BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

NGUYỄN THỊ NGÂN

ĐỊNH LÝ ĐIỂM BẤT ĐỘNG TRONG KHÔNG GIAN METRIC NÓN

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 60.46.01.13

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Đà Nẵng- Năm 2015

Công trình được hoàn thành tại
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

Người hướng dẫn khoa học: TS. LƯƠNG QUỐC TUYỂN

Phản biện 1: TS. Phan Đức Tuấn

Phản biện 2: TS. Trịnh Đào Chiến

Luận văn sẽ được bảo vệ trước Hội đồng chấm Luận văn tốt nghiệp thạc sĩ khoa học họp tại Đại học Đà Nẵng vào ngày 27 tháng 06 năm 2015

Có thể tìm hiểu luận văn tại:
- Trung tâm Thông tin - Học liệu, Đại học Đà Nẵng
- Thư viện trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng

LỜI MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Lý thuyết điểm bất động là một trong những lĩnh vực Toán học đóng vai trò quan trọng trong cả toán học và khoa học ứng dụng. Lý thuyết này đã đạt được một số kết quả nổi tiếng ngay từ thế kỷ XX và gắn liền với tên tuổi của các nhà Toán học lớn như Brouwer, Banach, Schauder, Kakutani, ... Một trong những hướng nghiên cứu của các nhà toán học trong lĩnh vực này là xây dựng các không gian mới, sau đó mở rộng kết quả kinh điển "Nguyên lý ánh xạ co Banach" (1992) cho các lớp ánh xạ. Cùng với ý tưởng đó, năm 2007, L.-G. Huang và X. Zhang đã đưa ra khái niệm không gian metric nón bằng cách thay hàm metric nhận giá trị thực trong không gian metric bởi một hàm nhận giá trị trong không gian định chuẩn. Sau L.-G. Huang và X. Zhang, một số tác giả khác cũng đã phát triển lý thuyết này và đạt được những kết quả sâu sắc. Bài toán điểm bất động trên không gian metric nón luôn thu hút sự quan tâm nghiên cứu của rất nhiều nhà toán học trên thế giới.

Với các lý do như trên cũng như dưới sự định hướng của thầy giáo Lương Quốc Tuyển, chúng tôi đã quyết định chọn đề tài nghiên cứu: "Định lý điểm bất động trong không gian metric nón".

2. Mục đích nghiên cứu

Nghiên cứu nhằm tìm hiểu một cách chi tiết và có hệ thống các định lý điểm bất động trên không gian metric nón.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Đề tài không đi sâu vào nghiên cứu ứng dụng của các định lý điểm bất động mà chỉ trình bày khái niệm nón, một số tính chất cơ bản của nón trong không gian Banach, khái niệm không gian metric nón, cuối cùng là trình bày và chứng minh lại các định lý điểm bất động đã có trong bài báo: "Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings" của L.-G. Huang và X. Zhang một cách chi tiết và có hệ thống.

4. Phương pháp nghiên cứu

Tham khảo tài liệu, hệ thống hóa các kiến thức. Thu thập các bài báo khoa học của các tác giả nghiên cứu liên quan đến "Định lý điểm bất động trong không gian metric nón". Thể hiện tường minh các kết quả nghiên cứu trong đề tài. Trao đổi và thảo luận với giáo viên hướng dẫn.

5. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài

Đề tài có ý nghĩa về mặt lý thuyết, có thể sử dụng như một tài liệu tham khảo dành cho học viên, sinh viên và những người quan tâm về lý thuyết điểm bất động.

6. Cấu trúc luận văn

Luận văn bao gồm hai chương chính

Chương 1: Các kiến thức chuẩn bị. Chương này trình bày các kiến thức cơ bản liên quan đến không gian metric, không gian định chuẩn.

Chương 2 : Định lý điểm bất động trong không gian metric nón. Chương này trình bày chi tiết và có hệ thống các khái niệm, tính chất về nón trong không gian Banach, không gian metric nón và một số định lý điểm bất động trong không gian metric nón.

CHƯƠNG 1
CÁC KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong chương này, chúng tôi trình bày một số khái niệm, tính chất của không gian metric, không gian định chuẩn và nguyên lý ánh xạ co Banach. Đây là những kiến thức cơ sở nhằm phục vụ cho chương sau của luận văn. Hầu hết các kết quả ở đây được tham khảo trong cuốn sách "Tôpô đại cương - Độ đo và tích phân" của tác giả Nguyễn Xuân Liêm.

1.1. KHÔNG GIAN METRIC

Định nghĩa 1.1.1. Cho X là một tập khác rỗng. Ta gọi ánh xạ

$$\begin{aligned} d : X \times X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto d(x, y) \end{aligned}$$

là một *metric* trên X nếu d thỏa mãn ba tiên đề sau đây với mọi $x, y, z \in X$.

(1) $d(x, y) \geq 0$,

$d(x, y) = 0$ khi và chỉ khi $x = y$;

(2) $d(x, y) = d(y, x)$;

(3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Khi đó, tập X cùng với metric d đã cho được gọi là *không gian metric* và kí hiệu (X, d).

Ví dụ 1.1.2. Cho $X = \mathbb{R}$ và d là ánh xạ được xác định bởi

$$\begin{aligned} d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto d(x, y) = |x - y|. \end{aligned}$$

Khi đó, d là một metric trên $\mathbb{R}$ và (X, d) là một không gian metric.

Ví dụ 1.1.3. Cho $X = \mathbb{R}^k$ và d là ánh xạ được xác định bởi

$$\begin{aligned} d : X \times X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} |x_i - y_i|^2}, \end{aligned}$$

trong đó $x = (x_1, x_2, \ldots, \; x_k), y = (y_1, y_2, \ldots, y_k) \in X$. Khi đó, d là một metric trên X và (X, d) là một không gian metric.

Ví dụ 1.1.4. Gọi $C_{[a,b]}$ là tập hợp các hàm số thực liên tục trên $[a, b]$. Khi đó, $C_{[a,b]}$ là một không gian metric với metric

$$d(x, y) = \sup_{a \le t \le b} |x(t) - y(t)|, x, y \in C_{[a,b]}.$$

Định nghĩa 1.1.5. Cho (X, d) là một không gian metric và $\{x_n\}$ là một dãy trong X. Ta nói rằng $\{x_n\}$ *hội tụ* đến phần tử $x \in X$ nếu

$$\lim_{n \to \infty} d(x_n, x_0) = 0.$$

Khi đó, x_0 được gọi là *điểm giới hạn* của dãy $\{x_n\}$ và ta viết

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \text{ hay } x_n \to x_0.$$

Như vậy, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ khi và chỉ khi với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}^*$ sao cho

$$d(x_n, x_0) < \varepsilon \text{ với mọi } n \ge n_0.$$

Định lý 1.1.6. *Cho $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ là các dãy trong không gian metric (X, d). Khi đó,*

(1) Giới hạn của một dãy hội tụ là duy nhất.

(2) Nếu dãy $\{x_n\}$ hội tụ đến x, thì mọi dãy con $\{x_{n_k}\}$ của nó cũng hội tụ đến x.

(3) Nếu $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$ và $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = y$, thì

$$\lim_{n \to \infty} d(x_n, y_n) = d(x, y).$$

Định nghĩa 1.1.7. Cho (X, d) là một không gian metric, $x_0 \in X$, $r > 0$ và E, F là các tập con của X. Khi đó,

(1) Tập hợp

$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$$

được gọi là *quả cầu mở* tâm x_0, bán kính r.

(2) Tập hợp

$$B[x_0, r] = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}$$

được gọi là *quả cầu đóng* tâm x_0, bán kính r.

(3) Điểm x_0 được gọi là một *điểm trong* của E và E được gọi là *lân cận* của x_0 nếu tồn tại $r > 0$ sao cho

$$B(x_0, r) \subset E.$$

(4) E được gọi là *tập mở* nếu mỗi điểm của E đều là điểm trong của E.

(5) Hợp của tất cả các tập mở chứa trong E được gọi là *phần trong* của E, kí hiệu là $IntE$.

(6) F được gọi là *tập đóng* nếu $X \backslash F$ là tập mở.

(7) Giao của tất cả các tập đóng chứa F được gọi là *bao đóng* của F, kí hiệu là $\overline{F}$.

Nhận xét 1.1.8. Cho X là một không gian metric, E, F là các tập con của X. Khi đó, các khẳng định sau đây là đúng.

(1) Các tập X và $\emptyset$ là những tập vừa đóng, vừa mở.

(2) Mỗi hình cầu mở là một tập mở, mỗi hình cầu đóng là một tập đóng.

(3) $IntE$ là một tập mở và là tập mở lớn nhất chứa trong E, $\overline{F}$ là một tập đóng và là tập đóng bé nhất chứa F.

(4) E mở $\Longleftrightarrow \text{Int}E = E$.

(5) F đóng $\Longleftrightarrow \overline{F} = F$.

(6) Nếu $E \subset F$, thì $IntE \subset IntF$ và $\overline{E} \subset \overline{F}$.

Định lý 1.1.9. *Trong không gian metric X, các khẳng định sau là đúng.*

(1) Hợp của một họ tùy ý các tập mở là một tập mở.

(2) Giao của hữu hạn các tập mở là một tập mở.

(3) Giao của một họ tùy ý các tập đóng là một tập đóng.

(4) Hợp của một họ hữu hạn các tập đóng là một tập đóng.

Định lý 1.1.10. *Giả sử (X, d) là một không gian metric và $F \subset X$. Khi đó, F là một tập đóng khi và chỉ khi với mọi dãy $\{x_n\} \subset F$ mà $x_n \to x \in X$, ta đều có $x \in F$.*

Định lý 1.1.11. *Cho (X, d) là không gian metric, $F \subset X$ và $x \in X$. Khi đó, $x \in \overline{F}$ khi và chỉ khi với mỗi lân cận mở U của x, ta đều có $U \cap F \neq \emptyset$.*

Định lý 1.1.12. *Cho (X, d) là không gian metric, $E \subset X$ và $x \in X$. Khi đó, $x \in \overline{E}$ khi và chỉ khi tồn tại $\{x_n\} \subset E$ sao cho $x_n \to x$.*

Định nghĩa 1.1.13. Giả sử (X, d_X), (Y, d_Y) là hai không gian metric, $x_0 \in X$ và ánh xạ $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$. Khi đó,

(1) f được gọi là *liên tục tại điểm* x_0 nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $x \in X$ mà $d_X(x, x_0) < \delta$ ta đều có
$$d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

(2) f được gọi là *ánh xạ liên tục trên* X (hay *liên tục*) nếu nó liên tục tại mọi điểm x của X.

Mệnh đề 1.1.14. *Ánh xạ $f : X \to Y$ liên tục tại điểm $x \in X$ khi và chỉ khi với mọi dãy $\{x_n\} \subset X$ mà $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, ta đều có*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x).$$

Định nghĩa 1.1.15. Giả sử X, Y là hai không gian metric và song ánh $f : X \to Y$. Khi đó, f được gọi là một phép đồng phôi nếu f và f^{-1} đều là những ánh xạ liên tục.

Hai không gian metric X và Y gọi là đồng phôi với nhau nếu tồn tại một phép đông phôi $f : X \to Y$.

Định nghĩa 1.1.16. Cho (X, d) là một không gian metric và $\{x_n\}$ là dãy trong X. Khi đó, $\{x_n\}$ được gọi là *dãy Cauchy* (hay *dãy cơ bản*) nếu

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} d(x_m, x_n) = 0,$$

nghĩa là với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon \text{ với mọi } m, n \geq n_0.$$

Bổ đề 1.1.17. *Cho (X, d) là một không gian metric. Khi đó.*

(1) Mọi dãy hội tụ trong không gian metric đều là dãy Cauchy.

(2) Nếu $\{x_n\}$ là dãy Cauchy và có dãy con $\{x_{n_k}\}$ hội tụ đến x_0, thì $\{x_n\}$ cũng hội tụ đến x_0.

Định nghĩa 1.1.18. Không gian metric (X, d) được gọi là *không gian metric đầy đủ* nếu mọi dãy Cauchy trong X đều hội tụ trong X.

Ví dụ 1.1.19.

(1) $\mathbb{Q}$ không phải là không gian metric đầy đủ.

(2) $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ là những không gian metric đầy đủ.

(3) $\mathbb{R}^k$ là không gian metric đầy đủ.

(4) $C_{[a,b]}$ là không gian metric đầy đủ.

Bổ đề 1.1.20. *(Bổ đề Cantor) Giả sử* $\{B[x_n, r_n]\}$ *là một dãy gồm các hình cầu đóng, lồng và thắt trong không gian metric đầy đủ* X*, nghĩa là*

$$B[x_1, r_1] \supset B[x_2, r_2] \supset \ldots \supset B[x_n, r_n] \supset \ldots$$

và

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 0.$$

Khi đó, các hình cầu đó có một điểm chung duy nhất.

1.2. KHÔNG GIAN ĐỊNH CHUẨN

Định nghĩa 1.2.1. Cho E là một không gian vectơ trên trường $\mathbb{K}$. Ánh xạ

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \|x\| \end{aligned}$$

được gọi là một *chuẩn* trên E nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau với mọi $x, y \in E$, mọi $\lambda \in \mathbb{K}$.

(1) $\|x\| \geq 0,$

$\|x\| = 0$ khi và chỉ khi $x = 0$;

(2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|;$

(3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

Định lý 1.2.2. *Cho* $\|\cdot\|$ *là một chuẩn trên* X*. Với mọi* $x, y \in X$*, ta đặt*

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Khi đó, d *là một metric trên* X *thỏa mãn các điều kiện sau với mọi* $x, y, z \in X$*, mọi* $\lambda \in \mathbb{K}$*.*

(1) $d(x + z, y + z) = d(x, y),$

(2) $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y).$

Định nghĩa 1.2.3. *Không gian định chuẩn* là một không gian vectơ cùng với một chuẩn trên nó. Lúc này, metric d nói trong Định lý được gọi là *metric sinh bởi chuẩn*.

Ví dụ 1.2.4. (1) Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^k$. Với mỗi $x \in \mathbb{R}^k$, $x = (x_1,\ x_2, \dots,\ x_k)$, ta đặt

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{k} |x_i|^2\right)^{1/2}; \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{k} x_i; \quad \|x\|_2 = \max_{1\le i\le k} |x_i|.$$

Khi đó, $\|\cdot\|, \|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ là các chuẩn trên $\mathbb{R}^k$.

(2) Không gian $C_{[a,b]}$ là không gian định chuẩn với chuẩn

$$\|x\| = \sup_{t\in[a,b]} |x(t)|.$$

Định nghĩa 1.2.5. Không gian định chuẩn E được gọi là *không gian Banach* nếu nó là không gian đầy đủ với metric được sinh bởi chuẩn.

Ví dụ 1.2.6. Các không gian $\mathbb{R}^k$ và $C_{[a,b]}$ là những không gian Banach.

Định nghĩa 1.2.7. Giả sử $\{x_n\}$ là một dãy trong không gian định chuẩn E. Khi đó, tổng hình thức

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \ldots =: \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

được gọi là một *chuỗi* trong E. Ngoài ra,

(1) $s_n = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ được gọi là *tổng riêng thứ n* của chuỗi.

(2) Chuỗi được gọi là *hội tụ* nếu tồn tại $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n \in E$. Lúc này, s được gọi là *tổng* của chuỗi và ta viết

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

(3) Nếu chuỗi không hội tụ, thì ta nói nó *phân kỳ*.

Định lý 1.2.8. *Nếu chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *trong không gian định chuẩn* E *là hội tụ, thì nó thỏa mãn điều kiện với mọi* $\varepsilon > 0$, *tồn tại* $n_0 \in \mathbb{N}^*$ *sao cho với mọi* $n \geq n_0, p \geq 1$, *ta có*

$$\|s_{n+p} - s_n\| = \|x_{n+1} + \ldots + x_{n+p}\| < \varepsilon.$$

Ngược lại, nếu E *là không gian Banach, thì mọi chuỗi thỏa mãn điều kiện trên đều hội tụ.*

Định lý 1.2.9. *Nếu chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *hội tụ, thì* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Định nghĩa 1.2.10. Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ được gọi là *hội tụ tuyệt đối* nếu chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ hội tụ.

Định lý 1.2.11. *Không gian định chuẩn* E *là Banach khi và chỉ khi mọi chuỗi hội tụ tuyệt đối trong* E *đều hội tụ.*

1.3. NGUYÊN LÝ ÁNH XẠ CO BANACH

Định nghĩa 1.3.1. Cho $f : X \to X$ là một ánh xạ. Khi đó, $x_0 \in X$ được gọi là *điểm bất động* của ánh xạ f nếu $f(x_0) = x_0$.

Định nghĩa 1.3.2. Cho X là một không gian metric và ánh xạ $f : X \to X$. Khi đó, f được gọi là *ánh xạ co* trên X nếu tồn tại số $\alpha \in [0, 1)$ sao cho

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y) \text{ với mọi } x, y \in X.$$

Định lý 1.3.3. *(Nguyên lý ánh xạ co Banach) Giả sử* X *là một không gian metric đầy đủ và* $f : X \to X$ *là một ánh xạ co. Khi đó,* f *có duy nhất một điểm bất động.*

Chứng minh. Lấy tùy ý một điểm $x_0 \in X$ và đặt

$$x_{n+1} = f(x_n) \text{ với } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Ta chứng tỏ rằng $\{x_n\}$ là một dãy Cauchy trong X. Thật vậy, vì f là ánh xạ co nên tồn tại số $\alpha \in [0,1)$ sao cho với mọi $n \geq 1$, ta có

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \\ &\leq \alpha d(x_{n-1}, x_n) \\ &= \alpha d(f(x_{n-2}), f(x_{n-1})) \\ &\leq \alpha^2 d(x_{n-2}, x_{n-1}) \\ &\vdots \\ &\leq \alpha^n d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Do đó, với mọi $m \geq n$ và với mọi $\alpha \in [0,1)$, ta có

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + \ldots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq \alpha^n d(x_0, x_1) + \ldots + \alpha^{m-1} d(x_0, x_1) \\ &\leq (\alpha^n + \ldots + \alpha^{m-1}) d(x_0, x_1) \\ &\leq (\alpha^n + \alpha^{n+1} + \ldots) d(x_0, x_1) \\ &\leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Bởi vì $\alpha \in [0,1)$ nên $\alpha^n \to 0$ khi $n \to \infty$. Do đó, với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $N \in \mathbb{N}^*$ sao cho với mọi $m, n \geq N$, ta có

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_0, x_1) < \varepsilon.$$

Điều này chứng tỏ rằng $\{x_n\}$ là một dãy Cauchy trong X. Hơn nữa, vì X là một không gian metric đầy đủ nên tồn tại giới hạn $x^* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Ta có,

$$0 \leq d(x_n, f(x_n)) = d(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha^n d(x_0, x_1) \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

và ta để ý rằng các hàm f, d là liên tục, do đó

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, f(x_n)) = d(x^*, f(x^*)),$$

suy ra $d(x^*, f(x^*)) = 0$ hay $f(x^*) = x^*$. Điều này chứng tỏ rằng x^* là một điểm bất động của f.

Bây giờ, ta chứng minh rằng x^* là điểm bất động duy nhất của f. Thật vậy, giả sử x^*, y^* là các điểm bất động của f. Khi đó, với mọi $\alpha \in [0, 1)$ ta có

$$d(x^*, y^*) = d(f(x^*), f(y^*)) \leq \alpha d(x^*, y^*),$$

suy ra

$$(1 - \alpha)d(x^*, y^*) \leq 0 \text{ với mọi } \alpha \in [0, 1),$$

kéo theo

$$d(x^*, y^*) = 0.$$

Điều này chứng tỏ rằng $x^* = y^*$ và suy ra điểm bất động của f là duy nhất. $\square$

CHƯƠNG 2
ĐỊNH LÝ ĐIỂM BẤT ĐỘNG TRONG KHÔNG GIAN METRIC NÓN

Trong chương này, đầu tiên chúng tôi trình bày khái niệm về nón và chứng minh một số tính chất của nón trong không gian Banach, tiếp theo là trình bày khái niệm và một số tính chất trong không gian metric nón, cuối cùng là trình bày và chứng minh lại các định lý điểm bất động đối với ánh xạ co trong không gian metric nón đầy đủ đã có trong bài báo "Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings" của các tác giả L.-G. Huang và X. Zhang một cách chi tiết, có hệ thống.

2.1. NÓN TRONG KHÔNG GIAN BANACH

Định nghĩa 2.1.1. Cho E là một không gian Banach trên trường số thực và P là một tập con của E. Ta nói rằng P là một *nón* nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau.

(1) P là tập đóng, khác rỗng và $P \neq \{0\}$;

(2) $ax + by \in P$ với mọi $x, y \in P$, $a, b \in \mathbb{R}$ mà $a, b \geq 0$;

(3) Nếu $x \in P$ và $-x \in P$, thì $x = 0$.

Nhận xét 2.1.2. Áp dụng điều kiện (2) của Định nghĩa 2.1.1 cho trường hợp $a = b = 0$ ta suy ra rằng $0 \in P$.

Định nghĩa 2.1.3. Cho nón $P \subset E$, ta định nghĩa một quan hệ "$\leq$" đối với P như sau.

$$x \leq y \text{ khi và chỉ khi } y - x \in P.$$

Bổ đề 2.1.4. *"$\leq$" là một quan hệ thứ tự trên E.*

Ta kí hiệu $x < y$ để chỉ rằng $x \leq y$ và $x \neq y$; $x \ll y$ nếu $y - x \in IntP$.

Bổ đề 2.1.5. *Cho P là một nón trong không gian Banach E và α là một số thực dương bất kỳ. Khi đó,*

$$\alpha IntP \subset IntP,$$

nghĩa là với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$ mà $\alpha > 0$, nếu $x \in IntP$, thì $\alpha x \in IntP$.

Bổ đề 2.1.6. *Cho P là một nón trong không gian Banach E, $\alpha \in \mathbb{R}$ mà $\alpha \neq 0$ và $u, v, x, y \in E$. Khi đó,*

(1) Nếu $x \leq y$ và $\alpha > 0$, thì $\alpha x \leq \alpha y$.

(2) Nếu $x \leq y$ và $\alpha < 0$, thì $\alpha x \geq \alpha y$.

(3) Nếu $x \leq u$ và $y \leq v$, thì $x + y \leq u + v$.

Định nghĩa 2.1.7. Cho P là một nón trong không gian Banach E. Ta nói rằng P là *nón chuẩn tắc* nếu tồn tại số $K > 0$ sao cho với mọi $x, y \in E$ mà $0 \leq x \leq y$, ta đều có

$$\|x\| \leq K\|y\|.$$

Số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn tính chất trên được gọi là *hằng số chuẩn tắc* của P.

Định nghĩa 2.1.8. Cho P là một nón trong không gian Banach E. Ta nói rằng P là *nón chính quy* nếu mọi dãy tăng và bị chặn trên đều hội tụ, nghĩa là nếu $\{x_n\}$ là dãy sao cho

$$x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n \leq ... \leq y$$

với $y \in E$, thì tồn tại $x \in E$ sao cho

$$\|x_n - x\| \to 0.$$

Bổ đề 2.1.9. *Nón P trong không gian Banach E là chính quy khi và chỉ khi mọi dãy giảm và bị chặn dưới đều hội tụ.*

Định lý 2.1.10. *Mọi nón chính quy là nón chuẩn tắc.*

Bổ đề 2.1.11. *Cho P là một nón chuẩn tắc với hằng số chuẩn tắc K. Khi đó, nếu $c \in P$ và $c \ll \varepsilon$ với mọi $\varepsilon \in P$, thì $c = 0$.*

Mệnh đề 2.1.12. *Nếu K là hằng số chuẩn tắc của nón P, thì $K \geq 1$.*

Định lý 2.1.13. *Một nón chuẩn tắc chưa chắc là nón chính quy.*

Định lý 2.1.14. *Với mỗi số thực $k > 1$, tồn tại nón chuẩn tắc với hằng số chuẩn tắc $K > k$.*

Ví dụ sau đây chỉ ra rằng tồn tại những nón không chuẩn tắc.

Ví dụ 2.1.15. Cho không gian Banach $E = C^2_{[0,1]}$ với chuẩn

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty, \text{ trong đó } \|f\|_\infty = \sup_{x \in [0;1]} |f(x)|.$$

Đặt $P = \{f \in E \mid f \geq 0\}$. Khi đó, P là *nón không chuẩn tắc.*

2.2. KHÔNG GIAN METRIC NÓN

Định nghĩa 2.2.1. Cho E là không gian Banach, P là một nón trong E sao cho $IntP \neq \emptyset$ và X là một tập khác rỗng. Ta gọi ánh xạ

$$d : X \times X \longrightarrow E$$
$$(x, y) \longmapsto d(x, y)$$

là một *metric nón* trên X nếu d thỏa mãn ba tiên đề sau với mọi $x, y, z \in X$.

(1) $d(x, y) \geq 0$,

$d(x, y) = 0$ khi và chỉ khi $x = y$;

(2) $d(x, y) = d(y, x)$;

(3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Khi đó, tập X cùng với metric nón d đã cho được gọi là *không gian metric nón* và kí hiệu (X, d).

Ví dụ 2.2.2. Cho $E = \mathbb{R}^2, X = \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$,

$$P = \{(x, y) \in E \mid x, y \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$$

và ánh xạ $d : X \times X \longrightarrow E$ được xác định bởi

$$d(x, y) = (|x - y|, \alpha|x - y|).$$

Khi đó, (X, d) là một không gian metric nón.

Mở rộng ví dụ 2.2.2, ta thu được ví dụ sau.

Ví dụ 2.2.3. Cho $E = \mathbb{R}^n, X = \mathbb{R}$, $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$,

$$P = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n\}$$

và ánh xạ $d : X \times X \longrightarrow E$ được xác định bởi

$$d(x, y) = (|x - y|, \alpha_1|x - y|, \dots, \alpha_{n-1}|x - y|).$$

Khi đó, (X, d) là một không gian metric nón.

2.3. SỰ HỘI TỤ TRONG KHÔNG GIAN METRIC NÓN

Định nghĩa 2.3.1. Cho (X, d) là một không gian metric nón, $\{x_n\}$ là một dãy trong X và $x \in X$. Ta nói rằng $\{x_n\}$ là *dãy hội tụ* đến x nếu với mỗi $c \in E$ mà $0 \ll c$, tồn tại $N \in \mathbb{N}^*$ sao cho

$$d(x_n, x) \ll c \text{ với mọi } n \geq N.$$

Khi đó, x được gọi là *điểm giới hạn* của dãy $\{x_n\}$ và ta viết

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ hoặc } x_n \to x.$$

Định lý 2.3.2. *Cho (X, d) là một không gian metric nón, P là một nón chuẩn tắc với hằng số chuẩn tắc K và $\{x_n\}$ là một dãy trong X. Khi đó, $\{x_n\}$ hội tụ đến x khi và chỉ khi $d(x_n, x) \to 0$.*

Chứng minh. (1) Điều kiện cần. Giả sử $\{x_n\} \subset X$ và $x_n \to x$ trong X. Ta cần chứng minh $d(x_n, x) \to 0$ trong E. Trước hết, ta chứng minh rằng với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $c \in E$ sao cho

$$0 \ll c, K\|c\| < \varepsilon.$$

Thật vậy, bởi vì P là một nón chuẩn tắc với hằng số chuẩn tắc K nên theo Mệnh đề 2.1.12 ta suy ra $K \geq 1$. Mặt khác, vì $IntP \neq \emptyset$ nên tồn tại $c^* \in IntP$. Theo Bổ đề 2.1.5 ta suy ra

$$\frac{c^*}{n} \in IntP \text{ với mọi } n \geq 1.$$

Hơn nữa, vì $\frac{c^*}{n} \to 0$ nên với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $N \in \mathbb{N}^*$ sao cho

$$\|\frac{c^*}{n}\| < \frac{\varepsilon}{K} \text{ với mọi } n \geq N.$$

Suy ra $\|\frac{c^*}{N}\| < \frac{\varepsilon}{K}$. Đặt $c = \frac{c^*}{N}$, ta thu được

$$c \in IntP \text{ và } K\|c\| < \varepsilon.$$

Bây giờ, ta chứng minh $d(x_n, x) \to 0$ trong E. Thật vậy, với mọi $\varepsilon > 0$, theo cách chứng minh trên, tồn tại $c \in E$ sao cho

$$0 \ll c \text{ và } K\|c\| < \varepsilon.$$

Khi đó, vì $\{x_n\}$ là dãy hội tụ đến x nên tồn tại $N \in \mathbb{N}^*$ sao cho

$$d(x_n, x) \ll c \text{ với mọi } n \geq N.$$

Mặt khác, do K là hằng số chuẩn tắc của P nên ta suy ra

$$\|d(x_n, x)\| \leq K\|c\| < \varepsilon \text{ với mọi } n \geq N.$$

Điều này chứng tỏ rằng $d(x_n, x) \to 0$ trong E.

(2) Điều kiện đủ. Giả sử $d(x_n, x) \to 0$ trong E, ta chứng minh rằng $\{x_n\}$ là dãy hội tụ trong (X, d). Thật vậy, giả sử $c \in E$ sao cho $0 \ll c$, tức là $c \in IntP$. Khi đó, tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$B(c, \delta) \subset IntP.$$

Suy ra với $y \in E$ mà

$$\|c - (c - y)\| = \|y\| < \delta,$$

ta có

$$c - y \in B(c, \delta) \subset IntP.$$

Bởi vì $d(x_n, x) \to 0$ trong E nên với δ xác định như trên, tồn tại $N \in \mathbb{N}^*$ sao cho

$$\|d(x_n, x)\| < \delta \text{ với mọi } n \geq N.$$

Áp dụng cho $y = d(x_n, x)$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta suy ra

$$c - d(x_n, x) \in IntP,$$

kéo theo

$$d(x_n, x) \ll c \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*.$$

Từ đó, sử dụng Định nghĩa 2.3.1 ta suy ra $\{x_n\}$ là dãy hội tụ đến x trong (X, d). □

Bổ đề 2.3.3. *Cho (X, d) là một không gian metric nón, P là một nón chuẩn tắc với hằng số chuẩn tắc K và $\{x_n\}$ là một dãy trong X. Nếu $\{x_n\}$ hội tụ đến x và $\{x_n\}$ hội tụ đến y, thì $x = y$, nghĩa là giới hạn của dãy $\{x_n\}$ là duy nhất.*

Định nghĩa 2.3.4. Cho (X, d) là một không gian metric nón, $\{x_n\}$ là một dãy trong X. Khi đó, $\{x_n\}$ được gọi là *dãy Cauchy* trong X nếu với mỗi $c \in E$ mà $0 \ll c$, tồn tại $N \in \mathbb{N}^*$ sao cho

$$d(x_n, x_m) \ll c \text{ với mọi } n, m \geq N.$$

Định nghĩa 2.3.5. Cho (X, d) là một không gian metric nón. Khi đó, nếu mọi dãy Cauchy trong X đều hội tụ, thì (X, d) được gọi là *không gian metric nón đầy đủ.*

Ví dụ 2.3.6. Cho $E = \mathbb{R}^2$, $X = R$, $\alpha, \beta \geq 0$,

$$P = \{(x, y) \in E \mid x, y \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$$

và ánh xạ $d : X \times X \longrightarrow E$ được xác định bởi

$$d(x, y) = (\alpha|x - y|, \beta|x - y|).$$

Khi đó, (X, d) là một không gian metric nón đầy đủ.

Bổ đề 2.3.7. *Cho (X, d) là một không gian metric nón và $\{x_n\}$ là một dãy trong X. Khi đó, nếu $\{x_n\}$ hội tụ đến x, thì $\{x_n\}$ là một dãy Cauchy.*

Bổ đề 2.3.8. *Cho (X, d) là một không gian metric nón, P là một* *nón chuẩn tắc với hằng số chuẩn tắc K và $\{x_n\}$ là một dãy trong X. Khi đó, $\{x_n\}$ là dãy Cauchy khi và chỉ khi $d(x_n, x_m) \to 0$.*

Bổ đề 2.3.9. *Cho (X, d) là một không gian metric nón, P là một nón chuẩn tắc với hằng số chuẩn tắc K, $\{x_n\}, \{y_n\}$ là hai dãy trong X và $x_n \to x$, $y_n \to y$. Khi đó,*

$$d(x_n, y_n) \to d(x, y).$$

2.4. ĐỊNH LÝ ĐIỂM BẤT ĐỘNG ĐỐI VỚI ÁNH XẠ CO TRONG KHÔNG GIAN METRIC NÓN ĐẦY ĐỦ

Định lý 2.4.1. *Cho (X, d) là một không gian metric nón đầy đủ, P là một nón chuẩn tắc với hằng số chuẩn tắc K và $T : X \to X$ là ánh xạ thỏa mãn điều kiện của ánh xạ co*

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y) \text{ với mọi } x, y \in X,$$

trong đó $k \in [0, 1)$ là một hằng số. Khi đó, T có duy nhất một điểm bất động trong X và với bất kỳ $x \in X$, dãy lặp $\{T^n x\}$ hội tụ đến điểm bất động của T.

Chứng minh. Ta lấy một điểm bất kỳ $x_0 \in X$ và đặt

$$\begin{aligned}
x_1 &= Tx_0, \\
x_2 &= Tx_1 = T^2 x_0, \\
&\vdots \\
x_{n+1} &= Tx_n = T^{n+1} x_0, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Ta chứng tỏ rằng $\{x_n\}$ là một dãy Cauchy trong (X, d). Thật vậy, vì T là ánh xạ co nên tồn tại số $k \in [0, 1)$ sao cho với mọi $n \geq 1$, ta có

$$\begin{aligned}
d(x_{n+1}, x_n) &= d(Tx_n, Tx_{n-1}) \\
&\leq kd(x_n, x_{n-1}) \\
&= kd(Tx_{n-1}, Tx_{n-2}) \\
&\leq k^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \\
&\vdots \\
&\leq k^n d(x_1, x_0).
\end{aligned}$$

Do đó, với mọi $n \geq m$ và với mọi $k \in [0, 1)$, ta có

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) \ldots + d(x_{m+1}, x_m) \\
&\leq k^{n-1} d(x_1, x_0) + k^{n-2} d(x_1, x_0) + \ldots + k^m d(x_1, x_0) \\
&\leq (k^{n-1} + k^{n-2} + \ldots + k^m) d(x_1, x_0) \\
&\leq (k^m + k^{m+1} + \ldots) d(x_1, x_0) \\
&\leq \frac{k^m}{1-k} d(x_1, x_0).
\end{aligned}$$

Bởi vì $k \in [0, 1)$ nên $\dfrac{k^m}{1-k} \xrightarrow{m\to\infty} 0$, kéo theo

$$\frac{k^m}{1-k} d(x_1, x_0) \xrightarrow{m\to\infty} 0.$$

Hơn nữa, vì P là nón chuẩn tắc với hằng số chuẩn tắc K nên

$$\|d(x_n, x_m)\| \leq K \frac{k^m}{1-k} \|d(x_1, x_0)\| \to 0.$$

Suy ra

$$d(x_n, x_m) \to 0 \text{ khi } m, n \to \infty.$$

Bởi vì (X, d) là không gian metric nón nên theo Bổ đề 2.3.8 ta suy ra $\{x_n\}$ là dãy Cauchy trong (X, d). Ngoài ra, vì (X, d) là không gian metric đầy đủ nên tồn tại $x^* \in X$ sao cho $x_n \to x^*$

trong (X, d). Sử dụng Định lý 2.3.2 ta suy ra $d(x_n, x^*) \to 0$ trong E. Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned} d(Tx^*, x^*) &\leq d(Tx_n, Tx^*) + d(Tx_n, x^*) \\ &\leq kd(x_n, x^*) + d(x_{n+1}, x^*). \end{aligned}$$

Do đó, vì P là nón chuẩn tắc với hằng số chuẩn tắc K nên

$$\begin{aligned} \|d(Tx^*, x^*)\| &\leq K\|kd(x_n, x^*) + d(x_{n+1}, x^*)\| \\ &\leq K[k\|d(x_n, x^*)\| + \|d(x_{n+1}, x^*)\|] \to 0. \end{aligned}$$

Suy ra $\|d(Tx^*, x^*)\| = 0$, kéo theo $Tx^* = x^*$. Điều này chứng tỏ x^* là điểm bất động của T.

Bây giờ, ta giả sử y^* cũng là điểm bất động của T. Khi đó, với mọi $k \in [0, 1)$ ta có

$$d(x^*, y^*) = d(Tx^*, Ty^*) \leq kd(x^*, y^*).$$

Suy ra

$$(1 - k)d(x^*, y^*) \leq 0 \text{ với mọi } k \in [0, 1).$$

Do đó, $d(x^*, y^*) = 0$, kéo theo $x^* = y^*$. Như vậy, điểm bất động của T là duy nhất. □

Hệ quả 2.4.2. *Cho (X, d) là một không gian metric nón đầy đủ, P là một nón chuẩn tắc với hằng số chuẩn tắc K. Với mỗi $c \in E$ mà $0 \ll c$ và $x_0 \in X$, ta đặt*

$$B[x_0, c] = \{x \in X \mid d(x_0, x) \leq c\}.$$

Giả sử ánh xạ $T : X \to X$ thỏa mãn điều kiện của ánh xạ co

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y) \text{ với mọi } x, y \in B[x_0, c],$$

trong đó $k \in [0, 1)$ là hằng số và $d(Tx_0, x_0) \leq (1 - k)c$. Khi đó, T có duy nhất một điểm bất động trong $B[x_0, c]$.

Hệ quả 2.4.3. *Cho (X, d) là một không gian metric nón đầy đủ, P là một nón chuẩn tắc với hằng số chuẩn tắc K và $T : X \to X$ là một ánh xạ. Khi đó, nếu tồn tại $n \in \mathbb{N}^*$ và $k \in [0, 1)$ sao cho*

$$d(T^n x, T^n y) \leq kd(x, y) \text{ với mọi } x, y \in X,$$

thì T có duy nhất một điểm bất động trong X.

Định lý 2.4.4. *Cho (X, d) là một không gian metric nón đầy đủ, P là một nón chuẩn tắc với hằng số chuẩn tắc K và ánh xạ $T : X \to X$ thỏa mãn điều kiện của ánh xạ co*

$$d(Tx, Ty) \leq k[d(Tx, x) + d(Ty, y)] \text{ với mọi } x, y \in X,$$

trong đó $k \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ là hằng số. Khi đó, T có duy nhất một điểm bất động trong X và với bất kỳ $x \in X$, dãy lặp $\{T^n x\}$ hội tụ đến điểm bất động của T.

Định lý 2.4.5. *Cho (X, d) là một không gian metric nón đầy đủ, P là một nón chuẩn tắc với hằng số chuẩn tắc K và $T : X \to X$ là ánh xạ thỏa mãn điều kiện của ánh xạ co*

$$d(Tx, Ty) \leq k[d(Tx, y) + d(Ty, x)] \text{ với mọi } x, y \in X$$

trong đó $k \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ là hằng số. Khi đó, T có duy nhất một điểm bất động trong X và với bất kỳ $x \in X$, dãy lặp $\{T^n x\}$ hội tụ đến điểm bất động của T.

Ví dụ 2.4.6. Cho $E = \mathbb{R}^2$ và

$$P = \{(x, y) \in E \mid x, y \geq 0\}$$

là một nón chuẩn tắc. Giả sử

$$X = \{(x, 0) \in E \mid 0 \leq x \leq 1\} \cup (0, x) \in E \mid 0 \leq x \leq 1$$

và ánh xạ $d : X \times X \to E$ được xác định bởi

$$d((x,0),(y,0)) = \left(\frac{4}{3}|x-y|, |x-y|\right);$$
$$d((0,x),(0,y)) = \left(|x-y|, \frac{2}{3}|x-y|\right);$$
$$d((x,0),(0,y)) = d((0,y),(x,0)) = \left(\frac{4}{3}x+y, |x+\frac{2}{3}y|\right).$$

Khi đó, (X,d) là một không gian metric đầy đủ. Ngoài ra, nếu ánh xạ $T : X \to X$ được xác định bởi

$$T(x,0) = (0,x) \text{ và } T(0,x) = \left(\frac{1}{2}x, 0\right),$$

thì T thỏa mãn điều kiện của ánh xạ co với mọi $(x_1,x_2) \in X$, $(y_1,y_2) \in X$

$$d(T(x_1,x_2), T(y_1,y_2)) \leq kd((x_1,x_2),(y_1,y_2))$$

trong đó $k = \dfrac{3}{4} \in [0,1)$. Khi đó, T có duy nhất một điểm bất động $(0,0) \in X$.

Định lý 2.4.7. *Cho (X,d) là một không gian metric nón đầy đủ, P là một nón chuẩn tắc với hằng số chuẩn tắc K và $T : X \to X$ là ánh xạ thỏa mãn điều kiện của ánh xạ co*

$$d(Tx,Ty) \leq kd(x,y) + ld(y,Tx) \text{ với mọi } x,y \in X$$

trong đó $k,l \in [0,1)$ là hằng số. Khi đó, T có một điểm bất động trong X và điểm bất động của T là duy nhất khi $k+l<1$.

KẾT LUẬN

Sau một thời gian tìm hiểu, học hỏi từ những tài liệu được thầy Lương Quốc Tuyển cung cấp, tôi đã hoàn thành đề tài của mình. Đề tài đề cập đến định lý điểm bất động trong không gian metric nón. Những kết quả chính được trình bày trong khóa luận bao gồm

(1) Nhắc lại một số kiến thức về không gian metric, không gian định chuẩn, không gian Banach và nguyên lý ánh xạ co Banach.

(2) Trình bày khái niệm về nón và không gian metric nón.

(3) Trình bày và chứng minh chi tiết các định lý, mệnh đề, bổ đề, nhận xét, . . . đã có trong bài báo: "Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings" mà các tác giả đưa ra chưa được chứng minh hoặc chứng minh chưa chi tiết.

Mặc dù, tôi đã cố gắng rất nhiều trong quá trình học tập và nghiên cứu, song do ít nhiều hạn chế về thời gian và trình độ hiểu biết nên trong quá trình thực hiện luận văn không tránh khỏi những thiếu sót. Vì vậy, tôi rất mong nhận được sự chỉ bảo, dạy dỗ của quý thầy cô và sự góp ý của bạn bè để luận văn của tôi được hoàn thiện hơn.