương giao giữa đường thẳng, mặt phẳng và mặt cầu.

Dưới đây là một số ví dụ minh họa.

Ví dụ 2.24. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z=0 \\ 3x+2y-2z-8=0 \\ 3x+3y-4z-12=0 \end{cases}.$$

Ví dụ 2.25. *Xác định tham số thực m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:*

$$\begin{cases} \sqrt{x-1}+\sqrt{y-2}+\sqrt{z-3}=m \\ x+y+z-m-6=0 \end{cases}.$$

Ví dụ 2.26. *Xác định tham số thực m sao cho hệ phương trình:*

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ (x-2)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=9 \\ 2x-y+z=m \end{cases}$$

có hai nghiệm $(x_1;y_1;z_1)$ và $(x_2;y_2;z_2)$ sao cho biểu thức $(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2$ đạt giá trị lớn nhất.

Một số ví dụ tham khảo với phương pháp giải tương tự:

Ví dụ 2.27. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} 2013x^{2014}+2014y^{2015}+2015x^{2016}=2014 \\ x^2+y^2+z^2+2x+4y+6z-7=0 \\ 2x+y+4z-5=0 \end{cases}.$$

Ví dụ 2.28. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-6x+2y-2z+2=0 \\ x+2y+2z+6=0 \end{cases}.$$

Ví dụ 2.29. *Xác định tham số thực m để hệ phương trình sau có đúng một nghiệm:*

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ 2x-y+2z=m \end{cases}.$$

Ví dụ 2.30. *Xác định tham số thực m để hệ phương trình sau có nghiệm:*

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=16 \\ x+my+z=2m-4 \\ x-z=2 \end{cases}.$$

Nhận xét: Như vậy bên cạnh ứng dụng hình học giải tích trong mặt phẳng thì các kiến thức về hình học giải tích trong không gian cũng giúp chúng ta giải quyết một số dạng bài toán về phương trình, bất phương trình và hệ phương trình với lời giải đẹp, gọn và dễ hiểu. Tuy nhiên do việc vận dụng đòi hỏi nhiều kiến thức liên quan, ít khi chúng ta nghĩ tới những phương pháp giải này.

KẾT LUẬN

Luận văn “ Ứng dụng hình học giải tích vào giải phương trình, bất phương trình và hệ phương trình đại số” đã thực hiện được mục tiêu và nhiệm vụ đề ra, cụ thể luận văn đã đạt được các nội dung sau:

+ Hệ thống các kiến thức liên quan đến hình học giải tích trong chương trình Toán bậc trung học phổ thông.

+ Ứng dụng hình học giải tích để khảo sát một số dạng toán giải phương trình, bất phương trình và hệ phương trình đại số. Đối với mỗi lớp bài toán, đều giới thiệu phương pháp giải chung và kèm theo nhiều ví dụ minh họa, ví dụ tham khảo.

Hy vọng rằng trong thời gian đến, bản thân sẽ có điều kiện phát triển và hoàn thiện các nội dung của luận văn để có thể góp phần giải quyết được nhiều chủ đề toán thuộc chương trình Toán bậc phổ thông trung học.

Trong quá trình làm luận văn do hạn chế về thời gian và năng lực nên luận văn còn nhiều thiếu sót, rất mong nhận được ý kiến nhận xét từ quý thầy cô và các bạn để luận văn được hoàn thiện hơn.