BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

NGUYỄN HẠ VY

PHƯƠNG PHÁP GIẢI VÀ SÁNG TẠO CÁC BÀI TOÁN VỀ DÃY SỐ THỰC

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp

Mã số: 60.46.01.13

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Đà Nẵng – Năm 2016

Công trình được hoàn thành tại
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

Người hướng dẫn khoa học: TS. PHẠM QUÝ MƯỜI

Phản biện 1: TS. Nguyễn Duy Thái Sơn

Phản biện 2: TS. Hoàng Quang Tuyến

Luận văn đã được bảo vệ tại Hội đồng chấm Luận văn tốt nghiệp thạc sĩ Khoa học chuyên ngành Phương pháp Toán sơ cấp tại Đại học Đà Nẵng vào ngày 13 tháng 8 năm 2016.

Tìm hiểu luận văn tại:

- Trung tâm Thông tin-Học liệu, Đại học Đà Nẵng
- Thư viện trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Dãy số là một phần cơ bản của giải tích toán học, các vấn đề cơ bản về dãy số bao gồm: khảo sát sự hội tụ, tìm giới hạn của dãy, tính đơn điệu và tính bị chặn của dãy.

Một trong những yêu cầu của đề thi học sinh giỏi các cấp là các câu hỏi trong đề thi phải mới, không được lấy ở bất kỳ nguồn tài liệu nào. Vì thế kỹ năng sáng tạo các bài toán mới về dãy số cũng là một yêu cầu không thể thiếu đối với giáo viên.

Với mong muốn nâng cao kiến thức, kỹ năng giải và sáng tạo các bài toán về dãy số, tôi quyết định chọn đề tài : "Phương pháp giải và sáng tạo các bài toán về dãy số thực" cho luận văn thạc sĩ của mình.

2. Mục đích và nhiệm vụ nghiên cứu

Luận văn tổng hợp, sắp xếp lại lý thuyết và các phương pháp giải các bài toán về dãy số. Luận văn cũng tập trung vào nghiên cứu một số cách thức sáng tạo ra các bài toán về dãy số.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

- Nghiên cứu lý thuyết dãy số thực, các phương pháp giải và sáng tạo các bài toán về dãy số thực.

4. Phương pháp nghiên cứu

Với đề tài: "Phương pháp giải và sáng tạo các bài toán về dãy số thực" tôi đã sử dụng các phương pháp nghiên cứu sau :

+ Thu thập, phân tích, so sánh, đánh giá và tổng hợp.
+ Áp dụng các phương pháp giải đã có trong bài toán về dãy.
+ Sáng tạo ra các bài toán mới dựa trên bài toán gốc.

5. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài

Đề tài có giá trị về mặt lý thuyết và thực tiễn. Có thể sử dụng làm tài liệu tham khảo cho sinh viên ngành toán, giáo viên giảng dạy toán và các đối tượng quan tâm đến các bài toán dãy số.

6. Cấu trúc của luận văn

Ngoài phần mở đầu, kết luận và tài liệu tham khảo, luận văn được chia thành ba chương, trong đó:

Chương 1: Trình bày sơ lược các kiến thức bổ trợ về dãy số, tính đơn diệu, tính bị chặn của dãy số, sự hội tụ của dãy số, khái niệm về sai phân, phương trình sai phân.

Chương 2: Trình bày các phương pháp giải các bài toán tìm số hạng tổng quát của dãy, các bài toán về tính đơn điệu, tính bị chặn của dãy số, các bài toán chứng minh sự hội tụ và tìm giới hạn của dãy số.

Chương 3: Trình bày một số phương pháp sáng tạo ra các bài toán mới như: phương pháp đặc biệt hóa, phương pháp tổng quát hóa, phương pháp đặt dãy số phụ, phương pháp khảo sát tính đơn điệu của hàm số.

Cùng với sự hướng dẫn của Thầy giáo TS. Phạm Quý Mười, tôi đã chọn đề tài "PHƯƠNG PHÁP GIẢI VÀ SÁNG TẠO CÁC BÀI TOÁN VỀ DÃY SỐ THỰC" cho luận văn thạc sĩ của mình.

CHƯƠNG 1
TỔNG QUAN VỀ DÃY SỐ THỰC

Trong chương này, trình bày các khái niệm cơ bản về dãy số, dãy đơn điệu, dãy bị chặn, giới hạn của dãy, các tính chất liên quan đến giới hạn dãy số, một số dãy đặc biệt và sơ lược về phương trình sai phân.

1.1. DÃY SỐ, DÃY ĐƠN ĐIỆU, DÃY BỊ CHẶN

Định lý 1.1. *Cho* $f : \mathrm{I} \to \mathrm{I}$ *là một ánh xạ, xét dãy số* $u_{n+1} = f(u_n), n \in \mathbb{N}$.

1) Trường hợp f tăng trên I

- Nếu $u_0 \leqslant u_1$ *thì* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *là dãy tăng, nếu* $u_0 \geqslant u_1$ *thì* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *là dãy giảm.*

2) Trường hợp f giảm trên I

- Nếu $u_0 \leqslant u_2$ *thì* $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ *là dãy tăng, nếu* $u_0 \geqslant u_2$ *thì* $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ *là dãy giảm.*

- Nếu $u_1 \leqslant u_3$ *thì* $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *là dãy tăng, nếu* $u_1 \geqslant u_3$ *thì* $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *là dãy giảm.*

1.2. GIỚI HẠN DÃY SỐ

Định lý 1.2. *Cho dãy số* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *Khi đó,*

1) Nếu $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *hội tụ đến* l_1 *và hội tụ đến* l_2 *thì* $l_1 = l_2$.

2) Nếu $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *hội tụ đến l thì mọi dãy con trích từ* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *cũng hội tụ đến l.*

3) Dãy $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *hội tụ đến l khi và chỉ khi* $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ *và* $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *hội tụ đến l.*

Định lý 1.3. ***(Định lý Weierstrass)***

1) Một dãy số đơn điệu và bị chặn thì hội tụ.

2) Một dãy số tăng và bị chặn trên thì hội tụ.

3) Một dãy số giảm và bị chặn dưới thì hội tụ.

Nhận xét

Cho dãy số $u_{n+1} = f(u_n), n \in \mathbb{N}$. Nếu f liên tục trên I và $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ thì $f(l) = l$.

1.3. CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN

1.4. SƠ LƯỢC VỀ PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN

1.4.1. Sai phân

1.4.2. Phương trình sai phân tuyến tính

1.4.3. Phương trình sai phân tuyến tính bậc nhất

Định nghĩa 1.11. Phương trình sai phân tuyến tính bậc nhất là phương trình sai phân dạng:

$$u_1 = \alpha, au_{n+1} + bu_n = f(n), n \in \mathbb{N}^*, \tag{1.4}$$

trong đó $\alpha, a \neq 0, b \neq 0$ là các hằng số và $f(n)$ là biểu thức của n cho trước.

1.4.4. Phương trình sai phân tuyến tính bậc hai

Định nghĩa 1.12. Phương trình sai phân tuyến tính cấp hai là phương trình sai phân dạng:

$$u_1 = \alpha, u_2 = \beta, au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = f(n), n \in \mathbb{N}^*, \tag{1.5}$$

trong đó a, b, c, λ, β là các hằng số, $a \neq 0, c \neq 0$ và $f(n)$ là biểu thức của n cho trước.

CHƯƠNG 2
CÁC BÀI TOÁN VỀ DÃY SỐ VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Trong chương này trình bày một số phương pháp giải các bài toán về dãy số: xét tính đơn điệu, tính bị chặn, chứng minh sự hội tụ và tìm giới hạn của dãy số.

2.1. TÌM SỐ HẠNG TỔNG QUÁT CỦA DÃY SỐ

2.1.1. Dự đoán công thức số hạng tổng quát và chứng minh bằng phương pháp quy nạp

Ví dụ 2.1.2. Tìm số hạng tổng quát của dãy (u_n), biết:

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2}, \\ u_n = 2u_{n-1}^2 - 1, n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2. \end{cases}$$

Ví dụ 2.1.6. Tìm số hạng tổng quát của dãy (u_n), biết:

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2}, \\ u_n = 4u_{n-1}^3 + 3u_{n-1}, n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2. \end{cases}$$

2.1.2. Sử dụng phương trình sai phân để tìm số hạng tổng quát

Ví dụ 2.1.9. Tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n) biết:

$$\begin{cases} u_1 = 1, \\ u_n = u_{n-1} - 2n + 5, n \geqslant 2, n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{2.9}$$

Ví dụ 2.1.11. Tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n) biết:

$$\begin{cases} u_1 = -2, \\ u_n = 3u_{n-1} - 5.3^n, n \geqslant 2, n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{2.11}$$

Ví dụ 2.1.16. Tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n) , biết:

$$\begin{cases} u_0 = 8, u_1 = 145, \\ u_n - 11u_{n-1} + 28u_{n-2} = 6.7^n, n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2. \end{cases} \tag{2.16}$$

2.1.3. Sử dụng dãy số phụ để tìm số hạng tổng quát

Ví dụ 2.1.19. Tìm số hạng tổng quát của dãy (u_n), biết:

$$\begin{cases} x_0 = 2, \\ x_{n+1} = \dfrac{2x_n + 1}{x_n + 2}, n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{2.19}$$

2.2. XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ BỊ CHẶN CỦA DÃY SỐ

2.2.1. Sử dụng phương pháp quy nạp để xét tính đơn điệu, tính bị chặn của dãy số

Ví dụ 2.2.2. Cho dãy số (a_n) , biết:

$$\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 2, \\ a_{n+1} = \sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}, n \geqslant 2, n \in \mathbb{N}. \end{cases} .$$

Chứng minh rằng (a_n) bị chặn và tăng ngặt.

2.2.2. Dựa vào số hạng tổng quát để xét tính đơn điệu, tính bị chặn của dãy số

Ví dụ 2.2.6. Cho dãy số (x_n) , biết:

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_{n+1} = \dfrac{2x_n + 1}{x_n + 2}, n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{2.27}$$

Chứng minh rằng (x_n) giảm và bị chặn.

2.2.3. Sử dụng phương pháp hàm số để xét tính đơn điệu, tính bị chặn của dãy số

Ví dụ 2.2.8. Cho dãy số (u_n) biết: $u_n = \dfrac{\ln n}{n}, n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng (u_n) giảm.

Ví dụ 2.2.10. Cho dãy số (u_n) , biết:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{2+u_n}{1+u_n}, n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}.$$

Chứng minh rằng u_{2n-1} tăng, u_{2n} giảm, (u_n) bị chặn.

2.3. CHỨNG MINH SỰ HỘI TỤ VÀ TÍNH GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

2.3.1. Sử dụng định nghĩa giới hạn dãy số

Ví dụ 2.3.2. (Đề thi học sinh giỏi quốc gia 1988) Cho (u_n) là dãy bị chặn, thỏa: $2u_{n+2} \leqslant u_{n+1} + u_n, n \in \mathbb{N}^*$. Dãy (u_n) có nhất thiết hội tụ không ?.

2.3.2. Xác định số hạng tổng quát rồi tính giới hạn

Ví dụ 2.3.7. (Đề thi học sinh giỏi tỉnh Hà Tĩnh 2013)

Cho dãy số (a_n), tìm $\lim a_n$, biết:

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{3}{4} \\ (n+2)^2 a_n = n^2 a_{n+1} - (n+1)\, a_n.a_{n+1}, n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

2.3.3. Sử dụng định lý Weierstrass để chứng minh dãy số có giới hạn

Ví dụ 2.3.9. Cho (x_n) biết:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{3}{2} \\ x_n = \sqrt{3x_{n-1} - 2}, n = 2, 3, ... \end{cases} \tag{2.31}$$

Chứng minh dãy (x_n) có giới hạn khi $n \to +\infty$, tìm giới hạn đó.
Giải Xét hàm số $f\left(x\right) = \sqrt{3x - 2}$.
Ta có: $f'\left(x\right) = \dfrac{3}{2\sqrt{3x-2}} > 0, \forall x \in \left(\dfrac{3}{2}; +\infty\right)$.
Bảng biến thiên:

x	1	$\frac{3}{2}$	2
f′(x)		+	
f(x)	1	$\nearrow$	2

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $f : (1; 2) \to (1; 2)$ và $f(x)$ đồng biến trên $(1; 2)$.
Mà $x_1 = \dfrac{3}{2}, x_2 = \sqrt{\dfrac{5}{2}} \in (1; 2), x_1 < x_2$, nên dãy (x_n) tăng.
Và $x_1 \in (1; 2)$ nên $x_n = f\left(x_{n-1}\right) \in (1; 2), n = 2, 3, ...$
Vậy (x_n) bị chặn. Suy ra (x_n) hội tụ.
Giả sử $\lim x_n = L$, cho $n \to +\infty$ trong biểu thức (2.31) ta có: $L = \sqrt{3L - 2}$. Ta được : $\left[\begin{array}{l} L = 1 \\ L = 2 \end{array}\right.$.
Vì dãy (x_n) tăng nên $L \in \left[\dfrac{3}{2}; 2\right]$. Vậy $\lim x_n = 2$.

CHƯƠNG 3
MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP SÁNG TẠO CÁC BÀI TOÁN VỀ DÃY SỐ

3.1. PHƯƠNG PHÁP ĐẶC BIỆT HÓA

3.1.1. Đặc biệt hóa phương trình sai phân cấp một

Từ phương trình sai phân cấp một: $u_n = au_{n-1} + f(n), n \in \mathbb{N}^*$, ta cho u_1, a các giá trị cụ thể, $f(n)$ là hàm số cụ thể ta được các bài toán khác nhau.

Ví dụ 3.1.2. Cho $u_1 = 2, a = 1, f(n) = 3^n$ ta có bài toán sau:

Cho dãy số (u_n) biết:

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_n = u_{n-1} + 3^n, n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*. \end{cases} \tag{3.2}$$

a) Tìm số hạng tổng quát của dãy (u_n).

b) Tính $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

Ví dụ 3.1.3. Cho $u_1 = 2016, a = 1, f(n) = \dfrac{1}{n(n+2)}$ ta có bài toán sau:

Cho dãy số (u_n) biết:

$$\begin{cases} u_1 = 2016 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{n(n+2)}, n \in \mathbb{N}^*. \end{cases} \tag{3.3}$$

Tìm số hạng tổng quát của dãy (u_n).

3.1.2. Đặc biệt hóa phương trình sai phân cấp hai

Từ phương trình sai phân cấp hai: $a.u_{n+2} + b.u_{n+1} + c.u_n = f(n), n \in \mathbb{N}^*$, ta cho u_1, u_2, a, b, c các giá trị cụ thể, $f(n)$ là hàm số cụ thể ta được các bài toán khác nhau.

Ví dụ 3.1.8. Cho $u_1 = 2, u_2 = -1, a = 1, b = -2,$
$c = -4, f(n) = 0$ ta được bài toán sau:
Cho dãy số (u_n) biết:

$$\begin{cases} u_1 = 2, u_2 = -1 \\ u_n - 2u_{n-1} - 4u_{n-2} = 0, n \geqslant 3, n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{3.8}$$

Tìm số hạng tổng quát của dãy (u_n).
Ta thấy rằng (u_n) là dãy số nguyên nên từ ví dụ 3.1.8 ta có bài toán sau:

Ví dụ 3.1.9. Cho dãy số (x_n) biết:

$$x_n = \frac{-25 + 13\sqrt{5}}{40}\left(1 + \sqrt{5}\right)^n - \frac{25 + 13\sqrt{5}}{40}\left(1 - \sqrt{5}\right)^n, n \in \mathbb{N}^*. \tag{3.9}$$

Chứng minh rằng dãy (x_n) là dãy số nguyên.

3.2. PHƯƠNG PHÁP TỔNG QUÁT HÓA

Ví dụ 3.2.2. (Đề thi học sinh giỏi tỉnh Nghệ An 2015)
Cho dãy số (u_n) biết:

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{9}\left(u_n + 2\sqrt{4u_n + 1} + 2\right), n \in \mathbb{N}^*. \end{cases} \tag{3.12}$$

Tìm số hạng tổng quát của dãy (u_n).
Trong quá trình giải ví dụ 3.2.2 ta biến đổi biểu thức truy hồi đề cho về dạng:

$$au_{n+1} + b = \alpha\left(\sqrt{au_n + b} + \beta\right)^2, \alpha > 0. \tag{3.13}$$

Biến đổi (3.13) ta được $u_{n+1} = \alpha_1.u_n + \alpha_2\sqrt{au_n + b} + \alpha_3$,
với $\alpha_1 = \alpha; \alpha_2 = \dfrac{2\alpha\beta}{a}; \alpha_3 = \dfrac{\alpha b + \alpha\beta^2 - b}{a}$.
Ta có bài toán tổng quát sau:

Bài toán 3.2.2. Cho dãy số (u_n) biết:

$$\begin{cases} u_1 = c \\ u_{n+1} = \alpha_1.u_n + \alpha_2\sqrt{au_n + b} + \alpha_3, n \in \mathbb{N}^*. \end{cases} \tag{3.14}$$

Với $\alpha_1 = \alpha > 0; \alpha_2 = \dfrac{2\alpha\beta}{a}; \alpha_3 = \dfrac{\alpha b + \alpha\beta^2 - b}{a}, ac+b \geqslant 0, a, b, c, \alpha, \beta$ là số thực bất kỳ.

Tìm số hạng tổng quát của dãy (u_n).

Ví dụ 3.2.3. (Đề thi học sinh giỏi thành phố Hà Nội 2015)

Cho dãy số (u_n) biết:

$$\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = 2u_n + \sqrt{3u_n^2 + 1}, n \in \mathbb{N}^*. \end{cases} \tag{3.15}$$

a) Chứng minh rằng $u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n, n \in \mathbb{N}^*$.

b) Chứng minh rằng u_{2015} chia hết cho 5.

Trong quá trình giải ví dụ 3.2.3 ta thấy bài toán được giải quyết khi hệ số của u_n^2 bằng 1.

Vậy ta có bài toán tổng quát sau:

Bài toán 3.2.3. Cho dãy số (u_n) biết:

$$\begin{cases} u_1 = \alpha \\ u_{n+1} = au_n + \sqrt{bu_n^2 + c}, n \in \mathbb{N}^*. \end{cases} \tag{3.17}$$

với $a > 1, a^2 - b = 1, b\alpha^2 + c \geqslant 0, a, b, c, \alpha$ là số thực bất kỳ.

Tìm số hạng tổng quát của dãy (u_n).

Ví dụ 3.2.5. (Tạp chí Toán học và tuổi trẻ T8/298)
Cho dãy số (x_n) biết:

$$\begin{cases} x_0 = 1, x_1 = \dfrac{1}{2} \\ x_{n+2} = \dfrac{x_{n+1}.x_n}{2002x_{n+1} + 2001x_n + 2000x_{n+1}x_n}, n \in \mathbb{N}^*. \end{cases} \tag{3.19}$$

Tìm số hạng tổng quát của dãy (x_n).
Từ ví dụ 3.2.5 ta thấy rằng từ phương trình sai phân cấp 2 đặt:

$$u_n = \frac{1}{x_n}, n \in \mathbb{N}^*.$$

Ta có:

$$\begin{aligned} & au_n + bu_{n-1} + cu_{n-2} = f(n) \\ \Leftrightarrow & \frac{a}{x_n} + \frac{b}{x_{n-1}} + \frac{c}{x_{n-2}} = f(n) \\ \Leftrightarrow & x_n = \frac{ax_{n-1}x_{n-2}}{f(n)\,x_{n-1}x_{n-2} - bx_{n-2} - cx_{n-1}}, n \geqslant 3, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Ta có bài toán tổng quát sau:

Bài toán 3.2.5. Cho dãy số (x_n) biết:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha, x_2 = \beta \\ x_n = \dfrac{ax_{n-1}x_{n-2}}{f(n)\,x_{n-1}x_{n-2} - bx_{n-2} - cx_{n-1}}, n \geqslant 3, n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{3.20}$$

Tìm số hạng tổng quát của dãy (x_n).

3.3. PHƯƠNG PHÁP ĐẶT DÃY SỐ PHỤ

3.3.1. Từ cấp số nhân

Cho (u_n) là một cấp số nhân với u_1 và công bội q. Ta có:

$$u_n = qu_{n-1}, n \in \mathbb{N}^*$$

Ta đặt $u_n = v_n + c, n \in \mathbb{N}^*$ ta được dãy: $v_n = qv_{n-1} + p, n \in \mathbb{N}^*$. Nhưng dãy này chưa mới, đó là phương trình sai phân cấp 1 ta đã có phương pháp giải. Tiếp tục đặt $v_n = \dfrac{1}{x_n}, n \in \mathbb{N}^*$, ta được:

$$x_n = \frac{x_{n-1}}{px_{n-1} + q}, n \in \mathbb{N}^*. \tag{3.21}$$

Ta có bài toán tổng quát sau:

Bài toán 3.3.1. Cho dãy số (x_n) biết:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha, \alpha \neq 0 \\ x_n = \dfrac{x_{n-1}}{cx_{n-1} + d}, n \geqslant 2, n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{3.22}$$

Tìm số hạng tổng quát của dãy (x_n).

Phương pháp giải

Vì $x_1 = \alpha, \alpha \neq 0$ nên $x_n \neq 0, n \in \mathbb{N}^*$.
Từ đó ta có: $x_n = \dfrac{x_{n-1}}{cx_{n-1} + d} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x_n} = c + \dfrac{d}{x_{n-1}}, n \geqslant 2, n \in \mathbb{N}$.
Đặt $v_n = \dfrac{1}{x_n}, n \in \mathbb{N}^*$, ta được: $v_n = dv_{n-1} + c, n \in \mathbb{N}^*$, với $v_1 = \dfrac{1}{\alpha}$.
Dãy (v_n) có dạng phương trình sai phân cấp 1 ta đã biết cách giải.
Tiếp tục đặt $x_n = y_n + \lambda, n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

$$x_n = \frac{x_{n-1}}{px_{n-1} + q} \Leftrightarrow y_n + \lambda = \frac{y_{n-1} + \lambda}{p\left(y_{n-1} + \lambda\right) + q}$$
$$\Leftrightarrow y_n = \frac{y_{n-1}\left(1 - p\lambda\right) - \lambda^2 p + \lambda q + \lambda}{py_{n-1} + \lambda p + q}.$$

Đặt $a = 1 - p\lambda, b = -\lambda^2 p + \lambda q + \lambda, c = p, d = \lambda p + q$, ta có:

$$y_n = \frac{ay_{n-1} + b}{cy_{n-1} + d}, n \in \mathbb{N}^*. \tag{3.23}$$

Như vậy vấn đề đặt ra ở đây là khi cho dãy số có công thức truy hồi dạng (3.23) làm sao để đưa về dạng (3.21). Từ (3.21) ta đặt

$x_n = y_n + \lambda, n \in \mathbb{N}^*$ ta được (3.23) nên muốn từ (3.23) đưa về (3.21) ta chỉ cần đặt ngược lại: $y_n = x_n - \lambda = x_n + \alpha, n \in \mathbb{N}^*$.

Đặt $y_n = x_n + \alpha, n \in \mathbb{N}^*$ thay vào (3.23) ta có:

$$x_n + \alpha = \frac{a\left(x_n + \alpha\right) + b}{c\left(x_n + \alpha\right) + d} \Leftrightarrow x_n = \frac{\left(a - \alpha c\right) x_n - c\alpha^2 + \left(a - d\right)\alpha + b}{c\left(x_n + \alpha\right) + d}.$$

Muốn đưa về được (3.21), chọn α thỏa $-c\alpha^2 + (a-d)\alpha + b = 0$.

Để phương trình trên có nghiệm thì $(a-d)^2 + 4bc \geq 0$.

Ta có bài toán tổng quát sau:

Bài toán 3.3.2. Cho dãy số (y_n) biết:

$$\begin{cases} y_1 = \alpha \\ y_n = \dfrac{ay_{n-1} + b}{cy_{n-1} + d}, n \geqslant 2, n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{3.24}$$

Trong đó $(a-d)^2 + 4bc \geq 0$.

Tìm số hạng tổng quát của dãy (y_n).

Phương pháp giải

Đặt $y_n = x_n + \alpha, n \in \mathbb{N}^*$,

với α là nghiệm của phương trình $-c\alpha^2 + (a-d)\alpha + b = 0$.

Biến đổi thu gọn về bài toán 3.3.1.

3.3.2. Từ bài toán có công thức truy hồi cấp một có dạng lượng giác

Trước tiên ta xét dãy số có công thức truy hồi cấp một có dạng công thức cos2a.

Cho dãy số (u_n) biết:

$$\begin{cases} u_1 = \alpha \\ u_{n+1} = 2u_n^2 - 1, n \in \mathbb{N}^*. \end{cases} \tag{3.26}$$

Tìm số hạng tổng quát của dãy (u_n)

Bài toán này đã được trình bày phương pháp giải ở các ví dụ 2.1.2

và 2.1.3.
Ở đây ta quan tâm đến việc biến đổi bài toán trên thành các bài toán phức tạp hơn.
Đặt $u_n = kv_n, n \in \mathbb{N}^*$, ta được: $v_{n+1} = 2kv_n^2 - \dfrac{1}{k}, n \in \mathbb{N}^*$.
Đặt $a = 2k, b = -\dfrac{1}{k}$, nên $ab = -2$. Ta có bài toán tổng quát sau:

Bài toán 3.3.3. Cho dãy số (v_n) biết:

$$\begin{cases} v_1 = \alpha \\ v_{n+1} = av_n^2 + b, n \in \mathbb{N}^*. \end{cases} \tag{3.27}$$

Trong đó $ab = -2$ hoặc $b = 0$.
Tìm số hạng tổng quát của dãy (v_n).

Phương pháp giải

Nếu $b = 0$ thì: $v_{n+1} = av_n^2 = a.a^2v_{n-1}^{2^2} = ... = a^{2^n-1}.\alpha^{2^n}, n \in \mathbb{N}^*$.
Nếu $ab = -2$ thì đặt $v_n = -bu_n, n \in \mathbb{N}^*$.
Trong bài toán 3.3.3 tiếp tục đặt $v_n = x_n + \lambda, n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

$$\begin{aligned} & v_{n+1} = a_1v_n^2 + b_1, n \in \mathbb{N}^* \\ \Leftrightarrow & x_{n+1} + \lambda = a_1(x_n + \lambda)^2 + b_1, n \in \mathbb{N}^* \\ \Leftrightarrow & x_{n+1} = a_1x_n^2 + 2a_1\lambda x_n + a_1\lambda^2 + b_1 - \lambda, n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Đặt $a = a_1, b = 2a_1\lambda, c = a_1\lambda^2 - \lambda + b_1$, ta có:

$$x_{n+1} = ax_n^2 + bx_n + c, n \in \mathbb{N}^*.$$

Tuy nhiên không phải với mọi a, b, c đều có thể đưa về bài toán 3.3.3, ta tìm mối quan hệ giữa a, b, c.
Ta có $a_1b_1 = -2$ hoặc $b_1 = 0$. Nên:
$c = a_1\lambda^2 - \lambda + b_1 = \dfrac{4a_1^2\lambda^2 - 4a_1\lambda + 4a_1b_1}{4a_1} = \dfrac{b^2 - 2b - 8}{4a}, a \neq 0$
hoặc $c = \dfrac{b^2 - 2b}{4a}, a \neq 0$.
Ta có bài toán tổng quát sau:

Bài toán 3.3.4. Cho dãy số (x_n) biết:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_{n+1} = ax_n^2 + bx_n + c, n \in \mathbb{N}^*. \end{cases} \quad (3.30)$$

Trong đó $a \neq 0, c = \dfrac{b^2 - 2b - 8}{4a}$ hoặc $c = \dfrac{b^2 - 2b}{4a}$.
Tìm số hạng tổng quát của dãy (x_n).

Phương pháp giải

Nhận xét rằng từ bài toán 3.3.3 ta đặt $v_n = x_n + \lambda, n \in \mathbb{N}^*$, ta đưa về bài toán 3.3.4 mà theo biến đổi trên ta có $\lambda = \dfrac{b}{2a}$, vậy để đưa bài toán 3.3.4 về bài toán 3.3.3 ta đặt $x_n = v_n - \dfrac{b}{2a}, n \in \mathbb{N}^*$.
Trong bài toán 3.3.4 tiếp tục đặt $x_n = \dfrac{1}{y_n}, n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

$$\frac{1}{y_{n+1}} = \frac{a}{y_n^2} + \frac{b}{y_n} + c \Leftrightarrow y_{n+1} = \frac{y_n^2}{cy_n^2 + by_n + a}, n \in \mathbb{N}^*.$$

Ta có bài toán tổng quát sau:

Bài toán 3.3.5. Cho dãy số (y_n) biết:

$$\begin{cases} y_1 = \alpha \neq 0 \\ y_{n+1} = \dfrac{y_n^2}{cy_n^2 + by_n + a}, n \in \mathbb{N}^*. \end{cases} \quad (3.33)$$

Trong đó $a \neq 0, c = \dfrac{b^2 - 2b - 8}{4a}$ hoặc $c = \dfrac{b^2 - 2b}{4a}$.
Tìm số hạng tổng quát của dãy (y_n).

Phương pháp giải

Đặt $y_n = \dfrac{1}{x_n}, n \in \mathbb{N}^*$, biến đổi đưa về bài toán 3.3.4.

Ta xét tiếp dãy số có công thức truy hồi cấp một có dạng công thức cos3a.

Cho dãy số (u_n) biết:

$$\begin{cases} u_1 = \alpha \\ u_{n+1} = 4u_n^3 \pm 3u_n, n \in \mathbb{N}^*. \end{cases} \quad (3.34)$$

Tìm số hạng tổng quát của dãy (u_n) Bài toán này đã được trình bày phương pháp giải ở các ví dụ 2.1.4, 2.1.5, 2.1.6.

Ở đây ta quan tâm đến việc biến đổi bài toán trên thành các bài toán phức tạp hơn.

Đặt $u_n = kv_n, n \in \mathbb{N}^*$, ta được: $v_{n+1} = 4k^2u_n^3 \pm 3u_n, n \in \mathbb{N}^*$.

Đặt $a = 4k^2$. Ta có bài toán tổng quát sau:

Bài toán 3.3.6. Cho dãy số (v_n) biết:

$$\begin{cases} v_1 = \alpha \\ v_{n+1} = av_n^3 \pm 3v_n, n \in \mathbb{N}^*, a > 0. \end{cases} \tag{3.35}$$

Tìm số hạng tổng quát của dãy (v_n).

Phương pháp giải

Đặt $v_n = \dfrac{2}{\sqrt{a}}u_n, n \in \mathbb{N}^*$.

Trong bài toán 3.3.6 tiếp tục đặt $v_n = x_n + \lambda, n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

$$x_{n+1} = ax_n^3 + 3a\lambda x_n^2 + 3\left(a\lambda^2 \pm 1\right)x_n + a\lambda^3 \pm 3\lambda - \lambda, n \in \mathbb{N}^*$$

Đặt $b = 3a\lambda, c = 3\left(a\lambda^2 \pm 1\right), d = a\lambda^3 \pm 3\lambda - \lambda$, ta có:

$$x_{n+1} = ax_n^3 + bx_n^2 + cx_n + d, n \in \mathbb{N}^*.$$

Tuy nhiên không phải với mọi a, b, c, d đều có thể đưa về bài toán 3.3.6, ta tìm mối quan hệ giữa a, b, c, d.

Ta có $b = 3a\lambda \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{b}{3a}, a \neq 0$. Nên ta có:

$$c = 3\left(\frac{b^2}{9a} \pm 1\right), d = \frac{b^3}{27a^2} \pm \frac{b}{a} - \frac{b}{3a}.$$

Ta có bài toán tổng quát sau:

Bài toán 3.3.7. Cho dãy số (x_n) biết:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_{n+1} = ax_n^3 + bx_n^2 + cx_n + d, n \in \mathbb{N}^*. \end{cases} \tag{3.37}$$

Trong đó $c = 3\left(\frac{b^2}{9a} \pm 1\right), d = \frac{b^3}{27a^2} \pm \frac{b}{a} - \frac{b}{3a}, a \neq 0$, b tùy ý.
Tìm số hạng tổng quát của dãy (x_n).

Phương pháp giải

Nhận xét rằng từ bài toán 3.3.6 ta đặt $v_n = x_n + \lambda, n \in \mathbb{N}^*$, để đưa về bài toán 3.3.6 mà theo biến đổi trên ta có $\lambda = \frac{b}{3a}$, vậy để đưa bài toán 3.3.7 về bài toán 3.3.6 ta đặt $x_n = v_n - \frac{b}{3a}, n \in \mathbb{N}^*$.

3.3.3. Một số ví dụ khác

Ví dụ 3.3.7. Từ ví dụ 3.1.1 ta đặt $u_n = \frac{n}{n+1} v_n, n \in \mathbb{N}^*$ ta có bài toán sau:
Cho dãy số (v_n) biết:

$$\begin{cases} v_1 = 2 \\ v_{n+1} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} v_n + \frac{(2n+3)(n+2)}{n+1}, n \in \mathbb{N}^*. \end{cases} \tag{3.39}$$

a) Tìm số hạng tổng quát của dãy (v_n).
b) Tính $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{v_n}{n^2}$.

3.4. PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ

Trong phần này chỉ khảo sát bốn hàm số $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, $f(x) = \sqrt{ax+b}, f(x) = ax^2 + bx + c, f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ để minh họa cho phương pháp này.

3.4.1. Từ hàm số $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

Với hàm số này ta có bài toán tổng quát sau:

Bài toán 3.4.1. Cho dãy số (u_n) biết:

$$\begin{cases} u_1 = \alpha \\ u_{n+1} = \dfrac{au_n + b}{cu_n + d}, n \in \mathbb{N}^*. \end{cases} \tag{3.42}$$

Xét sự hội tụ của dãy (u_n).

Chọn a, b, c, d sao cho hàm số $f(x)$ đồng biến, ta có ví dụ sau:

Ví dụ 3.4.1. Cho dãy số (u_n) biết:

$$\begin{cases} u_1 = \alpha \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2}{u_n + 2}, n \in \mathbb{N}^*. \end{cases} \tag{3.43}$$

Xét sự hội tụ của dãy (u_n).

Giải

Ta có: $u_1 = \alpha, u_2 = \dfrac{3\alpha + 2}{\alpha + 2}$.

Suy ra:

$$u_2 - u_1 > 0 \Leftrightarrow \alpha \in (-\infty; -2) \cup (-1; 2)$$

$$u_2 - u_1 < 0 \Leftrightarrow \alpha \in (-2; -1) \cup (2; +\infty)\,.$$

Xét hàm số $f\left(x\right) = \dfrac{3x + 2}{x + 2}$, $f'\left(x\right) = \dfrac{4}{\left(x + 2\right)^2} > 0, \forall x \neq 2.$

Ta có: $f\left(x\right) = x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array} \right.$

Bảng biến thiên:

x	-∞		-2	$-\frac{6}{5}$	-1	2	+∞
f′(x)		+	‖		+		
f(x)	3	↗	+∞ ‖ -∞	-2	-1	2	↗ 3

- Trường hợp 1: $u_1 = \alpha \in (2; +\infty)$

Ta có: $f : (2; +\infty) \to (2; 3)\,, (2; 3) \subset (2; +\infty)$.
Ta có: $u_1 \in (2; +\infty)$ nên $u_n \in (2; 3)\,, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Vậy dãy (u_n) bị chặn.
Mặt khác $u_1, u_2 \in (2; +\infty)$, $u_1 > u_2$ mà hàm số f(x) đồng biến trên $(2; +\infty)$ nên (u_n) là dãy số giảm.
Vậy dãy (u_n) hội tụ. Giả sử $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.
Trong biểu thức (3.43) cho $n \to +\infty$ ta có: $\dfrac{3l+2}{l+2} = l \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} l = -1 \\ l = 2 \end{array}\right.$.
mà $u_n \in (2; 3)\,, \forall n \in \mathbb{N}^*$, nên $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

- Trường hợp 2: $u_1 = 2$

Ta có: $u_2 = 2$, quy nạp ta có: $u_n = 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

- Trường hợp 3: $u_1 = \alpha \in (-1; 2)$

Ta có: $f : (-1; 2) \to (-1; 2)$.
Ta có: $u_1 \in (-1; 2)$ nên $u_n \in (-1; 2)\,, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Vậy dãy (u_n) bị chặn.
Mặt khác $u_1, u_2 \in (-1; 2)$, nên $u_1 < u_2$ mà hàm số f(x) đồng biến trên (-1;2) nên (u_n) là dãy số tăng.
Vậy dãy (u_n) hội tụ. Giả sử $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.
Trong biểu thức (3.43) cho $n \to +\infty$ ta có: $\dfrac{3l+2}{l+2} = l \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} l = -1 \\ l = 2 \end{array}\right.$.
Mà $u_n \in (-1; 2)\,, \forall n \in \mathbb{N}^*$, (u_n) là dãy tăng nên $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

- Trường hợp 4: $u_1 = -1$

Ta có: $u_2 = -1$, quy nạp ta có: $u_n = -1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$.

- Trường hợp 5: $u_1 = \alpha \in (-\infty; -2) \cup \left(-2; -\dfrac{6}{5}\right)$

Ta có: $u_1 \in (-\infty; -2) \cup \left(-2; -\dfrac{6}{5}\right)$.
Nên $u_2 \in (-\infty; -2)$, $u_3 \in (3; +\infty)$.
Suy ra: $u_n \in (2; 3) \forall n \geqslant 4, n \in \mathbb{N}$, vậy (u_n) bị chặn.
Mặt khác $u_3, u_4 \in (2; +\infty)$, nên $u_3 > u_4$ mà hàm số f(x) đồng biến trên $(2; +\infty)$ nên dãy (u_n) là giảm từ số hạng thứ 3 trở đi .
Vậy dãy (u_n) hội tụ. Giả sử $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$.
Trong biểu thức (3.43) cho $n \to +\infty$ ta có: $\dfrac{3l+2}{l+2} = l \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} l = -1 \\ l = 2 \end{array}\right.$.
mà $u_n \in (2; 3), \forall n \geqslant 4, n \in \mathbb{N}$, nên $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$.

- Trường hợp 6: $u_1 = \alpha \in \left(-\dfrac{6}{5}; -1\right)$

Ta có: $u_1 = \alpha \in \left(-\dfrac{6}{5}; -1\right)$, giả sử $u_n \in \left(-\dfrac{6}{5}; -1\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Suy ra (u_n) bị chặn dưới.
Mặt khác $u_1, u_2 \in \left(-\dfrac{6}{5}; -1\right), u_1 > u_2$, f(x) đồng biến trên $\left(-\dfrac{6}{5}; -1\right)$ nên dãy (u_n) giảm.
Vậy (u_n) hội tụ. Giả sử $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$.
Trong biểu thức (3.43) cho $n \to +\infty$ ta có: $\dfrac{3l+2}{l+2} = l \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} l = -1 \\ l = 2 \end{array}\right.$ *(vô lý)*.
Vì (u_n) giảm và $u_n \in \left(-\dfrac{6}{5}; -1\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Vậy phải $\exists n_0, u_{n_0} \in \left(-2; -\dfrac{6}{5}\right]$.
Nếu $u_{n_0} = -\dfrac{6}{5}$ thì dãy (u_n) không xác định từ $n_0 + 1$ trở đi.

Nếu $u_{n_0} \in \left(-2; -\frac{6}{5}\right)$ thì ta có:

$$u_{n_0+1} \in (-\infty; -2), u_{n_0+2} \in (3; +\infty), u_{n_0+3} \in (2; 3)$$

nên $u_n \in (2; 3), \forall n \geqslant n_0 + 3, n \in \mathbb{N}$.
Vậy dãy (u_n) bị chặn.
Mặt khác $u_{n_0+2}, u_{n_0+3} \in (2; +\infty)$ nên $u_{n_0+2} > u_{n_0+3}$ mà hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(2; +\infty)$ nên dãy (u_n) giảm từ số hạng $n_0 + 2$ trở đi .
Vậy dãy (u_n) hội tụ. Giả sử $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.
Trong biểu thức (3.43) cho $n \to +\infty$ ta có: $\dfrac{3l+2}{l+2} = l \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} l = -1 \\ l = 2 \end{array}\right.$.
mà $u_n \in (2; 3), \forall n \geqslant n_0 + 3, n \in \mathbb{N}$, nên $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.
Như vậy cho u_1 các giá trị khác nhau, ta có các bài toán khác nhau.
Cho a, b, c, d sao cho hàm số f(x) nghịch biến, ta có ví dụ sau:

Ví dụ 3.4.2. Cho dãy số (u_n) biết:

$$\left\{\begin{array}{l} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2}{u_n + 1}, n \in \mathbb{N}^*. \end{array}\right. \tag{3.44}$$

a) Chứng minh dãy (u_n) bị chặn.
b)Chứng minh (u_{2n}) là dãy số tăng, (u_{2n+1}) là dãy số giảm.
c)Xét sự hội tụ của dãy (u_n).

3.4.2. Từ hàm số $f(x) = \sqrt{ax+b}$

Chọn a, b sao cho hàm số f(x) đồng biến, ta có ví dụ sau:

Ví dụ 3.4.3. Cho dãy số (u_n) biết:

$$\left\{\begin{array}{l} u_1 = \alpha \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}, n \in \mathbb{N}^*. \end{array}\right. \tag{3.45}$$

Xét sự hội tụ của dãy (u_n).
Vậy cho u_1 các giá trị khác nhau, ta có các bài toán khác nhau.
Chọn a, b sao cho hàm số f(x) nghịch biến, $u_1 = 0$ giá trị cụ thể ta có ví dụ sau:

Ví dụ 3.4.4. Cho dãy số (u_n) biết:

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}, n \in \mathbb{N}^*. \end{cases} \tag{3.47}$$

Xét sự hội tụ của dãy (u_n).

3.4.3. Từ hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$

Cho a, b, c các giá trị cụ thể, ta có các bài toán khác nhau, ví dụ cho $a = 1, b = -2, c = 2$ ta có ví dụ sau:

Ví dụ 3.4.5. Cho dãy số (u_n) biết:

$$\begin{cases} u_1 = \alpha \\ u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2, n \in \mathbb{N}^*. \end{cases} \tag{3.48}$$

Xét sự hội tụ của dãy (u_n).
Vậy cho u_1 các giá trị khác nhau, ta có các bài toán khác nhau.

3.4.4. Từ hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Cho a, b, c, d các giá trị cụ thể, ta có các bài toán khác nhau, ví dụ cho $a = 2, b = -5, c = 4, d = 0$ ta có ví dụ sau:

Ví dụ 3.4.6. Cho dãy số (u_n) biết:

$$\begin{cases} u_1 = \alpha \\ u_{n+1} = 2u_n^3 - 5u_n^2 + 4u_n, n \in \mathbb{N}^*. \end{cases} \tag{3.49}$$

Xét sự hội tụ của dãy (u_n).
Vậy cho u_1 các giá trị khác nhau, ta có các bài toán khác nhau.

KẾT LUẬN

Sau một thời gian tìm hiểu, học hỏi từ những tài liệu được Thầy giáo TS. Phạm Quý Mười cung cấp, tôi đã hoàn thành đề tài của mình. Luận văn *Phương pháp giải và sáng tạo các bài toán về dãy số thực* đã giải quyết được những vấn đề sau:

1. Hệ thống được các phương pháp tìm số hạng tổng quát, xét tính đơn điệu, tính bị chặn, chứng minh sự hội tụ và tìm giới hạn của dãy số thực, giải một số bài toán dãy số trong các đề thi học sinh giỏi để minh họa cho các phương pháp.

2. Trình bày các phương pháp xây dựng bài toán mới: phương pháp đặc biệt hóa, tổng quát hóa, phương pháp đặt dãy số phụ, và phương pháp hàm số. Xây dựng được một số bài toán và phương pháp giải tổng quát.

Với những gì đã tìm hiểu được, chúng tôi hy vọng luận văn sẽ là một tài liệu tham khảo hữu ích cho bản thân trong công tác giảng dạy sau này và cũng là nguồn tư liệu tốt cho học sinh phổ thông cũng như những ai quan tâm đến các bài toán về dãy số thực.

Mặc dù đã hết sức cố gắng, nhưng do thời gian và khả năng có hạn nên chắc chắn luận văn còn có những thiếu sót. Vì thế, chúng tôi rất mong nhận được nhiều ý kiến đóng góp của quý thầy cô, bạn bè, đồng nghiệp để luận văn được hoàn thiện hơn.