BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

LÊ TRẦN PHƯƠNG THANH

XẤP XỈ PHÂN PHỐI CHUẨN ĐỐI VỚI DÃY BIẾN NGẪU NHIÊN UNORDERED MARTINGALE BẰNG PHƯƠNG PHÁP STEIN

Chuyên ngành: Phương pháp toán sơ cấp
Mã số : 60.46.01.13

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Đà Nẵng – Năm 2015

Công trình được hoàn thành tại

ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

Người hướng dẫn khoa học: TS. Lê Văn Dũng

Phản biện 1: TS. Cao Văn Nuôi

Phản biện 2: PGS.TS. Trần Đạo Dõng

Luận văn đã được bảo vệ trước Hội đồng chấm Luận văn tốt nghiệp Thạc sĩ Khoa học họp tại Đại Học Đà Nẵng vào ngày 27 tháng 6 năm 2015.

Có thể tìm hiểu Luận văn tại:

- Trung tâm Thông tin - Học liệu, Đại học Đà Nẵng
- Thư viện trường Đại học Sư Phạm, Đại học Đà Nẵng

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Xác suất là một bộ phận của toán học nghiên cứu các hiện tượng ngẫu nhiên. Nói một cách đại khái thì hiện tượng ngẫu nhiên là hiện tượng ta không thể nói trước nó xảy ra hay không xảy ra khi thực hiện một lần quan sát. Tuy nhiên, nếu tiến hành quan sát khá nhiều lần một hiện tượng ngẫu nhiên trong những hoàn cảnh như nhau, thì trong nhiều trường hợp ta có thể rút ra được những kết luận khoa học về hiện tượng này.

Ngày nay lý thuyết xác suất là lĩnh vực toán học có cơ sở lý thuyết chặt chẽ và có nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực hoạt động khác nhau của con người từ âm nhạc tới vật lý, từ văn học tới thống kê xã hội, từ cơ học tới thị trường chứng khoán, từ dự báo thời tiết tới kinh tế, từ nông học tới y học.

Lý thuyết xác suất trong nửa đầu thế kỷ 20 đã có những thành tựu vượt bậc trong việc lập công thức và chứng minh các định lý giới hạn cổ điển như: Luật số lớn, Định lý giới hạn trung tâm, Luật loga lặp cho tổng các biến ngẫu nhiên độc lập. Phương pháp cổ điển chủ yếu dựa vào phép biến đổi Fourier. Tất cả các định lý đều liên quan đến tổng các biến ngẫu nhiên độc lập. Tuy nhiên quan hệ phụ thuộc thường xuất hiện nhiều hơn trong áp dụng và bắt đầu được nghiên cứu nhiều từ năm 1950. Trong trường hợp không độc lập thì phương pháp Fourier rất khó áp dụng và sự chính xác của xấp xỉ rất khó tìm ra.

Trong các định lý giới hạn của lý thuyết xác suất thì Định lý giới hạn trung tâm đóng vai trò quan trọng trong nghiên cứu thống kê và ứng dụng. Tuy nhiên bài toán thống kê nói chung không cho phép chúng ta nhiên cứu với cỡ mẫu lớn vô hạn, chính vì vậy bài toán "xấp xỉ phân phối chuẩn" cho phép chúng ta ước lượng được cỡ mẫu cần thiết để chúng ta có thể áp dụng được Định lí giới hạn trung tâm. Năm 1970, Charler Stein đã giới thiệu một phương pháp xấp xỉ phân phối chuẩn mới và được gọi là phương pháp Stein. Các kết quả nghiên cứu chủ yếu đối với dãy biến ngẫu nhiên độc lập. Trong đề tài này chúng tôi thiết lập một số kết quả về xấp xỉ phân phối chuẩn đối với dãy biến ngẫu nhiên hiệu unordered martingale. Các kết quả này là mở rộng của các kết quả đối với dãy biến ngẫu nhiên độc lập.

Với những lý do trên, tôi dưới sự hỗ trợ của giáo viên hướng dẫn TS. Lê Văn Dũng quyết định lựa chọn đề tài: **"Xấp xỉ phân bố chuẩn đối với dãy biến ngẫu nhiên unordered martingale bằng phương pháp Stein"**.

2. Mục đích nghiên cứu

Thiết lập một số kết quả về xấp xỉ phân bố chuẩn đối với dãy biến ngẫu nhiên độc lập. Một số điểm cố gắng đưa vào trong luận văn là:

+ Trình bày vắn tắt các kết quả cơ bản nhất của xác suất cổ điển.

+ Giới thiệu phương pháp Stein.

+ Thiết lập một số kết quả của bất đẳng thức Berry Essence đối với dãy biến ngẫu nhiên độc lập .

+ Thiết lập một số kết quả về xấp xỉ phân bố chuẩn đối với dãy biến ngẫu nhiên unordered martingale.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

3.1 Đối tượng nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu: Bất đẳng thức Berry Essence đối với dãy biến ngẫu nhiên.

3.2. Phạm vi nghiên cứu

Phạm vi nghiên cứu của đề tài là biến ngẫu nhiên và hàm phân phối, tính độc lập, phương pháp Stein, bất đẳng thức Berry Essence.

4. Phương pháp nghiên cứu

Thu thập các bài báo khoa học và tài liệu của các tác giả nghiên cứu liên quan đến phương pháp Stein, bất đẳng thức Berry Essence đối với dãy biến ngẫu nhiên unordered martingale.

Tham gia các buổi seminar của thầy hướng dẫn để trao đổi các kết quả đang nghiên cứu.

5. Đóng góp của đề tài

Tổng quan các kết quả của các tác giả đã nghiên cứu liên quan đến phương pháp Stein, bất đẳng thức Berry Essence đối với dãy biến ngẫu nhiên unordered martingale.

Chứng minh chi tiết các định lí, hệ quả nhằm làm cho người đọc dễ dàng tiếp cận vấn đề được đề cập.

6. Cấu trúc luận văn

Ngoài phần mở đầu, kết luận, luận văn gồm có bốn chương:

Chương 1 trình bày một số lý thuyết xác suất.

Chương 2 trình bày những kiến thức cơ bản của phương pháp Stein.

Chương 3 trình bày những kiến thức cơ bản của bất đẳng thức Berry Essence.

Chương 4 trình bày những kiến thức của bất đẳng thức Berry Essence đối với dãy biến ngẫu nhiên unordered martingale.

CHƯƠNG 1
KIẾN THỨC CƠ SỞ

1.1. KHÔNG GIAN XÁC SUẤT

1.1.1. Phép thử

1.1.2. Không gian mẫu

1.1.3. Đại số và σ-đại số

1.1.4. σ-đại số Borel

1.1.5. Độ đo xác suất

Một hàm tập hợp $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ được gọi là độ đo xác suất nếu thoã mãn 3 điều kiện sau:

+ Với mọi $A \in \mathcal{F}$, $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$.
+ $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
+ Nếu A_1,A_2 ,... ,A_n ,... đôi một không giao nhau ($A_i \cap A_i = \emptyset$ với mọi i $\neq$ j) thì

$$\mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Khi đó mỗi phần tử của $\mathcal{F}$ được gọi là biến cố và $\mathbb{P}(A)$ được gọi là xác suất xảy ra biến cố A.

Bộ ba $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ gọi là không gian xác suất.

1.2. BIẾN NGẪU NHIÊN

1.2.1. Biến ngẫu nhiên

Giả sử $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ là không gian đo đã cho.

Định nghĩa 1.1. *Hàm thực $X = X(\omega)$ xác định trên Ω lấy giá trị trên $\mathbb{R}$ gọi là hàm $\mathcal{F}$- đo được hoặc biến ngẫu nhiên nếu*

$$\{\omega\text{: } X(\omega) \ \in B\} = X^{-1}(B) \in \mathcal{F} \text{ với mỗi } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Ở đây $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ là σ-đại số các tập Borel của trục thực $\mathbb{R}$.

1.2.2. Khái niệm hầu chắc chắn

Hai biến ngẫu nhiên X và Y được gọi là bằng nhau hầu chắc chắn (h.c.c) nếu tồn tại tập $N \in \mathcal{F}$ sao cho $\mathbb{P}(N) = 0$ và $X(\omega) = Y(\omega)$ với $\omega \notin N$. Khi đó ta viết $X = Y(h.c.c)$. Một cách tổng quát, ta nói một tính chất nào đó xảy ra hầu chắc chắn trên Ω nếu nó xảy ra bên ngoài một tập N có xác suất không. Khi $X = Y(h.c.c)$ ta bảo X tương đương với Y và viết $X \sim Y$.

1.3. HÀM PHÂN PHỐI XÁC SUẤT CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN

Giả sử X là biến ngẫu nhiên xác định trên$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ nhận giá trị trên $\mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$.

1.3.1. Định nghĩa

Hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên X (kí hiệu là F(x)) được xác định bởi công thức sau:

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X < x), x \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

Nhận xét 1.1. *Theo định nghĩa, hàm phân phối của X là thu hẹp của độ đo xác xuất $\mathbb{P}^X$ trên lớp các khoảng $(-\infty; x)$, $x \in \mathbb{R}$.*

Từ đó, hàm phân phối $F(x) \equiv F_X(x)$ có các tính chất sau:

(i) đơn điệu: $x \leq y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$,

(ii) liên tục trái, có giới hạn phải tại mọi điểm,

(iii) $F(-\infty) := lim_{x\to-\infty}F(x) = 0$,

$F(+\infty) := lim_{x\to+\infty}F(x) = 1.$

Ngược lại, nếu hàm số $F(x)$ bất kỳ có ba tính chất trên thì tồn tại một độ đo xác suất μ trên $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ sao cho:

$F(x) = \mu(-\infty, x),\ x \in \mathbb{R}.$

Từ đó, nếu lấy $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là ánh xạ đồng nhất thì X là biến ngẫu nhiên trên không gian xác suất $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$ sao cho:

$$F(x) = F_X(x).$$

Độ đo xác suất μ sinh bởi hàm $F(x)$ còn được gọi là độ đo Lebesgue-Stieltjes sinh bởi F.

Từ tính chất liên tục của xác suất, ta có

$$F_X(x+0) - F_X(x) = lim_{n\to+\infty}|F_X(x+\frac{1}{n}) - F_X(x)|;$$
$$F_X(x+0) - F_X(x) = lim_{n\to\infty}\mathbb{P}|x \le X < x+\frac{1}{n}|;$$
$$F_X(x+0) - F_X(x) = \mathbb{P}(\bigcap_{n=1}^{\infty}|x \le X < x+\frac{1}{n}|);$$
$$F_X(x+0) - F_X(x) = \mathbb{P}(X = x).$$

Do đó, hàm $F_X(x)$ liên tục tại x_0 khi và chỉ khi
$\mathbb{P}(X = x_0) = 0$

Từ định nghĩa hàm phân phối, ta còn có

$$\mathbb{P}(a \le X < b) = F_X(b) - F_X(a),$$
$$\mathbb{P}(a \le X \le b) = F_X(b+0) - F_X(a),$$
$$\mathbb{P}(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a+0),$$
$$\mathbb{P}(a < X \le b) = F_X(b+0) - F_X(a+0),$$

với $a \le b$ bất kỳ.

Do đó, nếu $F_X(x)$ liên tục tại a và b thì bốn xác suất trên trùng nhau.

1.3.2.Các dạng phân phối

Hàm phân phối $F_X(x)$ được gọi là rời rạc nếu nó có dạng

$$F(x) = \sum_{i:x_i<x} p_i; \tag{1.2}$$

trong đó $p_i > 0$, $\sum_i p_i = 1$ và $S = \{\mathrm{x}_i\colon 1 \leq \mathrm{i} \leq \infty\}$ là tập con không quá đếm được của $\mathbb{R}$.

Hàm phân phối $F_X(x)$ được gọi là liên tục tuyệt đối nếu có một hàm Borel $f(x) \geq 0 \forall x$ sao cho

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, x \in \mathbb{R}. \tag{1.3}$$

Dễ thấy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1;$$

$f(x)$ được gọi là hàm mật độ xác suất.

1.4. CÁC THAM SỐ ĐẶC TRƯNG CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN

1.4.1.Kỳ vọng toán

Cho biến ngẫu nhiên X xác định trên không gian xác suất $(\Omega; \mathcal{F}; \mathbb{P})$, khả tích Lebesgue. Kỳ vọng của X, kí hiệu là $E(X)$, được xác định bởi

$$E(X) = \int_{\Omega} X d\mathbb{P}.$$

\+ Nếu Biến ngẫu nhiên rời rạc X có bảng phân phối xác suất

X	x_1	x_2	...	x_n...	...
P	p_1	p_2	...	p_n...	...

thì $E(X) = \sum\limits_k x_k p_k$.

+ Nếu Biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ xác suất $f(x)$ thì:

$$E(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx.$$

1.4.2.Phương sai

Cho Biến ngẫu nhiên X, số $Var(X) = E(X - E(X))^2$ được gọi là *phương sai* của Biến ngẫu nhiên X.

+ Nếu Biến ngẫu nhiên rời rạc X có bảng phân phối xác suất

X	x_1	x_2	...	x_n...	...
P	p_1	p_2	...	p_n...	...

thì $Var(X) = \sum\limits_k {x^2}_k p_k - \left(\sum\limits_k x_k p_k \right)^2$.

+ Nếu Biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ $f(x)$ thì :

$$Var(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \right)^2.$$

1.4.3.Độ lệch tiêu chuẩn

Độ lệch tiêu chuẩn của biến ngẫu nhiên X, kí hiệu $\sigma\left(X\right)$ được xác định bởi công thức: $\sigma\left(X\right) = \sqrt{Var(X)}$.

1.4.4.Phân phối chuẩn

Biến ngẫu nhiên X được gọi là có phân phối chuẩn với các tham số $a, \sigma^2 (\sigma > 0)$ (còn viết $X \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$), nếu hàm mật độ của nó có dạng

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}.$$

Phân phối $\mathcal{N}(0, 1)$ còn được gọi là phân phối chuẩn chính tắc. Khi đó, hàm mật độ xác suất $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, hàm phân phối xác suất
$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$

1.5. KỲ VỌNG ĐIỀU KIỆN

Định nghĩa 1.2. *Giả sử $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ là không gian xác suất, $\mathcal{G}$ là σ-đại số con của $\mathcal{F}$, X là biến ngẫu nhiên khả tích. Kỳ vọng điều kiện của biến ngẫu nhiên X với $\mathcal{G}$ đã cho là biến ngẫu nhiên M thỏa mãn các điều kiện sau:*

a) M là $\mathcal{G}$- đo được.
b) M thỏa mãn đẳng thức
$\int_A M(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \int_A X(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$, $A \in \mathcal{G}$ (1.4).
M còn được ký hiệu là $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ hoặc $\mathbb{E}^{\mathcal{G}}X$.

1.6. MARTINGALE

Định nghĩa 1.3. *Giả sử $\mathbb{N} = 0, 1, ..., N$, $(\omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ là không gian xác suất, $F_0 \subset F_1 \subset .... \subset F_n \subset F_{n+1} \subset \mathcal{F}$. Khi đó, $\{X_n, F_n, n \in \mathbb{N}\}$ là:*

- *martingale trên, nếu*

  i) X_n là $\mathcal{F}_n$ đo được;

  ii) $\mathbb{E}|X_n| < \infty, \forall n \in \mathbb{N}$;

iii) với $n = 1, 2, ...;$

$\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) \leq X_{n-1}$,*(h.c.c).*

- *martingale dưới, nếu có các điều kiện (i), (ii), và (iii') với* $n = 1, 2, ...$

  $\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) \geq X_{n-1}$, *(h.c.c).*

- *martingale, nếu có các điều kiện (i), (ii), và (iii") với* $n = 1, 2, ...$

  $\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) = X_{n-1}$, *(h.c.c).*

Nếu thay điều kiện (iii") bởi điều kiện $\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) = 0$ *với mọi* $n \geq 1$ *thì* $(X_n; n \geq 1)$ *được gọi là hiệu martingale đối với* $\mathcal{F}_n$.

CHƯƠNG 2
PHƯƠNG PHÁP STEIN

2.1. ĐỊNH LÝ GIỚI HẠN TRUNG TÂM

Cho $(X_n; n \in \mathbb{N}^*)$ là dãy biến ngẫu nhiên có kỳ vọng 0 và phương sai σ^2 hữu hạn. Đặt $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$. Kí hiệu $F_n(x)$ và $\Phi(x)$ lần lượt là hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên $S_n/\sigma\sqrt{n}$ và biến ngẫu nhiên chuẩn tắc. Định lý giới hạn trung tâm cổ điển nói rằng: *nếu $(X_n; n \in \mathbb{N}^*)$ là dãy biến ngẫu nhiên độc lập, cùng phân phối xác suất thì $F_n(x)$ hội tụ đến $\Phi(x)$ khi $n \to \infty$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.*

Tốc độ hội tụ của định lý giới hạn trung tâm được Berry[2] và Esseen[5] chỉ ra rằng

$$sup_{x\in\mathbb{R}}|F_n(x) - \Phi(x)| = O(n^{\frac{-1}{2}}) \text{ khi } n \to \infty.$$

2.2. NHỮNG KIẾN THỨC CƠ BẢN CỦA PHƯƠNG PHÁP STEIN

Cho Z là biến ngẫu nhiên có phân bố chuẩn tắc $Z \sim N(0, 1)$.
Kí hiệu: C_{bd} là tập những hàm liên tục tuyệt đối,
$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ với $E|f'(Z)| < \infty$.

Bổ đề 2.1. *Cho W là biến ngẫu nhiên thực. Khi đó, W có phân bố chuẩn tắc khi và chỉ khi*

$$Ef'(W) = E\{Wf(W)\}, \forall f \in C_{bd}. \tag{2.1}$$

Bổ đề 2.2. *Hàm f_z được xác định bởi* (2.3) *thì*

$$\omega f_z(\omega) \text{ là hàm tăng theo } \omega. \tag{2.6}$$

Hơn nữa, $\forall\ \omega, u, v$ thực, thì

$$|\omega f_z(\omega)| \le 1, |\omega f_z(\omega) - uf_z(u)| \le 1; \tag{2.7}$$

$$|f_z'(\omega)| \leq 1, |f_z'(\omega) - f_z'(v)| \leq 1; \tag{2.8}$$

$$0 < f_z(\omega) \leq min(\frac{\sqrt{2\pi}}{4}, \frac{1}{|z|}). \tag{2.9}$$

$$|(\omega+u)f_z(\omega+u)-(\omega+v)f_z(\omega+v)| \leq (|\omega|+\frac{\sqrt{2\pi}}{4})(|u|+|v|). \tag{2.10}$$

Bổ đề 2.3. *Cho hàm h bất kỳ, liên tục tuyệt đối , h:* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Nghiệm f_h *tổng quát của phương trình Stein được cho ở* (2.5) *thỏa mãn:*

$$\|f_h\| \leq min(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\|h(.) - Eh(Z)\|, 2\|h'\|); \tag{2.11}$$

$$\|f_h'\| \leq min(2\|h(.) - Eh(Z)\|, 4\|h'\|); \tag{2.12}$$

$$\|f_h''\| \leq 2\|f_h'\|. \tag{2.13}$$

CHƯƠNG 3
BẤT ĐẲNG THỨC BERRY ESSENCE ĐỐI VỚI DÃY BIẾN NGẪU NHIÊN ĐỘC LẬP

3.1. ĐẲNG THỨC STEIN ĐỐI VỚI DÃY BIẾN NGẪU NHIÊN ĐỘC LẬP

Cho $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ là những biến ngẫu nhiên độc lập thỏa mãn $E\xi_i = 0$, với $1 \leq i \leq n$, sao cho $\sum_{i=1}^{n} E\xi_i^2 = 1$,ở đây ξ_i không yêu cầu phải có phân bố giống nhau.

$$W := \sum_{i=1}^{n} \xi_i \text{ và } W^{(i)} = W - \xi_i; \tag{3.1}$$

$$K_i(t) := E\{\xi_i(I_{\{0 \leq t \leq \xi_i\}} - I_{\{\xi_i \leq t < 0\}})\}. \tag{3.2}$$

Ta có $K_i(t) \geq 0$, $\forall t$. Thật vậy:

$$K_i(t) = \begin{cases} E\xi_i & \text{nếu } 0 \leq t \leq \xi_i \\ -E\xi_i & \text{nếu } \xi_i \leq t < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow K_i(t) \geq 0.$$

và

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_i(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} E\{\xi_i(I_{\{0 \leq t \leq \xi_i\}} - I_{\{\xi_i \leq t < 0\}})\}dt;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_i(t)dt = \begin{cases} \int_{\xi_i}^{0} -E\xi_i dt & \text{nếu } \xi_i \leq t < 0 \\ \int_{0}^{\xi_i} E\xi_i dt & \text{nếu } 0 \leq t \leq \xi_i \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_i(t)dt = E\xi_i^2;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t|K_i(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} |t|E\{\xi_i(I_{\{0 \leq t \leq \xi_i\}} - I_{\{\xi_i \leq t < 0\}})\}dt;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t|K_i(t)dt = E\int_{-\infty}^{\infty} |t|\{\xi_i(I_{\{0 \leq t \leq \xi_i\}} - I_{\{\xi_i \leq t < 0\}})\}dt;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t|K_i(t)dt = \begin{cases} E\{-\int_{\xi_i}^{0} t\xi_i dt\} \\ E\{\int_0^{\xi_i} t\xi_i dt\} \end{cases}$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} |t|K_i(t)dt = \frac{1}{2}E|\xi_i|^3.$$

Vậy:

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_i(t)dt = E\xi_i^2$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} |t|K_i(t)dt = \frac{1}{2}E|\xi_i|^3. \tag{3.3}$$

Cho h là hàm đo được, $E|h(Z)| < \infty$, và $f = f_h$ là nghiệm của phương trình Stein (2.4):

$$f'(\omega) - \omega f(\omega) = h(\omega) - Eh(Z).$$

Mục đích: ước lượng

$$Eh(W) - Eh(Z) = E\{f'(W) - Wf(W)\}.$$

Vì ξ_i độc lập với $W^{(i)}$ với mỗi $1 \le i \le n$, nên:

$$E\{Wf(W)\} = \sum_{i=1}^{n} E\{\xi_i f(W)\};$$
$$E\{Wf(W)\} = \sum_{i=1}^{n} E\{\xi_i[f(W) - f(W^{(i)})]\} \text{ do } E\xi_i = 0, \forall i;$$
$$E\{Wf(W)\} = \sum_{i=1}^{n} E\{\xi_i \int_0^{\xi_i} f'(W^{(i)} + t)dt\};$$
$$E\{Wf(W)\} = \sum_{i=1}^{n} E\{-\xi_i \int_{\xi_i}^{0} f'(W^{(i)} + t)dt\};$$
$$E\{Wf(W)\} = \sum_{i=1}^{n} E\{\int_{-\infty}^{\infty} f'(W^{(i)} + t)\xi_i(I_{\{0\le t\le \xi_i\}} - I_{\{\xi_i\le t<0\}})dt\};$$

$$E\{Wf(W)\} = \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} E\{f'(W^{(i)} + t)K_i(t)\}dt. \tag{3.4}$$

Mặt khác ta có:

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} K_i(t)dt = \sum_{i=1}^{n} E\xi_i^2 = 1;$$

$$\Rightarrow Ef'(W) = Ef'(W) \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} K_i(t)dt;$$

$$Ef'(W) = \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} E\{f'(W)\}K_i(t)dt. \tag{3.5}$$

Từ (3.4) và (3.5)

$$E\{f'(W) - Wf(W)\} = \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} E\{f'(W) - f'(W^{(i)} + t)\}K_i(t)dt. \tag{3.6}$$

Phương trình (3.4) và (3.6) có vai trò chính trong chứng minh xấp xỉ chuẩn tốt. (3.4) và (3.6) đúng cả với tất cả những hàm f liên tục tuyệt đối, bị chặn. (3.6) được gọi là đẳng thức Stein đối với dãy biến ngẫu nhiên độc lập.

3.2. BẤT ĐẲNG THỨC BERRY ESSENCE ĐỐI VỚI DÃY BIẾN NGẪU NHIÊN ĐỘC LẬP

Mục đích: ước lượng $Eh(W) - Eh(Z)$ với:
+Các lớp biến ngẫu nhiên W khác nhau.
+$Z \sim N(0, 1)$.
+h: hàm trơn, thỏa mãn:

$$\|h'\| := sup_x|h'(x)| < \infty. \tag{3.7}$$

Định lý 3.1. *Giả sử tồn tại δ sao cho, với hàm h bất kỳ thỏa* *mãn điều kiện Lipschitz đều*

$$|Eh(W) - Eh(Z)| \leq \delta \|h'\| \tag{3.8}$$

thì:

$$d_W(L(W), N(0,1)) := sup_{h \in Lip(1)} |Eh(W) - Eh(Z)| \leq \delta. \tag{3.9}$$

Trong đó $Lip(1) = \{h : R \to R, \|h'\| \leq 1\}$;

$$d_K(L(W), N(0,1)) := sup_z |P(W \leq z) - \Phi(z)| \leq 2\delta^{\frac{1}{2}}. \tag{3.10}$$

Định lý 3.2. *Cho* $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ *là những biến ngẫu nhiên độc lập thỏa mãn:* $E\xi_i = 0$ *và* $E|\xi_1|^3 < \infty$ *với mỗi* $1 \leq i \leq n$, *và sao cho* $\sum_{i=1}^n E\xi_i^2 = 1$.

Khi đó ta có

$$\|F_W - \Phi\|_1 \leq 3 \sum_{i=1}^n E|\xi_i|^3;$$

và

$$\|F_W - \Phi\|_\infty \leq 2\sqrt{3 \sum_{i=1}^n E|\xi_i|^3}.$$

Trường hợp đặc biệt, ta có

$$\big|E|W| - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\big| \leq 3 \sum_{i=1}^n E|\xi_i|^3.$$

Định lý 3.3. *Cho* $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ *là những biến ngẫu nhiên độc lập*

thỏa mãn: $E\xi_i = 0$ *với mọi* $1 \leq i \leq n$ *và sao cho* $\sum_{i=1}^n E\xi_i^2 = 1$.

Khi đó Định lý 3.1 có thể áp dụng với

$$\delta = 4(4\beta_2 + 3\beta_3); \tag{3.11}$$

với

$$\beta_2 = \sum_{i=1}^{n} E\xi_i^2 I_{\{|\xi_i|>1\}} \text{ và } \beta_3 = \sum_{i=1}^{n} E|\xi_i|^3 I_{\{|\xi_i|\le 1\}}. \qquad (3.12)$$

Định lý 3.4. *Cho* $X_1, X_2, ..., X_n$ *là những biến ngẫu nhiên độc lập, có* $EX_i = 0$ *và* $EX_i^2 < \infty$ *, với mỗi* $1 \le i \le n$

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i \text{ và } B_n^2 := \sum_{i=1}^{n} EX_i^2$$

$$\xi_i = X_i/B_n \text{ và } W = S_n/B_n.$$

Khi đó ξ_i *là những biến ngẫu nhiên độc lập thỏa mãn*

$$\begin{cases} E\xi_i = \frac{1}{B_n} EX_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} E\xi_i^2 = \frac{1}{B_n^2} \sum_{i=1}^{n} EX_i^2 = 1. \end{cases}$$

và biến ngẫu nhiên $W = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$.

Xác định β_2 *và* β_3 *như trong Định lý* 3.3.

3.3. BẤT ĐẲNG THỨC BERRY ESSENCE ĐỐI VỚI DÃY BIẾN NGẪU NHIÊN PHỤ THUỘC ĐỊA PHƯƠNG

(LD1) Cho mỗi $i \in J$, $\exists A_i \subset J$ sao cho ξ_j và ξ_{A^c} là độc lập.

(LD2) Cho mỗi $i \in J$, $\exists A_i \subset B_i \subset J$ sao cho ξ_j độc lập với ξ_{A^c} và ξ_{A_i} độc lập với $\xi_{B_i^c}$.

Xác định $\eta_i = \sum_{j \in A_i} \xi_j$ và $\tau_i = \sum_{j \in B_i} \xi_j$.

Định lý 3.5. *Định lý* 3.1 *có thể áp dụng với:*

1. *Nếu (LD1) thỏa mãn*

$$\delta = 4E|\sum_{i \in J}\{\xi_i \eta_i - E(\xi_j \eta_i)\}| + \sum_{i \in J} E|\xi_i \eta_i^2|. \qquad (3.16)$$

2. *Nếu (LD2) thỏa mãn*

$$\delta = 2\sum_{i\in J}(E|\xi_i\eta_i\tau_i| + |E(\xi_i\eta_i)|E|\tau_i|) + \sum_{i\in J} E|\xi_i\eta_i^2|. \quad (3.17)$$

CHƯƠNG 4
BẤT ĐẲNG THỨC BERRY ESSENCE ĐỐI VỚI DÃY BIẾN NGẪU NHIÊN UNORDERED MARTINGALE

4.1. UNORDERED MARTINGALE

Định nghĩa 4.1. *Dãy biến ngẫu nhiên* $(X_n; n \in \mathbb{N}^*)$ *xác định trên không gian xác suất* $(\Omega; \mathcal{F}; P)$. *Đặt* $\mathcal{F}_n = \sigma(X_i : i \neq n)$. *Dãy* (X_n) *được gọi là unordered martingale nếu thỏa mãn hai điều kiện:*

(i) $E(|X_n|) < \infty$ *với mọi* n,

(ii) $E(X_n/\mathcal{F}_n) = X_{n-1}$ *với mọi* $n > 1$.

Định nghĩa 4.2. *Dãy biến ngẫu nhiên* $(X_n; n \in \mathbb{N}^*)$ *xác định trên không gian xác suất* $(\Omega; \mathcal{F}; P)$. *Đặt* $\mathcal{F}_n = \sigma(X_i : i \neq n)$. *Dãy* (X_n) *được gọi là hiệu unordered martingale nếu thỏa mãn hai điều kiện:*

(i) $E(|X_n|) < \infty$ *với mọi* n,

(ii) $E(X_n/\mathcal{F}_n) = 0$ *với mọi* $n \geq 1$.

Như vậy, nếu (ξ_n) là dãy hiệu unordered martingale thì dãy $X_n = \xi_1 + ... + \xi_n$ là dãy unordered martingale. Khái niệm hiệu unordered martingale trên được Choi và Klass đưa ra trong bài báo [3]. Khái niệm này được chúng tôi mở rộng như sau:

Định nghĩa 4.3. *Cho* m *là số nguyên không âm. Dãy biến ngẫu nhiên* $(X_n; n \in \mathbb{N}^*)$ *được gọi là hiệu m-unordered martingale nếu thỏa mãn hai điều kiện:*

i) $E(|X_j|) < \infty \ \forall j$,

ii) Với mỗi $i \geq 1$, $E(X_j/F_i) = 0$ *với mọi* $j = i+1, ..., i+m$ *trong đó* F_j *là* σ *- đại số sinh bởi các biến ngẫu nhiên* $\{\xi_i, j \leq i\}$ *và* $\{\xi_j, j > i+m\}$.

Như vậy một dãy những biến ngẫu nhiên hiệu unordered martingale là hiệu 0- unordered martingale.

4.2. ĐẲNG THỨC STEIN ĐỐI VỚI DÃY BIẾN NGẪU NHIÊN HIỆU UNORDERED MATINGALE

Trong phần này chúng tôi thiết lập đẳng thức Stein đối với dãy biến ngẫu nhiên hiệu unordered martingale và kết quả thu được hoàn toàn tương tự như trường hợp dãy biến ngẫu nhiên độc lập.

Cho $\xi_1, \xi_2, ...\xi_n$ là những biến ngẫu nhiên hiệu unordered martingale sao cho $\sum_{i=1}^n E\xi_i^2 = 1$. Đặt

$$W := \sum_{i=1}^{n} \xi_i,$$
$$W^{(i)} := W - \xi_i,$$
$$K_i(t) := E\{\xi_i(I_{\{0\le t\le \xi_i\}} - I_{\{\xi_i \le t < 0\}})\}.$$

Với h là hàm liên tục tuyệt đối sao cho $E|h(Z)| < \infty$, gọi $f = f_h$ là nghiệm của phương trình Stein. Ta có

$$E[Wf_h(W)] = E[(\sum_{i=1}^{n}\xi_i)f_h(W)] = \sum_{i=1}^{n} E[\xi_i f_h(W)]$$
$$E[Wf_h(W)] = \sum_{i=1}^{n} E[\xi_i(f(W) - f(W^{(i)}))](doE(\xi_i|F_i) = 0, \forall i)$$
$$E[Wf_h(W)] = \sum_{i=1}^{n} E[\xi_i \int_0^{\xi_i} f'(W^{(i)} + t)dt]$$
$$E[Wf_h(W)] = \sum_{i=1}^{n} E[-\xi_i \int_{\xi_i}^{0} f'(W^{(i)} + t)dt]$$
$$E[Wf_h(W)] = \sum_{i=1}^{n} E[\int_{-\infty}^{\infty} f_h'(W^{(i)} + t)\xi_i(I_{0\le t\le \xi_i} - I_{\xi \le t \le 0})dt]$$
$$E[Wf_h(W)] = \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} E[f_h'(W^{(i)} + t)]K_i(t)dt.$$

Ta lại có

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} K_i(t)dt = \sum_{i=1}^{n} E\xi_i^2 = 1$$

nên

$$Ef_h'(W) = Ef_h'(W) \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} K_i(t)dt$$

$$Ef_h'(W) = \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} E\{f_h'(W)\}K_i(t)dt.$$

Do đó,

$$E[f_h'(W) - Wf_h(W)] = \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} E\{f_h'(W) - f_h'(W^{(i)} + t)\}K_i(t)dt.$$

Vì vậy ta có:

$$Eh(W) - Eh(Z) = [f'(W) - Wf(W)]$$

$$Eh(W) - Eh(Z) = \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} E\{f'(W) - f'(W^{(i)} + t)\}K_i(t)dt.$$

Đẳng thức trên cũng được chúng tôi gọi là đẳng thức Stein đối với dãy biến ngẫu nhiên hiệu unordered martingale.

4.3. BẤT ĐẲNG THỨC BERRY ESSENCE ĐỐI VỚI DÃY BIẾN NGẪU NHIÊN HIỆU UNORDERED MARTINGALE

Định lý 4.4. *Cho $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ là những biến ngẫu nhiên unordered martingale thỏa mãn: $E|\xi_1|^3 < \infty$ với mỗi $1 \leq i \leq n$, và $\sum_{i=1}^{n} E\xi_i^2 = 1$.Đặt $W = \xi_1 + ...\xi_n$.*

Khi đó ta có

$$\|F_W - \Phi\|_1 \leq 3\sum_{i=1}^{n} E|\xi_i|^3$$

và

$$\|F_W - \Phi\|_\infty \leq 2\sqrt{3\sum_{i=1}^{n} E|\xi_i|^3}.$$

Định lý 4.5. *Cho $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ là những biến ngẫu nhiên hiệu unordered martingale thỏa mãn $\sum_{i=1}^{n} E\xi_i^2 = 1$. Khi đó*

$$\|F_W - \Phi\|_1 \leq 4(4\beta_2 + 3\beta_3)$$

và

$$\|F_W - \Phi\|_\infty \leq 2\sqrt{4(4\beta_2 + 2\beta_3)}$$

với

$$\beta_2 = \sum_{i=1}^{n} E\xi_i^2 I_{\{|\xi_i|>1\}} \text{ và } \beta_3 = \sum_{i=1}^{n} E|\xi_i|^3 I_{\{|\xi_i|\leq 1\}}.$$

Hệ quả 4.1. *Cho $X_1, X_2, ..., X_n$ là những biến ngẫu nhiên hiệu*
unordered martingale thỏa mãn $EX_i^2 < \infty$. Đặt

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i \text{ và } B_n^2 := \sum_{i=1}^{n} EX_i^2.$$

Nếu $\forall \varepsilon > 0$,

$$\frac{1}{B_n^2}\sum_{i=1}^{n} E\{X_i^2 I_{\{|X_i|>\varepsilon B_n\}}\} \to 0, \text{ khi } n \to \infty$$

thì

$$\sup_z |P(S_n/B_n \leq z) - \Phi(z)| \to 0, \text{ khi } n \to \infty.$$

Định lý 4.6. *Cho* $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ *là những biến ngẫu nhiên hiệu m-unordered martingale thỏa mãn* $\sum_{i=1}^n E\xi_i^2 = 1$. *Với mỗi i, đặt*

$$A_i = \{i+1, ...i+m\}, \eta_i = \sum_{j \in A_i} \xi_j.$$

Khi đó

$$\|F_W - \Phi\|_1 \leq \delta;$$

và

$$\|F_W - \Phi\|_\infty \leq 2\sqrt{\delta};$$

với

$$\delta = 4E|\sum_{i \in J}\{\xi_i\eta_i - E\{\xi_i\eta_i\}\}| + \sum_{i \in J} E|\xi_i\eta_i^2|;$$

trong đó $W = \xi_1 + ... + \xi_n$.

KẾT LUẬN

Các định lý giới hạn trong Lý thuyết xác suất nói chung và định lý giới hạn trung tâm nói riêng đóng vai trò quan trọng trong phát triển lý thuyết và thực hành xác suất thống kê. Đối với dãy biến ngẫu nhiên không thỏa mãn điều kiện độc lập và cùng phân phối xác suất thì tốc độ hội tụ của định lý trung tâm đóng vai trò cốt yếu trong các bài toán thống kê.

Việc nghiên cứu Bất đẳng thức Berry - Essen bằng phương pháp Stein đã được nhiều tác giả nghiên cứu, đặc biệt là nhóm nghiên cứu của giáo sư Louis Chen (Đại học Quốc gia Singapore). Trong đề tài này chúng tôi đã thiết lập được một số kết quả về tốc độ hội tụ của định lí giới hạn trung tâm đối với dãy biến ngẫu nhiên nhiên hiệu unordered martingale bằng phương pháp Stein.

Do thời gian và trình độ còn hạn chế nên luận văn chỉ mới dừng lại ở mức tìm hiểu và chứng minh các định lý, bổ đề và đưa ra được một số kết quả mới về phương pháp Stein đối với dãy biến ngẫu nhiên unordered martingale.

Trong quá trình thực hiện luận văn chắc chắn không tránh khỏi thiếu sót, vì vậy tôi rất mong nhận được những ý kiến đóng góp của thầy cô và bạn bè.