BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

LÊ THỊ KIM ÁNH

PHƯƠNG TRÌNH VÔ ĐỊNH NGHIỆM NGUYÊN VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: Phương pháp toán sơ cấp

Mã số: 60.46.01.13

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Đà nẵng - Năm 2015

Công trình được hoàn thành tại
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

Người hướng dẫn khoa học: TS. Nguyễn Ngọc Châu

Phản biện 1: TS. Cao Văn Nuôi

Phản biện 2: GS.TS. Lê Văn Thuyết

Luận văn đã được bảo vệ trước Hội đồng chấm Luận văn tốt nghiệp thạc sĩ khoa học họp tại Đại học Đà Nẵng vào ngày 12 tháng 12 năm 2015

Có thể tìm hiểu luận văn tại:
- Trung tâm Thông tin-Học liệu, Đại học Đà Nẵng
- Thư viện trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Phương trình vô định (còn gọi là phương trình Diophantus) nói chung và phương trình vô định nghiệm nguyên nói riêng có một vai trò quan trọng không những trong đại số mà cả trong toán học và thực tế, bởi vậy đã được các nhà toán học trên thế giới nghiên cứu từ rất lâu. Phương trình vô định là phương trình đại số với hệ số nguyên và số ẩn thường nhiều hơn số phương trình, nghiệm của nó được tìm trong một tập hợp số nào đó như: số nguyên, số nguyên dương, số hữu tỉ,… Nhiều phương trình vô định phát biểu rất đơn giản nhưng đến nay cũng chưa có cách giải hữu hiệu.

Ngay từ thời thượng cổ, các nhà toán học đã quan tâm giải những phương trình vô định. Chẳng hạn, từ thế kỷ thứ XVII trước công nguyên, các nhà toán học Ba-bi-lon đã biết giải phương trình $x^2 + y^2 = z^2$ (phương trình Pythagore) trong phạm vi số nguyên. Người đầu tiên nghiên cứu có hệ thống phương trình vô định là nhà toán học Hy Lạp Diophantus, sống ở thế kỷ thứ III trước công nguyên. Diophantus đã biết cách giải một số dạng phương trình vô định trong phạm vi các số hữu tỷ dương.

Nhằm tìm hiểu phương trình vô định và những ứng dụng của nó trong chương trình toán bậc phổ thông, tôi chọn đề tài: "Phương trình vô định nghiệm nguyên và ứng dụng" cho luận văn thạc sĩ của mình.

2. Mục đích và nhiệm vụ nghên cứu

- Khảo sát, nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của phương trình vô định.
- Tìm hiểu cách giải phương trình vô định.
- Ứng dụng phương trình vô định để giải một số lớp bài toán.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

- Phương trình vô định nghiệm nguyên bậc nhất.
- Phương trình vô định nghiệm nguyên bậc hai, hai ẩn.
- Một số bài toán dân gian.

4. Phương pháp nghiên cứu

- Thu thập, tổng hợp, hệ thống các tài liệu có nội dung liên quan đến đề tài luận văn, đặt biệt là các bài toán dân gian giải được bằng phương tình vô định.
- Phân tích, nghiên cứu các tài liệu để thực hiện đề tài luận văn.
- Trao đổi, thảo luận, tham khảo ý kiến của người hướng dẫn, của chuyên gia và của các đồng nghiệp.

5. Bố cục của luận văn

Ngoài phần mở đầu và kết luận, nội dung của luận văn được chia thành bốn chương:

Chương 1. Kiến thức chuẩn bị

Chương 2. Phương trình vô định bậc nhất

Chương 3. Phương trình vô định bậc hai hai ẩn

Chương 4. Phương trình Pell

CHƯƠNG 1. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1. QUAN HỆ CHIA HẾT TRÊN TẬP CÁC SỐ NGUYÊN

Định nghĩa 1.1. Ta nói rằng số $a \in \mathbb{Z}$ chia hết cho số $b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, ký hiệu là $a \vdots b$ hay $b \mid a$, nếu tồn tại số nguyên q sao cho $a = bq$. Khi đó số b gọi là ước số của a hay a là bội của b, còn số q gọi là thương của phép chia a cho b. Nếu a không chia hết cho b ta ký hiệu là $b \nmid a$.

Định lý 1.3. *Nếu* $(a, b) = d$ *thì tồn tại hai số nguyên* p *và* q *sao cho* $ap + bq = d$.

Bổ đề. *Giả sử* a, b, q, r *là những số thỏa mãn đẳng thức* $a = bq + r$. *Khi đó* $(a, b) = (b, r)$.

Dựa vào bổ đề trên, để tìm ước số chung lớn nhất của hai số nguyên a và b khác 0, ta chia a cho b $(|a| \geq |b|)$. Khi đó $a = bq + r$, với $0 \leq r < |b|$.

Nếu $r = 0$ thì dừng lại. Nếu $r > 0$ ta chia b cho r và nhận được đẳng thức tương tự $b = rq_1 + r_1$, với $0 \le r_1 < r$. Tiếp tục quá trình trên ta nhận được: $a = bq + r$, $b = rq_1 + r_1$, $r = r_1q_2 + r_2$, $\ldots$, $r_{k-2} = r_{k-1}q_k + r_k$, $r_{k-1} = r_kq_{k+1} + r_{k+1}$. Vì những số r, r_1, $\ldots$, r_k, r_{k+1} tạo thành dãy giảm ngặt những số không âm, nên tồn tại k để $r_{k+1} = 0$. Khi đó đẳng thức sau cũng có thể viết $r_{k-1} = r_kq_{k+1}$. Theo Bổ đề, ta có $r_k = (r_k, r_{k-1}) = (r_{k-1}, r_{k-2}) = \ldots = (r, b) = (a, b)$.

Quá trình nêu trên gọi là **thuật toán Euclicde**.

1.2. QUAN HỆ ĐỒNG DƯ TRÊN TẬP CÁC SỐ NGUYÊN

Định nghĩa 1.3. Cho m là số nguyên dương và a, b là những số nguyên. Ta nói rằng a đồng dư với b theo modul m, nếu $(a - b) \,\vdots\, m$, và ký hiệu là $a \equiv b \pmod{m}$. Trường hợp ngược lại, ta nói rằng a không đồng dư với b theo modul m và viết $a \not\equiv b$ (mod m).

Định nghĩa 1.4. Cho n là một số nguyên dương. Ký hiệu $\varphi(n)$ là số lượng tất cả các số tự nhiên không lớn hơn n và nguyên tố cùng nhau với n. Hàm $\varphi(n)$ gọi là hàm Euler.

Định lý 1.7. *Nếu* $(a, n) = 1$ *thì* $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.

1.3. LIÊN PHÂN SỐ

Định nghĩa 1.5. Liên phân số hữu hạn là một biểu thức có dạng

$$q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_n}}}, \text{ trong đó } q_1 \in \mathbb{Z},\ q_i \in \mathbb{Z}^*,\ \forall i = \overline{2, n}.$$

Và được ký hiệu là $[q_1, q_1, ..., q_n]$.

Bằng thuật toán Euclicde, ta có thể biểu diễn số hữu tỷ $\frac{a}{b}$ dưới dạng liên phân số hữu hạn như sau: $a = bq_1 + r_1,\ b = r_1q_2 + r_2,$ $r_1 = r_2q_3 + r_3,\ \ldots,\ r_{n-3} = r_{n-2}q_{n-1} + r_{n-1},\ r_{n-2} = r_{n-1}q_n.$

Từ đẳng thức đầu tiên ta nhận được $\dfrac{a}{b} = q_1 + \dfrac{r_1}{b} = q_1 + \dfrac{1}{\dfrac{b}{r_1}}.$

Từ đẳng thức thứ hai ta có $\dfrac{b}{r_1} = q_2 + \dfrac{r_2}{r_1} = q_2 + \dfrac{1}{\dfrac{r_1}{r_2}}.$

Suy ra $\dfrac{a}{b} = q_1 + \dfrac{1}{q_2 + \dfrac{1}{\dfrac{r_1}{r_2}}}.$

Tiếp tục quá trình trên, ta được $\dfrac{a}{b} = q_1 + \dfrac{1}{q_2 + \dfrac{1}{\ddots + \dfrac{1}{q_n}}}.$

Định nghĩa 1.6. Cho dãy vô hạn những số nguyên $q_1, q_2, \ldots,$ $q_n, \ldots,$ với $q_i > 0,\ \forall i > 1.$ Khi đó ta gọi biểu thức

$$q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_n + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

là liên phân số vô hạn và ký hiệu $[q_1,\ q_2,\ ...,\ q_n,\ ...]$; còn những số $q_1,\ q_2,\ ...$ gọi là những phần tử của liên phân số vô hạn.

Ta có thể biểu diễn số vô tỷ α thành liên phân số như sau

$$q_1 = [\alpha];\quad \alpha_1 = \frac{1}{\alpha - q_1}$$

$$q_2 = [\alpha_1];\quad \alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1 - q_2}$$

$$\ldots$$

$$q_n = [\alpha_{n-1}]; \quad \alpha_n = \frac{1}{\alpha_{n-1} - q_n}$$

$$\ldots$$

Khi đó $\alpha = [q_1, q_2, ..., q_n, ...]$.

Cho liên phân số $\alpha = [q_1, q_2, ..., q_n, ...]$. Ta xác định hai dãy số P_n và Q_n $(n = 1, 2, ...)$ theo công thức sau:

$$P_n = q_n P_{n-1} + P_{n-2}, \ Q_n = q_n Q_{n-1} + Q_{n-2},$$

trong đó $P_0 = 1, \ Q_0 = 0, \ P_1 = q_1, \ Q_1 = 1$.

Định lý 1.10. *Thương số* $\frac{p_n}{Q_n}$ *biểu diễn giản phân thứ n liên phân số* α*, nghĩa là* $\frac{P_n}{Q_n} = [q_1, q_2, ..., q_n]$.

Định lý 1.11. *Với mọi số tự nhiên n, đẳng thức sau đúng*

$$P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1} = (-1)^n.$$

1.4. DẠNG TOÀN PHƯƠNG

1.4.1. Các khái niệm liên quan

Định nghĩa 1.10. Dạng toàn phương của hai biến x, y là một biểu thức có dạng $ax^2 + 2bxy + cy^2$, với a, b, c là những số nguyên không đồng thời bằng 0.

Số $D = b^2 - ac$ được gọi là định thức của dạng toàn phương.

Cho dạng toàn phương $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$. Ta đổi biến số x và y bằng những biến ε và η theo công thức

$$\begin{cases} x = \alpha\varepsilon + \beta\eta \\ y = \gamma\varepsilon + \delta\eta \end{cases} \tag{1.1}$$

trong đó $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ là những số nguyên.

Khi đó $f(x,\ y) = a_1\varepsilon^2 + 2b_1\varepsilon\eta + c_1\eta^2 = \varphi(\varepsilon,\ \eta)$,

trong đó $a_1 = a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2$,

$$b_1 = a\alpha\beta + b\alpha\delta + b\beta\gamma + c\gamma\delta,$$

$$c_1 = a\beta^2 + 2b\beta\delta + c\delta^2.$$

Đẳng thức (1.1) gọi là phép biến đổi dạng toàn phương. Số $\alpha\delta - \beta\gamma$ gọi là môđun của phép biến đổi (1.1).

Hai dạng toàn phương gọi là tương đương nhau khi từ dạng thứ nhất chuyển đổi sang dạng thứ hai, cũng như ngược lại đều thông qua một phép biến đổi với hệ số nguyên.

1.4.2. Biểu diễn số nguyên theo dạng toàn phương

Cho dạng toàn phương $ax^2 + 2bxy + cy^2$ và m là một số nguyên. Nếu tồn tại $x_0,\ y_0 \in \mathbb{Z}$ sao cho $m = ax_0^2 + 2bx_0y_0 + cy_0^2$, ta nói rằng số nguyên m biểu diễn qua dạng toàn phương $ax^2 + 2bxy + cy^2$.

Nếu $m \neq 0$, giả sử rằng m biểu diễn được theo dạng toàn phương, tức là $m = ax_0^2 + 2bx_0y_0 + cy_0^2$, với x_0, y_0 là những số nguyên tố cùng nhau.

Ta biết rằng khi x_0, y_0 là những số nguyên tố cùng nhau thì tồn tại hai số nguyên *p, q* sao cho $px_0 + qy_0 = 1$.

Dễ tính toán được đẳng thức sau: $mU = V^2 - (b^2 - ac)$,

với $U = (aq^2 - 2bqp + cp^2)$, $V = p(x_0b + y_0c) - q(x_0a + y_0b)$.

Suy ra nếu số $m \neq 0$ biểu diễn qua dạng toàn phương $ax^2 + 2bxy + cy^2$ với $x = x_0$, $y = y_0$ và $(x_0, y_0) = 1$, thì phải tồn tại số nguyên V sao cho hiệu bình phương của số đó với định thức của dạng toàn phương chia hết cho *m*.

Mệnh đề 1.2. *Nếu một số nguyên biểu diễn thông qua một dạng toàn phương đã cho thì nó cũng biểu diễn thông qua mọi dạng toàn* *phương khác, mà nó bao hàm bởi dạng toàn phương đã cho.*

Định lý 1.12. *Nếu* m *là số nguyên khác 0, mà nó biểu diễn thông qua dạng toàn phương* $ax^2 + 2bxy + cy^2$ *với* $x = x_0$, $y = y_0$, $(x_0, y_0) = 1$ *và định thức* D *của nó là số dư bình phương của số* V *đối với m thì những dạng toàn phương sau tương đương riêng* $ax^2 + 2bxy + cy^2$ *và* $m\varepsilon^2 + 2V\varepsilon\eta + \frac{V^2 - D}{m}\eta^2$.

CHƯƠNG 2
PHƯƠNG TRÌNH VÔ ĐỊNH BẬC NHẤT

2.1. PHƯƠNG TRÌNH VÔ ĐỊNH

Định nghĩa 2.1. Phương trình vô định (hay còn gọi là phương trình Diophante) là phương trình có dạng: $F(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$, $n > 1$, trong đó $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ là một đa thức của các biến $x_1, x_2, ..., x_n$; với hệ số nguyên.

Để thuận tiện, từ đây về sau nếu không nói gì khác, thì phương trình vô định nghiệm nguyên được gọi là phương trình vô định.

2.2. PHƯƠNG TRÌNH VÔ ĐỊNH BẬC NHẤT HAI ẨN

2.2.1. Các định nghĩa và định lý tồn tại nghiệm

Định nghĩa 2.3. Phương trình vô định bậc nhất hai ẩn x, y là phương trình có dạng

$$ax + by = c \tag{2.1}$$

trong đó a, b, c là những số nguyên; a, b khác 0.

Định lý 2.1. *Điều kiện cần và đủ để phương trình (2.1) có ít nhất một nghiệm số nguyên là ước số chung lớn nhất của hai số a và b là ước số của c.*

Định lý 2.2. *Nếu* (x_0, y_0) *là một nghiệm nguyên của phương trình (2.1) thì phương trình có vô số nghiệm nguyên và các nghiệm* *nguyên* (x, y) *của nó được cho bởi công thức* $\begin{cases} x = x_0 + \dfrac{b}{d}t \\ y = y_0 - \dfrac{a}{d}t \end{cases}$, (2.2)

trong đó $t \in \mathbb{Z}$ *và* $d = (a, b)$.

2.2.2. Ý nghĩa hình học của phương trình vô định bậc nhất hai ẩn

2.3. PHƯƠNG PHÁP TÌM NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH VÔ ĐỊNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Xét phương trình vô định $ax + by = c$, với $d = (a, b) | c$. (2.3)

Không mất tính tổng quát, ta có thể xem các hệ số a, b của phương trình là những số nguyên dương.

2.3.1. Phương pháp dùng thuật toán Euclide

2.3.2. Phương pháp dùng liên phân số

Xét phương trình (2.3) và đặt $c = dc_1$, với $c_1 \in \mathbb{Z}$.

Chia cả hai vế của phương trình (2.3) cho d ta được:

$$a_1x + b_1y = c_1, \qquad (2.4)$$

với $a_1 = \dfrac{a}{d}$, $b_1 = \dfrac{b}{d}$ và $(a_1, b_1) = 1$.

Giả sử số hữu tỷ $\dfrac{a_1}{b_1}$ có biểu diễn liên phân số như sau:

$$\frac{a_1}{b_1} = [q_1, q_2, ..., q_n],$$

và $\dfrac{P_0}{Q_0}, \dfrac{P_1}{Q_1}, ..., \dfrac{P_n}{Q_n}$ là các giản phân của liên phân số này. Theo Định lý 1.11, ta có: $P_nQ_{n-1} - Q_nP_{n-1} = (-1)^n$, và $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{P_n}{Q_n}$.

Vì $\frac{a_1}{b_1}$ và $\frac{P_n}{Q_n}$ đều là những phân số tối giản nên $a_1 = P_n,\ b_1 = Q_n$ suy ra $a_1\left[(-1)^n Q_{n-1}\right]c_1 + b_1\left[-(-1)^n P_{n-1}\right]c_1 = c_1,$

nghĩa là $x_0 = (-1)^n Q_{n-1}c_1,\ y_0 = -(-1)^n P_{n-1}c_1$ là một nghiệm riêng của phương trình (2.4) và là nghiệm riêng của phương trình (2.3).

2.3.3. Phương pháp biến số nguyên

Bây giờ ta sẽ giải ví dụ 2.2 bằng phương pháp biến số nguyên.

Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $15x + 9y = 6$.

Giải. Ta có $d = (15, 9) = 3,\ 3|6$, suy ra phương trình có nghiệm nguyên. Phương trình đã cho tương đương với:

$$y = \frac{6 - 15x}{9} = -x + \frac{2 - 2x}{3} \in \mathbb{Z}.$$

Đặt $z = \frac{2 - 2x}{3} \in \mathbb{Z}$. Suy ra $3z = 2 - 2x$ hay $2x + 3z = 2$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{2 - 3z}{2} = -z + \frac{2 - z}{2} \in \mathbb{Z}.$$

Đặt $t = \frac{2 - z}{2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2t = 2 - z$. Dễ thấy $t = 1,\ z = 0$ là một nghiệm riêng của phương trình vừa tìm được.

Từ đó suy ra $x = 1$ và $y = -1$ là một riêng nghiệm riêng của phương trình đã cho.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 - 5t \end{cases},\ t \in \mathbb{Z}.$

2.3.4. Phương pháp hàm Euler

Định lý 2.4. *Cho a và b là hai số nguyên dương, nguyên tố cùng nhau và c là một số nguyên bất kì. Khi đó phương trình* $ax + by = c$*, có một nghiệm nguyên là:* $x_0 = ca^{\varphi(b)-1},\quad y_0 = -c\dfrac{a^{\varphi(b)} - 1}{b}$.

2.3.5. Phương pháp đưa về phương trình đồng dư

2.4. PHƯƠNG TRÌNH VÔ ĐỊNH BẬC NHẤT NHIỀU ẨN

2.4.1. Định nghĩa và định lý tồn tại nghiệm

Định nghĩa 2.4. Phương trình vô định bậc nhất n ẩn là phương trình có dạng $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$, (2.5)

trong đó $n > 1$; $a_i \in \mathbb{Z}^*$, $\forall i = \overline{1,n}$; $b \in \mathbb{Z}$.

Định lý 2.6. *Điều kiện cần và đủ để phương trình (2.5) có nghiệm nguyên là* $(a_1, a_2, ..., a_n) \mid b$

2.4.2. Phương pháp giải phương trình vô định bậc nhất nhiều ẩn

Xét phương trình vô định: $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$,

trong đó $n > 1$; $a_i \in \mathbb{Z}^*$, $\forall i = \overline{1,n}$; $b \in \mathbb{Z}$, $(a_1, a_2, ..., a_n) \mid b$.

Đặt $d = (a_{n-1}, a_n)$. Ta có $a_{n-1} = da'_{n-1}$, $a_n = da'_n$, ở đây a'_{n-1}, a'_n là hai số nguyên tố cùng nhau. Phương trình (2.6) được viết lại $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_{n-2}x_{n-2} + d\left(a'_{n-1}x_{n-1} + a'_nx_n\right) = b$ (2.7)

Đặt $u = a'_{n-1}x_{n-1} + a'_nx_n$. (2.8)

Khi đó (2.7) được viết lại: $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_{n-2}x_{n-2} + du = b$ (2.9)

Giả sử $x_1^0, x_2^0, ..., x_{n-2}^0, u^0$ là một nghiệm nguyên của phương trình (2.9). Với số xác định u^0, phương trình (2.8) có nghiệm $\left(x_{n-1}^0, x_n^0\right)$ vì $\left(a'_{n-1}, a'_n\right) = 1$. Khi đó $\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_{n-2}^0, x_{n-1}^0, x_n^0\right)$ là một nghiệm nguyên của phương trình (2.7) và do đó là nghiệm của phương trình (2.6).

Ví dụ 2.3. Tìm nghiệm nguyên của phương trình vô định:

$$2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 6x_4 = 4$$

Giải. Ta có $(2, 3, -4, 6) = 1$, $1 \mid 4$, suy ra phương trình có nghiệm nguyên. Ta đưa vào ẩn mới $u = -2x_3 + 3x_4$, phương trình đã cho viết lại: $2x_1 + 3x_2 + 2u = 4$.

Phương trình sau cùng đưa ẩn mới $v = 3x_2 + 2u$ và nhận được phương trình $2x_1 + v = 4$.

Giải phương trình $u = -2x_3 + 3x_4$, trong đó u là một số nguyên, x_3 và x_4 là hai ẩn. Tất cả các nghiệm là $\begin{cases} x_3 = u + 3t_1 \\ x_4 = u + 2t_1 \end{cases}$, $t_1 \in \mathbb{Z}$.

Giải phương trình $v = 3x_2 + 2u$, trong đó v là một số nguyên, u và x_2 là hai ẩn. Tất cả các nghiệm là $\begin{cases} x_2 = v + 2t_2 \\ u = -v - 3t_2 \end{cases}$, $t_2 \in \mathbb{Z}$.

Tất cả những nghiệm nguyên của $2x_1 + v = 4$ với một nghiệm riêng $x_1^0 = 1,\ v^0 = 2$ là $\begin{cases} x_1 = 1 + t_3 \\ v = 2 - 2t_3 \end{cases}$, $t_3 \in \mathbb{Z}$.

Bằng cách thay u và v vào các biểu thức của x_2, x_3, x_4 ta nhận được công thức nghiệm:

$$x_1 = 1 + t_3,\ x_2 = v + 2t_2 = 2 - 2t_3 + 2t_2,$$
$$x_3 = u + 3t_1 = -v - 3t_2 + 3t_1 = -2 + 2t_3 - 3t_2 + 3t_1,$$
$$x_4 = u + 2t_1 = -v - 3t_2 + 2t_1 = -2 + 2t_3 - 3t_2 + 2t_1,$$

trong đó t_1, t_2, t_3 là những số nguyên, tùy ý.

2.5. MỘT SỐ BÀI TOÁN DÂN GIAN VÀ BÀI TOÁN ỨNG DỤNG

Bài toán 1. *Đem một trăm đồng chẵn Con mái ba đồng tròn*
Mua gà được trăm con Mỗi đồng ba gà chiếp
Năm đồng mỗi con trống Hỏi mỗi loại mấy con?

Giải. Ta ký hiệu x là số con gà trống mua được, y là số con gà mái mua được, z là số con gà chiếp mua được.

Khi đó tổng số gà là: $x + y + z = 100$, và số tiền là:

$$5x + 3y + \frac{z}{3} = 100.$$

Từ hai phương trình ta suy ra được $7x + 4y = 100$, (2.10)
đây là một phương trình vô định có nghiệm được xác định trong tập số tự nhiên.

(2.10) $\Leftrightarrow$ $y = 25 - \dfrac{7}{4}x$.

Từ điều kiện $x, y \in \mathbb{N}$, ta có x phải chia hết cho 4 và nhỏ hơn 15. Như vậy x chỉ có thể là 4, 8, 12, ứng với chúng ta có y = 18, 11, 4 và số gà con mua được là z = 78, 81, 84

Vậy bài toán có 3 đáp án: 4 gà trống, 18 gà mái, 78 gà con, hoặc 8 gà trống, 11 gà mái, 81 gà con, hoặc 12 gà trống, 4 gà mái, 84 gà con.

CHƯƠNG 3. PHƯƠNG TRÌNH VÔ ĐỊNH BẬC HAI HAI ẨN

3.1. PHƯƠNG TRÌNH VÔ ĐỊNH DẠNG TOÀN PHƯƠNG

3.1.1. Các định nghĩa và định lý

Định nghĩa 3.1. Cho dạng toàn phương

$$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

với $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$. Phương trình $f(x, y) = m$, $m \in \mathbb{Z}$, được gọi là phương trình vô định dạng toàn phương.

Một nghiệm nguyên tố cùng nhau (x_0, y_0) của phương trình $f(x,y) = m$, mà qua nó xác định *V*, nghĩa là $V = p(x_0b + y_0c) - q(x_0a + y_0b)$ với $x_0p + y_0q = 1$, được gọi là nghiệm thuộc *V*.

Định lý 3.1. *Cho* $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ *biến đổi thành* $\varphi(\varepsilon, \eta) = a_1\varepsilon^2 + 2b_1\varepsilon\eta + c_1\eta^2$ *theo phép biến đổi riêng*

$$\begin{cases} x = \alpha\varepsilon + \beta\eta \\ y = \gamma\varepsilon + \delta\eta \end{cases}$$

Khi đó tất cả các phép biến đổi riêng mà nó biến đổi $f(x, y)$ *thành* $\varphi(\varepsilon, \eta)$ *được xác định theo công thức*

$$x = \frac{1}{\sigma}\left[\alpha t - (\alpha b + \gamma c)u\right]\varepsilon + \frac{1}{\sigma}\left[\beta t - (\beta b + \delta c)u\right]\eta$$

$$y = \frac{1}{\sigma}\left[\gamma t + (\alpha a + \gamma b)u\right]\varepsilon + \frac{1}{\sigma}\left[\delta t + (\beta a + \delta b)u\right]\eta$$

trong đó $\sigma = (a, 2b, c)$; t *và* u *là những nghiệm nguyên của phương trình vô định* $t^2 - Du^2 = \sigma^2$.

Hệ quả. *Giả sử tồn tại nghiệm nguyên* (x_0, y_0), *với* $(x_0, y_0) = 1$ *và thuộc V, của phương trình* $ax^2 + 2bxy + cy^2 = m$, $m \neq 0$. *Khi đó, cặp số* (x, y) *được xác định bởi công thức*

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sigma}\left[x_0 t - (x_0 b + y_0 c)u\right] \\ y = \dfrac{1}{\sigma}\left[y_0 t + (x_0 a + y_0 b)u\right] \end{cases}, \tag{3.1}$$

trong đó $\sigma = (a, 2b, c)$; t *và* u *là những nghiệm nguyên của phương trình vô định* $t^2 - Du^2 = \sigma^2$, *cũng là nghiệm nguyên tố cùng nhau thuộc V của phương trình.*

3.1.2. Phương pháp giải phương trình vô định dạng toàn phương

i. Trường hợp $\mathbf{D = 0}$.

Xét phương trình vô định dạng toàn phương

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = m, \tag{3.3}$$

trong đó $D = b^2 - ac = 0$.

- Nếu $a = 0$, thì $b = 0$. Khi đó phương trình trở thành $cy^2 = m$, ta dễ dàng tìm được nghiệm (x, y) của phương trình này.

- Nếu $a \neq 0$, khi đó $ax^2 + 2bxy + cy^2 = \dfrac{(ax + by)^2}{a}$. Và phương trình (3.3) có thể đưa về dạng $(ax+by)^2 = ma$.

Phương trình trên tương đương với hai phương trình

$$ax + by = \pm\sqrt{ma} \tag{3.4}$$

ii. Trường hợp $D \neq 0$.

Xét phương trình vô định $ax^2 + 2bxy + cy^2 = m$, (3.5)

trong đó $D = b^2 - ac \neq 0$.

- Nếu $m = 0$, ta có $x = \dfrac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}y$, khi $a \neq 0$. Trong trường hợp này phương trình (3.5) có nghiệm khi và chỉ khi $D = b^2 - ac$ là một số chính phương. Đồng thời nó trở thành phương trình vô định bậc nhất hai ẩn mà ta đã biết cách giải. Nếu $a = 0$ thì (3.5) trở thành $y(2bx + cy) = 0$. Ta dễ dàng tìm được nghiệm của phương trình này.

- Nếu $m \neq 0$, trước tiên ta giải phương trình (3.5) trong những số nguyên tố cùng nhau theo các bước.

1. Tìm tất cả những số V, $0 \leq V < |m|$, với nó định thức D là số dư của bình phương V đối với m.

a. Nếu những số như vậy không có, thì phương trình (3.5) không có nghiệm nguyên nguyên tố cùng nhau.

b. Nếu $V_1, V_2, \ldots$ là những số, với chúng D là số dư bình phương đối với m, ta tìm nghiệm cho từng trường hợp của phương trình (3.5) tương ứng với $V_1, V_2, \ldots$

2. Để tìm nghiệm của (3.5), mà nó tương ứng với V_1, ta xét hai dạng toàn phương

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 \quad \text{và} \quad m\varepsilon^2 + 2V\varepsilon\eta + \frac{V^2 - D}{m}\eta^2.$$

a. Nếu những dạng toàn phương này không tương đương riêng thì phương trình (3.5) không có nghiệm nguyên, mà nó tương ứng với số V_1.

b. Nếu những dạng trên tương đương riêng, thì tìm nghiệm riêng của phương trình (3.5), mà nó tương ứng với số V_1.

3. Bằng cách thử trực tiếp để tìm một nghiệm riêng của phương trình (3.5), mà nó thuộc tương ứng số V_1. Nghiệm riêng (x'_0, y'_0) thuộc V_1, nếu có thể tìm được số nguyên p và q mà chúng là nghiệm của phương trình vô định $x'_0 p + y'_0 q = 1$ và với chúng

$$V = p(x'_0 b + y'_0 c) - q(x'_0 a + y'_0 b).$$

4. Nếu (x'_0, y'_0) thuộc V_1, (x''_0, y''_0) thuộc V_2, … thì tất cả nghiệm của phương trình (3.5) trong những số nguyên tố cùng nhau xác định bằng công thức

$$x' = \frac{1}{\sigma}\left[x'_0 t - (x'_0 b + y'_0 c)u\right],\ y' = \frac{1}{\sigma}\left[y'_0 t + (x'_0 a + y'_0 b)u\right]$$

$$x'' = \frac{1}{\sigma}\left[x''_0 t - (x''_0 b + y''_0 c)u\right],\ y'' = \frac{1}{\sigma}\left[y''_0 t + (x''_0 a + y''_0 b)u\right]$$

....

trong đó $\sigma = (a, 2b, c)$; t và u là những nghiệm nguyên của phương trình vô định $t^2 - Du^2 = \sigma^2$.

Để tìm tất cả các nghiệm nguyên của (3.5) trong những số không nguyên tố cùng nhau, cần phải giải trong những số nguyên tố cùng nhau tất cả các phương trình, mà nó nhận từ (3.5), sao cho trong nó ta thay số *m* bởi thương của *m* với tất cả các bình phương ước số của *m*.

Ví dụ 3.2. Giải phương trình vô định sau

$$x^2 - 6xy + 13y^2 = 4$$

Giải. Ở đây $D = b^2 - ac = -4$. Ta tìm các số nguyên không âm *V*, nhỏ hơn 4 sao cho $D = -4$ là số dư bình phương *V* đối với 4. Bằng cách kiểm tra trực tiếp, chỉ có $V_1 = 0$ và $V_2 = 2$ là thỏa mãn điều kiện trên.

1) Xét trường hợp $V_1 = 0$. Dễ thấy $x_0 = 3,\ y_0 = 1$ là một nghiệm của phương trình vô định đã cho. Ta sẽ chứng minh rằng nghiệm này thuộc số $V_1 = 0$.

Những nghiệm của phương trình vô định $3p + q = 1$, là

$$\begin{cases} p = 1 + t \\ q = -2 - 3t \end{cases},\quad t \in \mathbb{Z}.$$

Từ công thức $V = p\left(x_0 b + y_0 c\right) - q\left(x_0 a + y_0 b\right)$ với $x_0 = 3,\ y_0 = 1$ và $t = -1$ ta nhận được $V = V_1 = 0$. Suy ra nghiệm $x_0 = 3,\ y_0 = 1$ thuộc V_1. Từ công thức nghiệm của phương trình vô định, suy ra $\begin{cases} x = 3t - 4u \\ y = t \end{cases}$, với $t^2 + 4u^2 = 1$.

Dễ thấy nghiệm nguyên của phương trình $t^2 + 4u^2 = 1$ là $t = \pm 1,\ u = 0$. Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm tương ứng với trường hợp $V_1 = 0$, là $(3,\ 1)$; $(-3,\ -1)$.

2) Xét trường hợp $V_2 = 2$. Xét hai dạng toàn phương

$$x^2 - 6xy + 13y^2 \text{ và } m\varepsilon^2 + 2V\varepsilon\eta + \frac{V^2 - D}{m}\eta^2 = 4\varepsilon^2 + 4\varepsilon\eta + 2\eta^2.$$

Theo Mệnh đề 1.2, nếu một số nguyên biểu diễn qua một dạng toàn phương thì nó cũng biểu diễn qua mọi dạng toàn phương khác mà tương đương với dạng ban đầu. Nhưng $5 = x^2 - 6xy + 13y^2$ với $x = 1,\ y = 2$, trong khi đó dạng $4\varepsilon^2 + 4\varepsilon\eta + 2\eta^2$ chỉ biểu diễn số chẵn. Do đó hai dạng toàn phương nói trên không tương đương. Theo Định lý 1.12, phương trình vô định $x^2 - 6xy + 13y^2 = 4$ không có nghiệm nguyên trong trường hợp $V_2 = 2$.

Ta thấy $\dfrac{m}{2^2} = 1$. Xét phương trình $x^2 - 6xy + 13y^2 = 1$. Phương trình này có hai nghiệm là $(1,\ 0)$; $(-1,\ 0)$. Suy ra $(2,\ 0)$;

$(-2,\ 0)$ nghiệm của phương trình đã cho ban đầu.

Vậy phương trình đã cho ban đầu có các nghiệm là $(2,\ 0)$; $(-2,\ 0)$; $(3,\ 1)$; $(-3,\ -1)$.

3.2. PHƯƠNG TRÌNH VÔ ĐỊNH BẬC HAI HAI ẨN

3.2.1. Một số khái niệm liên quan

Định nghĩa 3.2. Phương trình vô định bậc hai hai ẩn x và y là phương trình có dạng

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0 \tag{3.6}$$

trong đó a, b, c, d, e, f là những số nguyên, $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

3.2.2. Phương pháp giải của phương trình vô định bậc hai hai ẩn

i. Trường hợp $D = b^2 - ac = 0$.

Để giải phương trình (3.6) trong trường hợp này, ta đặt $z = ax + by + d$, khi đó phương trình (3.6) trở thành $z^2 - n = 2my$. Bây giờ chỉ còn tìm những giá trị nguyên của z sao cho $z^2 - n$ chia hết cho $2m$.

Tương ứng với từng giá trị của z ta tiến hành tìm x và y thông qua hai phương trình $z^2 - n = 2my$ và $z = ax + by + d$.

Ví dụ 3.3. Giải phương trình vô định

$$9x^2 + 12xy + 4y^2 + 4x + 6y + 5 = 0.$$

Giải. Ta có $D = a^2 - bc = 0$. Phương trình đã cho tương đương $(9x + 6y + 2)^2 + 30y + 41 = 0$.

Đặt $z = 9x + 6y + 2$, $\quad$ (3.7)

khi đó ta có phương trình $z^2 + 41 = -30y$.

Tìm $z = 30t + r,\ 0 \le r < 30$ sao cho $(z^2 + 41) \vdots 30$. Ta có

$$\left(z^2 + 41\right) \vdots 30 \quad \Leftrightarrow \quad \left(r^2 + 41\right) \vdots 30.$$

Thay lần lượt $r = \overline{0,29}$ vào biểu thức $r^2 + 41$, ta thấy $r = 7$, $r = 13$, $r = 17$, và $r = 23$ là thỏa mãn yêu cầu. Nên

$$\left(z^2 + 41\right) \vdots 30 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} z = 30t + 7 \\ z = 30t + 13 \\ z = 30t + 17 \\ z = 30t + 23 \end{array}\right., \quad t \in \mathbb{Z}.$$

1) Với $z = 30t + 7 \quad \Rightarrow \quad 9x + 6y - 30t = 5$

Suy ra $3|5$ (vô lý). Nên $z = 30t + 7$ bị loại.

2) Với $z = 30t + 13 \quad \Rightarrow \quad 9x + 6y - 30t = 11.$

Suy ra $3|11$ (vô lý). Nên $z = 30t + 13$ bị loại.

3) Với $z = 30t + 17 \Rightarrow y = -30t^2 - 34t - 11.$

Thay y và z vào (3.7) ta được $x = 20t^2 + 26t + 9.$

4) Với $z = 30t + 23 \Rightarrow y = -30t^2 - 46t - 19.$

Thay y và z vào (3.7) ta được $x = 20t^2 + 34t + 15.$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm nguyên là

$$\begin{cases} x = 20t^2 + 26t + 9 \\ y = -30t^2 - 34t - 11 \end{cases} \text{và} \begin{cases} x = 20t^2 + 34t + 15 \\ y = -30t^2 - 46t - 19 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

ii. Trường hợp $D = b^2 - ac \neq 0$.

Cho phương trình vô định bậc hai hai ẩn X và Y có dạng

$$aX^2 + 2bXY + cY^2 + 2dX + 2eY + f = 0$$

trong đó a, b, c, d, e, f là những số nguyên; với $D = b^2 - ac \neq 0$.

Để tìm nghiệm của phương trình vô định trên, trước hết ta đổi ẩn số X và Y bằng x và y theo công thức

$$X = \frac{x + cd - be}{D}, \quad Y = \frac{y + ae - bd}{D}.$$

Khi đó ta nhận được phương trình vô định $ax^2 + 2bxy + cy^2 = m$.

Phương trình này là một phương trình vô định dạng toàn phương có định thức khác không mà ta đã biết cách giải. Từ đó suy ra nghiệm của phương trình ban đầu.

Ví dụ 3.4. Giải phương trình vô định

$$X^2 + 2XY + 5Y^2 + 2X + 2Y - 4 = 0$$

Giải. Ta có $D = b^2 - ac = -4$. Đặt $X = x - 1,\ Y = y,$ ta suy ra được $(x-1)^2 + 2(x-1)y + 5y^2 + 2(x-1) + 2y - 4 = 0.$ sau khi rút gọn ta có $x^2 + 2xy + 5y^2 = 5.$ (3.8)

Giải phương trình (3.8), ta có các nghiệm $(2, -1)$; $(-2, 1)$; $(0, 1)$; $(0, -1)$.

Suy ra phương trình đã cho có nghiệm là $(1, -1)$; $(-3, 1)$; $(-1, 1)$; $(-1, -1)$.

3.2.3. Một cách giải khác của phương trình dạng elip, phương trình dạng hyperbolic

CHƯƠNG 4
PHƯƠNG TRÌNH PELL

4.1. PHƯƠNG TRÌNH PELL

4.1.1. Định nghĩa và nhận xét

Định nghĩa 4.1. Phương trình Pell là phương trình vô định có dạng $x^2 - dy^2 = 1,$ (4.2)
với d là một số nguyên dương không chính phương.

4.1.2. Sự tồn tại nghiệm và công thức nghiệm của phương trình Pell

Định lý 4.1. *Phương trình (4.2) luôn có nghiệm nguyên dương* (x, y).

Nhận xét 4.1. *Nếu phương trình (4.2) có nghiệm nguyên dương thì tồn tại nghiệm nguyên dương nhỏ nhất* $(x,\ y) = (a,\ b)$*, trong đó b là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa* $1 + db^2$ *là số chính phương.*

Định lý 4.2 (công thức nghiệm). *Giả sử* $(a,\ b)$ *là nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của phương trình (4.2). Xét hai dãy số nguyên* $\{x_n\},\ \{y_n\}$ *cho bởi hệ thức truy hồi*

$$\begin{cases} x_0 = 1,\ x_1 = a,\ x_{n+2} = 2ax_{n+1} - x_n \\ y_0 = 0,\ y_1 = b,\ y_{n+2} = 2ay_{n+1} - y_n \end{cases},\ \text{với } n \in \mathbb{N}.$$

Khi đó $(x_n,\ y_n)$ *với n = 1, 2, ... là tất cả các nghiệm dương của phương trình Pell.*

4.1.3. Cách giải phương trình Pell bằng liên phân số

Định lí 4.3. *Nếu (a, b) là một nghiệm nguyên dương của phương trình Pell thì* $\dfrac{a}{b}$ *là một giản phân của liên phân số biểu diễn số vô tỉ* $\sqrt{d}$.

Từ Định lí 4.3, để giải phương trình Pell ta thực hiện theo các bước sau:

1. Khai triển $\sqrt{d}$ thành liên phân số.
2. Tính các giản phân $\dfrac{P_n}{Q_n},\ n = 0, 1, \ldots$ của liên phân số đó.
3. Tính $P_n^2 - dQ_n^2,\ n = 0, 1, \ldots$ Nghiệm nhỏ nhất của phương trình Pell là $(P_n,\ Q_n)$ với n là số tự nhiên nhỏ nhất mà $P_n^2 - dQ_n^2 = 1$.
4. Viết nghiệm của phương trình theo hệ thức truy hồi với $x_1 = P_n,\ y_1 = Q_n$.

Ví dụ 4.2. Giải phương trình Pell $x^2 - 13y^2 = 1$.

Giải. Khai triển $\sqrt{13}$ thành liên phân số: $\sqrt{13} = \left[3, \left(1, 1, 1, 1, 6\right)\right]$.

Lập bảng tính giản phân và biểu thức $P_n^2 - 13Q_n^2$.

q_k	3	1	1	1	1	6	1	1	1	1
P_k	3	4	7	11	18	119	137	256	393	649
Q_k	1	1	2	3	5	33	38	71	109	180
$P_k^2 - 7Q_k^2$	-4	3	-3	4	-1	4	-3	3	4	1

Vậy $x_1 = 649,\ y_1 = 180.$

Phương trình có nghiệm $\left(\pm x_n,\ \pm y_n\right)$ với

$$\begin{cases} x_0 = 1,\ x_1 = 649,\ x_n = 1298x_{n-1} - x_{n-2} \\ y_0 = 0,\ y_1 = 180,\ y_n = 1298y_{n-1} - y_{n-2} \end{cases},\quad n \geq 2$$

4.2. MỘT SỐ DẠNG KHÁC CỦA PHƯƠNG TRÌNH PELL

4.2.1. Phương trình Pell loại 2

Định nghĩa 4.2. Phương trình Pell loại 2 là phương trình có dạng $x^2 - dy^2 = -1,$ (4.4)

trong đó d là số nguyên dương không chính phương.

Phương trình Pell: $x^2 - dy^2 = 1$ được gọi là phương trình Pell liên kết với phương trình Pell loại 2 (4.4).

Cũng như phương trình Pell, ta chỉ xét nghiệm dương của phương trình Pell loại 2.

Định lý 4.3 (Về sự tồn tại nghiệm). *Gọi $(a,\ b)$ là nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của phương trình Pell liên kết với phương trình (4.4). Khi đó phương trình (4.4) có nghiệm khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm nguyên dương* $\begin{cases} a = x^2 + dy^2 \\ b = 2xy \end{cases}$ (4.5)

Định lý 4.4 (Công thức nghiệm). *Giả sử hệ (4.5) có nghiệm nguyên dương duy nhất $(u,\ v)$. Xét các dãy số nguyên dương*

$\{x_n\}$, $\{y_n\}$ xác định bởi:

$$\begin{cases} x_0 = u,\ x_1 = u^3 + 3duv^2,\ x_{n+2} = 2ax_{n+1} - x_n \\ y_0 = v,\ y_1 = dv^3 + 3u^2v,\ y_{n+2} = 2ay_{n+1} - y_n \end{cases},\ \textit{với } n \in \mathbb{N}.$$

Khi đó $(x_n,\ y_n)$ là tất cả các nghiệm nguyên dương của (4.4).

4.2.2. Phương trình Pell với tham số

Định nghĩa 4.3. Phương trình Pell với tham số n là phương trình có dạng: $x^2 - dy^2 = n$ (4.6)

trong đó d là một số nguyên dương không chính phương, n là một số nguyên.

Phương trình Pell: $x^2 - dy^2 = 1$ được gọi là phương trình Pell liên kết với phương trình Pell với tham số (4.6).

Định nghĩa 4.4. Giả sử (4.6) có nghiệm, khi đó nghiệm nguyên dương $(x,\ y)$ được gọi là một nghiệm cơ bản của phương trình này nếu: $y^2 \le \max\left\{nb^2,\ -\dfrac{na^2}{d}\right\}$, trong đó $(a,\ b)$ là nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của phương trình Pell liên kết với phương trình (4.6).

Giả sử $(x_1,\ y_1)$ là một nghiệm cơ bản của (4.6), $(a,\ b)$ là nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của phương trình Pell liên kết với nó. Khi đó, tập hợp các cặp số nguyên dương $(x_{k+1},\ y_{k+1})$ được xác định theo công thức $\begin{cases} x_{k+1} = ax_k + dby_k \\ y_{k+1} = bx_k + ay_k \end{cases}$, với $k \ge 1$, được gọi là hệ nghiệm sinh ra bởi nghiệm cơ bản $(x_1,\ y_1)$. Ta cũng nói nghiệm $(x_{k+1},\ y_{k+1})$ được sinh ra từ nghiệm cơ bản $(x_1,\ y_1)$. Ta có định lý sau:

Định lý 4.6. *Mọi nghiệm nguyên dương (nếu có) của phương trình (4.6) đều được sinh ra từ một nghiệm cơ bản của phương trình* *này*.

4.3. CÁC BÀI TOÁN ỨNG DỤNG

Bài toán 4. Xét một tam giác có các số đo độ dài ba cạnh là ba số nguyên liên tiếp lớn hơn 3 và số đo diện tích cũng là số nguyên. Chứng minh rằng tồn tại một đường cao của tam giác đã cho mà nó chia tam giác đó thành hai tam giác nhỏ sao cho số đo độ dài các cạnh của cả hai tam giác nhỏ cũng là số nguyên.

Giải. Xét Δ ABC với BC = a, AB = $a-1$, AC = $a+1$. Từ đó suy ra góc ABC là góc lớn nhất. Ta có

$$a^2 + (a-1)^2 > (a+1)^2 \qquad (4.7)$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2 > 4a \quad \Leftrightarrow \quad a > 4. \qquad (4.8)$$

Bất đẳng thức (4.8) đúng theo giả thiết nên bất đẳng thức (4.7) đúng. Suy ra tam giác ABC là tam giác nhọn và chân của đường cao AH nằm trong đoạn BC.

Từ $\mathrm{AC}^2 - HC^2 = AB^2 - HB^2$ suy ra

$$HC^2 - HB^2 = AC^2 - AB^2 = (a+1)^2 - (a-1)^2 = 4a$$

nên $HC - HB = 4$ (vì $HB + HC = a$). Do đó $\mathrm{HC} = \dfrac{a+4}{2}$,

$\mathrm{HB} = \dfrac{a-4}{2}$. Suy ra $HA = \sqrt{AC^2 - HC^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{3(a^2-4)}$,

nên $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}HA.BC = \dfrac{a\sqrt{3(a^2-4)}}{4}$.

Nếu a lẻ thì tử số của $\dfrac{a\sqrt{3(a^2-4)}}{4}$ không chia hết cho 4 nên S_{ABC} không nguyên. Do đó a phải chẵn.

Đặt $a = 2b$ lúc đó $S_{ABC} = b\sqrt{3(b^2-1)}$ phải là số nguyên. Suy ra $b^2 - 1 = 3c^2$, với $b,\ c \in \mathbb{N}^*$.

Ta có phương trình Pell: $b^2 - 3c^2 = 1$.

Do đó phương trình trên có vô số nghiệm nguyên dương. Chẳng hạn $b = 7,\ c = 4$, suy ra $a = 14$, $S = 3bc = 84$, $\mathrm{HA} = 3c = 12$, $\mathrm{HC} = b + 2 = 9$, $\mathrm{HB} = b - 2 = 5$ đều là các số nguyên.

Vậy tồn tại đường cao AH của tam giác ABC chia tam giác đó thành hai tam giác nhỏ ABH và ACH mà số đo độ dài các cạnh của cả hai tam giác nhỏ đó cũng là số nguyên.

KẾT LUẬN

Luận văn: "Phương trình vô định nghiệm nguyên và ứng dụng" đã đạt được mục tiêu và nhiệm vụ đề ra, cụ thể luận văn đã thực hiện được các vấn đề sau:

1) Chứng minh sự tồn tại nghiệm và một số phương pháp tìm nghiệm nguyên của phương trình vô định bậc nhất.

2) Trình bày phương pháp tìm nghiệm nguyên của phương trình vô định bậc hai hai ẩn.

3) Giới thiệu phương pháp giải phương trình Pell, phương trình Pell mở rộng.

4) Ứng dụng phương trình vô định để giải một số bài toán dân gian, bài toán thuộc chương trình phổ thông trung học.

Hy vọng rằng nội dung của luận văn tiếp tục được bổ sung và hoàn thiện hơn nữa, nhằm có thể làm một tài liệu tham khảo cho học sinh, sinh viên, cũng như những người quan tâm đến phương trình vô định.