BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

LÊ ANH DŨNG

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp

Mã số: 60.46.01.13

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Đà Nẵng – Năm 2016

Công trình được hoàn thành tại
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

Người hướng dẫn khoa học: TS. NGUYỄN NGỌC CHÂU

Phản biện 1: TS. CAO VĂN NUÔI

Phản biện 2: TS TRỊNH ĐÀO CHIẾN

Luận văn đã được bảo vệ tại Hội đồng chấm Luận văn tốt nghiệp thạc sĩ Khoa học chuyên ngành Phương pháp Toán sơ cấp tại Đại học Đà Nẵng vào ngày 13 tháng 8 năm 2016.

Tìm hiểu luận văn tại:

- Trung tâm Thông tin-Học liệu, Đại học Đà Nẵng
- Thư viện trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà nẵng

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài.

Trong chương trình toán trung học phổ thông, Hình học không gian là một trong những môn học khó đòi hỏi học sinh phải có tính tư duy và trừu tượng cao, trong đó quan hệ song song và quan hệ vuông góc là những nội dung cơ bản. Các phương pháp giải toán hình học không gian thường dùng là: Phương pháp vectơ, phương pháp tọa độ, phương pháp dùng quan hệ song song, quan hệ vuông góc, phương pháp tổng hợp, ...

Để giải một bài toán nói chung, bài toán hình học không gian nói riêng, có thể có nhiều cách giải khác nhau. Vấn đề là phải phân tích kỹ các dữ liệu của giả thiết cũng như các yêu cầu của kết luận để chọn một phương pháp giải thích hợp, rõ ràng, ngắn gọn và dễ hiểu. Nhằm mục đích tìm hiểu các cách giải toán hình học không gian để phục vụ cho công việc giảng dạy, tôi chọn đề tài cho luận văn thạc sĩ của mình là "**Một số phương pháp giải toán hình học không gian**".

2. Mục đích và nhiệm vụ nghiên cứu

Tìm hiểu phương pháp vectơ, phương pháp tọa độ trong không gian và quan hệ song song, quan hệ vuông góc trong giải toán hình học không gian. Định hướng việc ứng dụng từng phương pháp cho từng lớp bài toán cụ thể.

Hệ thống và phân loại các bài toán hình học không gian có thể giải được bằng phương pháp vectơ, phương pháp tọa độ và sử dụng các quan hệ song song, quan hệ vuông góc.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu.

Phương pháp vectơ, phương pháp tọa độ trong không gian và quan hệ song song, quan hệ vuông góc trong giải toán hình học không gian.

Các bài toán hình học không gian giải được bằng các phương pháp vectơ, phương pháp tọa độ, phương pháp sử dụng quan hệ song song, quan hệ vuông góc.

4. Phương pháp nghiên cứu

Thu thập, tổng hợp, hệ thống các tài liệu có nội dung liên quan đến đề tài luận văn, đặc biệt là các tài liệu liên quan đến hình học không gian.

Phân tích, nghiên cứu các tài liệu để thực hiện đề tài luận văn.

Trao đổi, thảo luận, tham khảo ý kiến của giáo viên hướng dẫn, của các chuyên gia và các đồng nghiệp.

5. Cấu trúc của luận văn

Ngoài phần mở đầu và kết luận nội dung của Luận văn được chia thành 4 chương:

Chương 1 – Các kiến thức chuẩn bị.

Chương 2 – Phương pháp vectơ.

Chương 3 – Phương pháp tọa độ.

Chương 4 – Phương pháp sử dụng quan hệ song song, quan hệ vuông góc.

CHƯƠNG 1
KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Chương này trình bày sơ lược những kiến thức cơ sở về hệ tọa độ trong không gian, quan hệ song song và quan hệ vuông góc để làm tiền đề cho các chương sau. Các chi tiết liên quan có thể xem trong [9], [11], [16].

1.1 QUAN HỆ SONG SONG VÀ QUAN HỆ VUÔNG GÓC

Mục này nhắc lại một số khái niệm và kết quả về quan hệ song song, quan hệ vuông góc.

1.1.1. Quan hệ song song

Định nghĩa 1.1.1. Trong không gian, hai đường thẳng bất kỳ được gọi là song song với nhau nếu chúng đồng phẳng và không có điểm chung.

Định lý 1.1.1. Trong không gian, cho đường thẳng d và điểm A nằm ngoài đường thẳng d. Lúc đó tồn tại duy nhất một đường thẳng a đi qua A và song song với đường thẳng d.

Định lý 1.1.2. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

Định lý 1.1.3 (Định lý về ba giao tuyến của ba mặt phẳng)**.** Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến đó hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.

Định nghĩa 1.1.2. Trong không gian, đường thẳng d và mặt phẳng (P) được gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung, kí hiệu d // (P).

Định lý 1.1.4. Điều kiện cần và đủ để một đường thẳng song song với một mặt phẳng là đường thẳng đó không nằm trong mặt phẳng và song song với một đường thẳng nào đó trong mặt phẳng.

Định lý 1.1.5. Nếu hai mặt phẳng cùng song song hoặc chứa một đường thẳng và chúng cắt nhau thì giao tuyến của chúng song song hoặc trùng với đường thẳng trên.

Định lý 1.1.6. Cho điểm A và hai đường thẳng a, b chéo nhau. Lúc đó tồn tại duy nhất một phẳng (P) đi qua A sao cho (P) song song hoặc chứa a và song song hoặc chứa b.

Định lý 1.1.7. Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P). Nếu đường thẳng b song song với đường thẳng a thì b song song hoặc thuộc mặt phẳng (P).

Định nghĩa 1.1.3. Trong không gian, hai mặt phẳng (P) và (Q) được gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung.

Định lý sau cho phép đưa việc chứng minh hai mặt phẳng song song về chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng.

Định lý 1.1.8. Cho hai mặt phẳng (P), (Q). Lúc đó (P) và (Q) song song với nhau khi và chỉ khi trong mặt phẳng (Q) tồn tại hai đường thẳng a, b cắt nhau sao cho a và b đều song song với (P).

Định lý 1.1.9. Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đó.

Định lý 1.1.10. Cho hai mặt phẳng song song. Nếu một mặt phẳng cắt mặt phẳng này thì cũng cắt mặt phẳng kia và hai giao tuyến song song với nhau.

1.1.2. Quan hệ vuông góc

Định nghĩa 1.1.4. Góc giữa hai đường thẳng a và b trong không gian là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song với a và b.

Định nghĩa 1.1.5. Hai đường thẳng được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90^0.

Định nghĩa 1.1.6. Một đường thẳng được gọi là vuông góc với một mặt phẳng nếu đường thẳng đó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng.
Khi đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) ta còn nói mặt phẳng (P) vuông góc với a hoặc a và (P) vuông góc nhau và ký hiệu là $a \perp (P)$ hay $(P) \perp a$.

Định lý 1.1.11. Nếu một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau cùng thuộc một mặt phẳng thì đường thẳng đó vuông góc với mặt phẳng ấy.

Định nghĩa 1.1.7. Phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) theo phương l vuông góc với mặt phẳng (P) gọi là phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (P).

Định lý 1.1.12 (Định lý ba đường vuông góc)**.** Cho đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) và đường thẳng b nằm trong mặt phẳng (P). Khi đó điều kiện cần và đủ để b vuông góc với a là b vuông góc với hình chiếu a' của a trên (P).

Định nghĩa 1.1.8. Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) thì ta nói rằng góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng 90^0.
Nếu đường thẳng a không vuông góc với (P) thì góc giữa a và hình chiếu a' của nó trên (P) gọi là góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P).

Định nghĩa 1.1.9. Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

Định nghĩa 1.1.10. Khoảng cách từ một điểm M đến (P) (hoặc đến đường thẳng d) là khoảng cách giữa hai điểm M và H, trong đó H là hình chiếu của điểm M trên (P) (hoặc trên đường thẳng d).

Định nghĩa 1.1.11. Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) song song với a là khoảng cách từ một điểm bất kỳ của a đến mặt phẳng (P).

Định nghĩa 1.1.12. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kỳ của mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

Định nghĩa 1.1.13. Đường thẳng Δ cắt hai đường thẳng chéo nhau a, b và cùng vuông góc với mỗi đường ấy được gọi là đường vuông góc chung.

Định nghĩa 1.1.14. Nếu đường vuông góc chung cắt hai đường thẳng chéo nhau tại I và J thì đoạn thẳng IJ gọi là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó.

Định nghĩa 1.1.15. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó.

Định nghĩa 1.1.16. Hai mặt phẳng gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa hai mặt phẳng đó bằng 90^0.

1.2 HỆ TỌA ĐỘ DESCARTES TRONG KHÔNG GIAN

Mục này nhắc lại một số khái niệm và kết quả về hệ tọa độ Descartes trong không gian.

1.2.1. Giới thiệu hệ tọa độ Descartes trong không gian

Định nghĩa 1.2.1. Hệ gồm ba trục x'Ox, y'Oy, z'Oz đôi một vuông góc tại O được gọi là hệ trục tọa độ Descartes vuông góc trong không gian. Điểm O được gọi là gốc tọa độ, Ox được gọi là trục hoành, Oy được gọi là trục tung và Oz được gọi là trục cao.

Định lý 1.2.1. Trong không gian Oxyz, mỗi điểm M hoàn toàn được xác định bởi vectơ $\overrightarrow{OM}$. Nếu $\overrightarrow{OM} = (x; y; z)$ thì bộ (x; y; z) cũng là tọa độ của điểm M, ký hiệu M(x; y; z).

Định nghĩa 1.2.2 (Tích vô hướng của hai vectơ)**.** Cho hai vectơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ khác vectơ $\overrightarrow{0}$. Tích vô hướng của hai vectơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ là một số thực, kí hiệu là $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}$ và được xác định bởi công thức sau:

$$\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}|.|\overrightarrow{b}|\cos\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)$$

Nếu $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ hoặc $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$, ta quy ước $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = 0$.

Định nghĩa 1.2.3 (Tích có hướng của hai vectơ). Tích có hướng của hai vectơ $\overrightarrow{u}$ và $\overrightarrow{v}$, kí hiệu $[\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}]$ hay $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}$, là vectơ $\overrightarrow{\omega}$ xác định bởi

1. $\overrightarrow{\omega}$ có phương vuông góc với cả $\overrightarrow{u}$ và $\overrightarrow{v}$,
2. Bộ ba $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v};\overrightarrow{\omega})$ là bộ ba thuận,
3. $|\overrightarrow{\omega}| = |\overrightarrow{u}|.|\overrightarrow{v}|.\sin\varphi$, trong đó φ là góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{u}$ và $\overrightarrow{v}$.

Định lý 1.2.2. Nếu ABCD là hình bình hành có diện tích S thì $S = \left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right]\right|$ và do đó $S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2}.\left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right]\right|$.

Định lý 1.2.3. Nếu ABCD.A'B'C'D' là hình hộp có thể tích V thì $V = \left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AA'}\right|$ và do đó $V_{ABDA'} = \frac{1}{6}.\left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AA'}\right|$.

Định lý 1.2.4. Trong không gian Oxyz cho hai vectơ $\overrightarrow{u} = (u_1;u_2;u_3)$ và $\overrightarrow{v} = (v_1;v_2;v_3)$. Khi đó:

$$[\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}] = (u_2v_3 - u_3v_2; u_3v_1 - u_1v_3; u_1v_2 - u_2v_1)$$

1.2.2. Phương trình mặt phẳng

Định nghĩa 1.2.4. Vectơ $\overrightarrow{n} \neq 0$ được gọi là vectơ pháp tuyến (VTPT) của mặt phẳng (P) nếu giá của $\overrightarrow{n}$ vuông góc với (P).
Rõ ràng nếu $\overrightarrow{n}$ là VTPT của mặt phẳng (P) thì $k.\overrightarrow{n}, (k \neq 0)$ cũng là một VTPT của (P).

Định nghĩa 1.2.5. Phương trình có dạng $Ax + By + Cz + D = 0$, trong đó A, B, C không đồng thời bằng 0, được gọi là phương trình tổng quát của mặt phẳng.

Định lý 1.2.5. Trong không gian Oxyz cho hai mặt phẳng:
$(\alpha_1) : A_1x+B_1y+C_1z+D_1 = 0$ và $(\alpha_2) : A_2x+B_2y+C_2z+D_2 = 0$
Gọi $\overrightarrow{n}_1 = (A_1;B_1;C_1), \overrightarrow{n}_2 = (A_2;B_2;C_2)$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của (α_1) và (α_2). Khi đó:

1. $(\alpha_1)//(\alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{n}_1 = k.\overrightarrow{n}_2 \\ D_1 \neq k.D_2 \end{cases}, k \in \mathbb{R}^*$
2. $(\alpha_1) \equiv (\alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{n}_1 = k.\overrightarrow{n}_2 \\ D_1 = k.D_2 \end{cases}, k \in \mathbb{R}^*$
3. $(\alpha_1) \perp (\alpha_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{n}_1.\overrightarrow{n}_2 = 0 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$
4. Góc φ giữa hai mặt phẳng (α_1) và (α_2) được tính theo công thức

$$\cos\varphi = \frac{|\overrightarrow{n}_1.\overrightarrow{n}_2|}{|\overrightarrow{n}_1|.|\overrightarrow{n}_2|}$$

Định lý 1.2.6. Khoảng cách từ điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ đến mặt phẳng (P) $Ax + By + Cz + D = 0$ được tính theo công thức

$$d(M,(P)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

1.2.3. Phương trình đường thẳng trong không gian

Định nghĩa 1.2.6. Phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a} = (a_1; a_2; a_3)$ là phương trình có dạng $\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Định lý 1.2.7. Trong không gian cho điểm M và đường thẳng Δ đi qua điểm N, với vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u}$. Khoảng cách từ M đến đường thẳng Δ được ký hiệu là $d(M, \Delta)$ và được tính theo công thức:

$$d(M, \Delta) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{u}; \overrightarrow{NM}\right]\right|}{|\overrightarrow{u}|}$$

Định lý 1.2.8. Trong không gian, giả sử đường thẳng Δ_1 đi qua điểm A và có VTCP $\overrightarrow{u}_1$; đường thẳng Δ_2 đi qua điểm B và có VTCP $\overrightarrow{u}_2$. Khi đó, khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau Δ_1 và Δ_2 được tính theo công thức

$$d(\Delta_1; \Delta_2) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{u}_1; \overrightarrow{u}_2\right].\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{u}_1; \overrightarrow{u}_2\right]\right|}$$

Định lý 1.2.9. Góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2, kí hiệu $(\widehat{d_1; d_2})$, xác định bởi:

1. Nếu d_1 cùng phương với d_2 thì $(\widehat{d_1, d_2}) = 0^0$.

2. Nếu d_1 không cùng phương với d_2 thì $(\widehat{d_1, d_2})$ được tính theo công thức
$$\cos(\widehat{d_1, d_2}) = \frac{|\overrightarrow{u}_1.\overrightarrow{u}_2|}{|\overrightarrow{u}_1|.|\overrightarrow{u}_2|}$$

Định lý 1.2.10. Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P), kí hiệu là $(\widehat{d; (P)})$, xác định bởi:

1. Nếu $d \perp (P)$ thì $(\widehat{d; (P)}) = 90^0$

2. Nếu d không vuông góc với (P) thì $(\widehat{d; (P)})$ được tính theo công thức: $\sin(\widehat{d; (P)}) = \frac{|\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{u}|.|\overrightarrow{n}|}$, trong đó $\overrightarrow{u}$ là vectơ chỉ phương của d; $\overrightarrow{n}$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

1.2.4. Phương trình mặt cầu

Định nghĩa 1.2.7. Mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ bán kính R có phương trình chính tắc là: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$

Định nghĩa 1.2.8. Phương trình $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$, với $a^2+b^2+c^2-d>0$ được gọi là phương trình tổng quát của mặt cầu, mặt cầu này có tâm $I(a;b;c)$ và có bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

CHƯƠNG 2
PHƯƠNG PHÁP VECTƠ

Chương này trình bày việc sử dụng phương pháp vectơ để chứng minh một số bài toán hình học không gian.

2.1 QUY TRÌNH GIẢI MỘT BÀI TOÁN HÌNH HỌC KHÔNG GIAN BẰNG PHƯƠNG PHÁP VECTƠ

Bước 1. Tìm trong các dữ liệu của bài toán một bộ 3 vectơ $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}$ gọi là hệ vectơ gốc, thỏa mãn các điều kiện.

- Không đồng phẳng.
- Biết ít nhất hai độ dài hoặc hai góc.

Bước 2. Biểu thị các vectơ có trong giả thiết và kết luận theo hệ vectơ gốc.

Bước 3. Sử dụng các kết quả về vectơ để chứng minh các kết luận của bài toán.

2.2 BÀI TOÁN CHỨNG MINH HỆ THỨC VECTƠ, CHỨNG MINH THẲNG HÀNG, CHỨNG MINH ĐỒNG PHẲNG

Bài toán 2.2.1. Cho ΔABC, D là điểm bất kỳ trong không gian. Gọi G là trọng tâm của ΔABC.

1. Chứng minh $DA^2+DB^2+DC^2=3DG^2+GA^2+GB^2+GC^2$.
2. Tìm quỹ tích các điểm D sao cho $DA^2+DB^2+DC^2=k^2$, k là hằng số.

GIẢI.
Bước 1. Chọn hệ vectơ gốc $\overrightarrow{GA};\overrightarrow{GB};\overrightarrow{GC}$.
Bước 2. Biểu thị các vectơ $\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DB};\overrightarrow{DC}$ theo hệ vectơ gốc.
Ta có: $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{DG};\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{DG};\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{DG}$.
Bước 3.
1. Vì G là trọng tâm của ΔABC nên ta có $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$.
Khi đó, ta có:
$DA^2+DB^2+DC^2=\overrightarrow{DA}^2+\overrightarrow{BD}^2+\overrightarrow{DC}^2$

$$= (\overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{DG} + \overrightarrow{DB})^2 + (\overrightarrow{DG} + \overrightarrow{DC})^2$$
$$= 3\overrightarrow{DG}^2 + \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2 + 2\overrightarrow{DG}.(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})$$
$$= 3DG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2.$$

Suy ra điều phải chứng minh.
2. Từ $DA^2 + DB^2 + DC^2 = k^2$ và theo kết quả chứng minh trên ta có:
$3DG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 = k^2 \Leftrightarrow DG^2 = \dfrac{1}{3}(k^2 - GA^2 - GB^2 - GC^2)$.

- Nếu $GA^2 + GB^2 + GC^2 > k^2$ thì quỹ tích điểm D là rỗng.
- Nếu $GA^2 + GB^2 + GC^2 = k^2$ thì quỹ tích điểm D chính là điểm G.
- Nếu $GA^2 + GB^2 + GC^2 < k^2$ thì quỹ tích điểm D là mặt cầu tâm G bán kính $\sqrt{\dfrac{1}{3}(k^2 - GA^2 - GB^2 - GC^2)}$.

Bài toán 2.2.2. Cho tứ diện ABCD. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm AB, CD và $M \in BC; N \in AD$ sao cho $\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{ND}$. Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q đồng phẳng.

GIẢI.

Đặt $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{x}; \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{y}; \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{z}$.
$2\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = -\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) - \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}) = -\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} + \overrightarrow{z}$.
Từ $\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{MC}$ ta có $\overrightarrow{PM} = \dfrac{\overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC}}{3} = -\dfrac{1}{6}\overrightarrow{x} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{y}$.
Từ $\overrightarrow{NA} = -2\overrightarrow{ND}$ ta có $\overrightarrow{PN} = \dfrac{\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PD}}{3} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{x} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{z}$.
Suy ra $\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN} = \dfrac{2}{3}(-\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} + \overrightarrow{z}) = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{PQ}$.
Đẳng thức này chứng tỏ ba vectơ $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PN}$ đồng phẳng. Suy ra, bốn điểm M, N, P, Q đồng phẳng.

Bài toán 2.2.3. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của các tam giác A_1BD và CB_1D_1. Chứng minh rằng A, G_1, G_2, C_1 thẳng hàng và $AG_1 = G_1G_2 = G_2C_1$.

GIẢI.

Đặt $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{x}; \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{y}; \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{z}$.
Ta có: $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} + \overrightarrow{z}$.
Vì G_1 là trong tâm của ΔA_1BD nên:
$\overrightarrow{AG_1} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}) = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} + \overrightarrow{z}) = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC_1}$.
Đẳng thức này chứng tỏ $\overrightarrow{AG_1}$ và $\overrightarrow{AC_1}$ cùng hướng, nên A, G_1, C_1 thẳng hàng và $AG_1 = \dfrac{1}{3}AC_1$.
Tương tự: $\overrightarrow{C_1G_2} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{C_1D_1} + \overrightarrow{C_1B_1}) = -\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} + \overrightarrow{z}) = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC_1}$.

Đẳng thức này chứng tỏ $\overrightarrow{C_1G_2}$ và $\overrightarrow{AC_1}$ ngược hướng, nên A, G_2, C_1 thẳng hàng và $C_1G_2 = \dfrac{1}{3}AC_1$.

Vậy A, G_1, G_2, C_1 thẳng hàng và $AG_1 = G_1G_2 = G_2C_1 = \dfrac{1}{3}AC_1$.

2.3 BÀI TOÁN CHỨNG MINH SONG SONG, VUÔNG GÓC

Bài toán 2.3.1. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D', M và N lần lượt là trung điểm của AB và DD'. Chứng minh rằng $MN \perp A'C$.

GIẢI.

Bước 1. Gọi cạnh của hình lập phương là a.

Đặt $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{m}; \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{n}; \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{p}$. Khi đó: $|\overrightarrow{m}| = a; |\overrightarrow{n}| = a; |\overrightarrow{p}| = a$ và $\overrightarrow{m}.\overrightarrow{n} = 0; \overrightarrow{m}.\overrightarrow{p} = 0; \overrightarrow{n}.\overrightarrow{p} = 0$.

Bước 2. Dựa vào hình vẽ ta có:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{m} + \overrightarrow{n} + \frac{1}{2}\overrightarrow{p}.$$
$$\overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{m} + \overrightarrow{n} - \overrightarrow{p}.$$

Bước 3. Khi đó: $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{A'C} = \left(-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{m} + \overrightarrow{n} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{p}\right).(\overrightarrow{m} + \overrightarrow{n} - \overrightarrow{p})$

$$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{m}^2 + \overrightarrow{n}^2 - \frac{1}{2}\overrightarrow{p}^2 = -\frac{1}{2}a^2 + a^2 - \frac{1}{2}a^2 = 0.$$

Suy ra $MN \perp A'C$, ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 2.3.2. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi M và N lần lượt là các điểm chia A'C và C'D theo các tỉ số k và l ($k \neq 1; l \neq 1$). Xác định k, l để đường thẳng $MN//BD'$.

GIẢI.

Bước 1. Đặt $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{m}, \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{n}, \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{p}$.

Bước 2. Vì M chia đoạn thẳng A'C theo tỉ số k nên $\overrightarrow{MA'} = k\overrightarrow{MC}$, ta suy ra $\overrightarrow{BM} = \dfrac{\overrightarrow{BA'} - k.\overrightarrow{BC}}{1-k}$. Hay $\overrightarrow{BM} = \dfrac{1}{1-k}\overrightarrow{m} + \dfrac{1}{1-k}\overrightarrow{p} - \dfrac{k}{1-k}\overrightarrow{n}$.

Tương tự, ta có: $\overrightarrow{BN} = \dfrac{-l}{1-l}\overrightarrow{m} + \dfrac{1}{1-l}\overrightarrow{p} + \overrightarrow{n}$.

Từ đó: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BM}$

$$= \left(\frac{-l}{1-l} - \frac{1}{1-k}\right)\overrightarrow{m} + \left(\frac{1}{1-k}\right)\overrightarrow{n} + \left(\frac{1}{1-l} - \frac{1}{1-k}\right)\overrightarrow{p}$$

Mặt khác, $\overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{m} + \overrightarrow{n} + \overrightarrow{p}$.

Bước 3. Do BD' và C'D là hai đường thẳng chéo nhau và N thuộc đường thẳng C'D nên đường thẳng MN không thể trùng với đường thẳng BD'. Ta suy ra đường thẳng $MN//BD' \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = x.\overrightarrow{BD'}, \forall x \in \mathbb{R}$.

Mặt khác $\overrightarrow{m}, \overrightarrow{n}, \overrightarrow{p}$ là 3 vectơ không đồng phẳng nên ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{-l}{1-l} - \dfrac{1}{1-k} = x \\ \dfrac{1}{1-l} - \dfrac{1}{1-k} = x \\ 1 + \dfrac{k}{1-k} = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l = -1 \\ k = -3 \\ x = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Vậy khi k = -3 và l = -1 thì đường thẳng MN song song với BD'.

2.4 BÀI TOÁN VỀ GÓC VÀ KHOẢNG CÁCH

Bài toán 2.4.1. Cho hình lăng trụ đứng tam giác đều $ABC.A_1B_1C_1$. Tìm góc giữa hai đường thẳng AB_1 và BC_1 biết $AA_1 = \dfrac{AB}{\sqrt{5}}$.

GIẢI.

Bước 1. Gọi AB = a. Khi đó ta có $AA_1 = \dfrac{a}{\sqrt{5}}$.

Đặt $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{x}; \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{y}; \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{z}$, khi đó $|\overrightarrow{x}| = \dfrac{a}{\sqrt{5}}; |\overrightarrow{y}| = |\overrightarrow{z}| = a$

và $\overrightarrow{x}.\overrightarrow{y} = \overrightarrow{x}.\overrightarrow{z} = 0; \overrightarrow{y}.\overrightarrow{z} = \dfrac{a^2}{2}$.

Bước 2. Ta có $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}$.

$\overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{x} - \overrightarrow{y} + \overrightarrow{z}$.

Bước 3. Khi đó: $AB_1^2 = (\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y})^2 = \overrightarrow{x}^2 + \overrightarrow{y}^2 + 2\overrightarrow{x}\overrightarrow{y} = \dfrac{a^2}{5} + a^2 = \dfrac{6a^2}{5}$,

suy ra $AB_1 = a\sqrt{\dfrac{6}{5}}$.

$BC_1^2 = (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y} + \overrightarrow{z})^2 = \overrightarrow{x}^2 + \overrightarrow{y}^2 + \overrightarrow{z}^2 - 2\overrightarrow{x}\overrightarrow{y} + 2\overrightarrow{x}\overrightarrow{z} - 2\overrightarrow{y}\overrightarrow{z}$

$= \dfrac{a^2}{5} + a^2 + a^2 - a^2 = \dfrac{6a^2}{5}$, suy ra $BC_1 = a\sqrt{\dfrac{6}{5}}$.

Và $\overrightarrow{AB_1}.\overrightarrow{BC_1} = (\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}).(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y} + \overrightarrow{z}) = \overrightarrow{x}^2 - \overrightarrow{y}^2 + \overrightarrow{x}.\overrightarrow{z} + \overrightarrow{y}.\overrightarrow{z}$

$= \dfrac{a^2}{5} - a^2 - \dfrac{a^2}{2} = -\dfrac{3a^2}{10}$.

Ta có: $\cos\left(\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{BC_1}\right) = \dfrac{\overrightarrow{AB_1}.\overrightarrow{BC_1}}{AB_1.BC_1} = -\dfrac{1}{4}$

$\left(\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{BC_1}\right) = \arccos\left(-\dfrac{1}{4}\right) \Rightarrow (AB_1; BC_1) = 180^0 - \arccos\left(-\dfrac{1}{4}\right)$.

Bài toán 2.4.2. Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh là $4\sqrt{2}$, $SC \perp (ABC)$, gọi E và F lần lượt là trung điểm của AB và CB, SC = 2. Tính khoảng cách ngắn nhất giữa SF và CE.

GIẢI.

Ta chọn hệ cơ sở $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{x}, \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{y}, \overrightarrow{CS} = \overrightarrow{z}$.
Khi đó $\overrightarrow{x}.\overrightarrow{z} = \overrightarrow{y}.\overrightarrow{z} = 0, \overrightarrow{x}.\overrightarrow{y} = 16$ và $|\overrightarrow{x}| = |\overrightarrow{y}| = 4\sqrt{2}, |\overrightarrow{z}| = 2$.
Lấy tùy ý điểm $I \in SF$, ta có: $\overrightarrow{SI} = \alpha\overrightarrow{SF} = \alpha\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{y} - \overrightarrow{z}\right)$.
Lấy tùy ý điểm $K \in CE$, ta có: $\overrightarrow{CK} = \beta\overrightarrow{CE} = \beta\frac{\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}}{2}$.
Do đó $\overrightarrow{IK} = -\overrightarrow{SI} - \overrightarrow{CS} + \overrightarrow{CK} = \frac{\beta}{2}\overrightarrow{x} + \frac{\beta - \alpha}{2}\overrightarrow{y} + (\alpha - 1)\overrightarrow{z}$.
Xét $IK \perp SF \Leftrightarrow \overrightarrow{IK}.\overrightarrow{SF} = 0$
$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{y} - \overrightarrow{z}\right).\left(\frac{\beta}{2}\overrightarrow{x} + \frac{\beta-\alpha}{2}\overrightarrow{y} + (\alpha - 1)\overrightarrow{z}\right) = 0$
$\Leftrightarrow 3\beta - 3\alpha = -1$ (1)
Lại xét $IK \perp CE \Leftrightarrow \overrightarrow{CE}.\overrightarrow{IK} = 0$
$\Leftrightarrow \left(\frac{\beta}{2}\overrightarrow{x} + \frac{\beta-\alpha}{2}\overrightarrow{y} + (\alpha - 1)\overrightarrow{z}\right).\frac{\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}}{2} = 0 \Leftrightarrow \alpha = 2\beta$ (2)
Từ (1) và (2) ta có $\begin{cases} \alpha = 2\beta \\ 3\beta - 3\alpha = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{2}{3} \\ \beta = \frac{1}{3} \end{cases}$

Do đó ta có được $\overrightarrow{IK} = \frac{1}{6}(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y} - 2\overrightarrow{z})$.
Suy ra: $IK^2 = \frac{1}{36}(\overrightarrow{x}^2 + \overrightarrow{y}^2 + 4\overrightarrow{z}^2 - 2\overrightarrow{x}.\overrightarrow{y} - 4\overrightarrow{x}.\overrightarrow{z} + 4\overrightarrow{y}.\overrightarrow{z}) = \frac{12}{9}$
$\Leftrightarrow IK = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Vậy với cách lấy điểm I và K thỏa mãn $\overrightarrow{SI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{SF}$ và $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CE}$ thì IK là đường vuông góc chung của SF và CE. Do đó khoảng cách ngắn nhất giữa SF và CE là $IK = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

2.5 BÀI TOÁN VỀ DIỆN TÍCH VÀ THỂ TÍCH

Bài toán 2.5.1. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có SA=4. Điểm D nằm trên cạnh SC, CD=3, còn khoảng cách từ A đến đường thẳng BD bằng 2. Tính thể tích của khối chóp.

GIẢI.
Bước 1. Đặt $\overrightarrow{SA} = \overrightarrow{x}; \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{y}; \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{z}$, khi đó $|\overrightarrow{x}| = |\overrightarrow{y}| = |\overrightarrow{z}| = 4$ và $\overrightarrow{x}.\overrightarrow{y} = \overrightarrow{x}.\overrightarrow{z} = \overrightarrow{y}.\overrightarrow{z}$.
Bước 2. Đặt φ là góc phẳng ở đỉnh của hình chóp.
N là hình chiếu vuông góc của điểm A trên đường thẳng BD. Khi đó $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{DN} - \overrightarrow{DA} = a.\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{x} + a.\overrightarrow{y} - \frac{1}{4}(a-1)\overrightarrow{z}$.
Trong đó $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{y} - \frac{1}{4}\overrightarrow{z}$ và $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{x} - \frac{1}{4}\overrightarrow{z}$.

Bước 3. Theo đề $AN \perp DB \Leftrightarrow \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{DB} = 0$
$\Leftrightarrow \dfrac{-a-1}{2}\overrightarrow{x}.\overrightarrow{y} + 17a - 1 = 0.$ (1)
Mặt khác $AN = 2 \Leftrightarrow |\overrightarrow{AN}|^2 = 4$
$\Leftrightarrow 17a^2 - 2a + 13 - \dfrac{(a+1)^2}{2}\overrightarrow{x}.\overrightarrow{y} = 0.$ (2)
Kết hợp (1) và (2) ta được $a = \dfrac{7}{9}$. Suy ra (1) $\Leftrightarrow \overrightarrow{x}.\overrightarrow{y} = \dfrac{55}{4} \Leftrightarrow \cos\varphi = \dfrac{55}{64}$.
Gọi O là hình chiếu của S lên (ABC), do S.ABC là hình chóp đều nên O là trọng tâm của ΔABC, ta có $\overrightarrow{SO} = \dfrac{\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}}{3} = \dfrac{\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} + \overrightarrow{z}}{3}$.
Suy ra $SO = \sqrt{\left(\dfrac{\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} + \overrightarrow{z}}{3}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{\overrightarrow{x}^2 + \overrightarrow{y}^2 + \overrightarrow{z}^2 + 6\overrightarrow{x}.\overrightarrow{y}}{9}} = \dfrac{\sqrt{58}}{2}$.
Lại có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA} = \overrightarrow{y} - \overrightarrow{x}$, suy ra $AB = \sqrt{(\overrightarrow{y} - \overrightarrow{x})^2} = \dfrac{\sqrt{18}}{2}$.
Vậy $V = \dfrac{1}{3}.\dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4}.SO = \dfrac{3\sqrt{174}}{16}$ (đvtt).

CHƯƠNG 3
PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ

Chương này trình bày phương pháp tọa độ trong việc giải một số lớp bài toán hình học không gian.

3.1 MỘT SỐ DẤU HIỆU NHẬN BIẾT BÀI TOÁN HÌNH HỌC KHÔNG GIAN GIẢI ĐƯỢC BẰNG PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ

- Hình đã cho có một đỉnh là đỉnh của một tam diện vuông.
- Hình chóp có một cạnh bên vuông góc với đáy và đáy là tam giác vuông, tam giác đều,hình vuông, hình chữ nhật,...
- Hình lập phương, hình hộp chữ nhật.
- Hình đã cho có một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng, trong mặt phẳng đó có những đa giác đặc biệt: Tam giác vuông, tam giác đều, hình thoi, ...
- Một vài hình chưa có sẵn tam diện vuông nhưng có thể tạo được tam diện vuông chẳng hạn: Hai đường thẳng chéo nhau mà vuông góc, hoặc hai mặt phẳng vuông góc.
  Ngoài ra, với một số bài toán mà giả thiết không cho những hình quen thuộc như đã nêu ở trên thì ta có thể dựa vào tính chất song song, vuông góc của các đoạn thẳng hay đường thẳng trong hình vẽ để thiết lập hệ trục tọa độ.

3.2 QUY TRÌNH GIẢI MỘT BÀI TOÁN HÌNH HỌC KHÔNG GIAN BẰNG PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ

Bước 1. Chọn một hệ trục tọa độ Descartes thích hợp và tìm tọa độ các điểm có liên quan đến yêu cầu của bài toán.

Bước 2. Chuyển bài toán đã cho về bài toán hình học giải tích và giải.

Bước 3. Chuyển kết luận của bài toán hình học giải tích sang tính chất hình học tương ứng.

3.3 BÀI TOÁN CHỨNG MINH BA ĐIỂM THẲNG HÀNG, BA ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG QUY

Bài toán 3.3.1. Cho tứ diện SABC có SA, SB, SC đôi một vuông góc nhau, gọi G là trọng tâm ΔABC, I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện. Chứng minh ba điểm S, G, I thẳng hàng.

GIẢI.

Bước 1. Đặt $SA = a, SB = b, SC = c, (a, b, c > 0)$.
Chọn hệ trục tọa độ Descartes Oxyz như hình vẽ với gốc tọa độ O trung với S, ta có: $S(0;0;0), A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$

Bước 2. G là trọng tâm của ΔABC nên $G\left(\frac{a}{3};\frac{b}{3};\frac{c}{3}\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{SG} = \left(\frac{a}{3};\frac{b}{3};\frac{c}{3}\right)$.

Bước 3. Phương trình tổng quát của mặt cầu (S) đi qua gốc tọa độ có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2mx - 2ny - 2pz = 0$.
Do (S) đi qua A, B, C nên ta có:

$\begin{cases} a^2 - 2am = 0 \\ b^2 - 2bn = 0 \\ c^2 - 2cp = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{a}{2} \\ n = \frac{b}{2} \\ p = \frac{c}{2} \end{cases}$. Suy ra $I\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2};\frac{c}{2}\right)$, do đó $\overrightarrow{SI} = \left(\frac{a}{2};\frac{b}{2};\frac{c}{2}\right)$.

Dễ thấy $\overrightarrow{SG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{SI}$, suy ra $\overrightarrow{SG}$ và $\overrightarrow{SI}$ cùng phương.

Vậy ba điểm S, I, G thẳng hàng.

Bài toán 3.3.2. Trong mặt phẳng (α) cho hình vuông ABCD. Trên tia Az vuông góc với (α) lấy điểm S. Đường thẳng d_1 vuông góc với mặt phẳng (SBC) tại S cắt mặt phẳng (α) tại M, d_2 vuông góc với mặt phẳng (SCD) tại S cắt mặt phẳng (α) tại N. Chứng minh A, B, M thẳng hàng và A, D, N thẳng hàng.

GIẢI.

Bước 1. Gọi cạnh hình vuông là a và SA = b (a, b > 0). Chọn hệ trục tọa độ Descartes Oxyz như hình vẽ với gốc tọa độ O trùng với A.
Khi đó, ta có: $A(0;0;0); B(0;a;0); D(a;0;0); C(a;a;0); S(0;0;b)$.

Bước 2. Ta có $\overrightarrow{SB} = (0;a;-b); \overrightarrow{SC} = (a;a;-b); \overrightarrow{SD} = (a;0;-b)$.

Mặt phẳng (α) có phương trình $z = 0$.
Gọi $\overrightarrow{n_1}$ là VTPT của (SBC).
Khi đó: $\begin{cases} \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{SB} \\ \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{SC} \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} = [\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}] = (0; -ab; -a^2)$.
Bước 3. Vì $d_1 \perp (SBC)$ nên d_1 nhận $\overrightarrow{n_1} = (0; -ab; -a^2)$ làm một VTCP.
Suy ra, phương trình d_1 có dạng $\begin{cases} x = 0 \\ y = -abt \\ z = b - a^2t \end{cases}, \forall t \in \mathbb{R}$.

Giả thiết $M = d_1 \cap (\alpha)$, tọa độ M là nghiệm của hệ $\begin{cases} x = 0 \\ y = -abt \\ z = b - a^2t \\ z = 0 \end{cases}$, giải hệ này ta có $M\left(0; -\dfrac{b^2}{a}; 0\right)$.
Lại có: $\overrightarrow{AM} = \left(0; -\dfrac{b^2}{a}; 0\right); \overrightarrow{AB} = (0; a; 0)$. Dễ thấy $\overrightarrow{AM} = -\dfrac{b^2}{a^2}\overrightarrow{AB}$, suy ra $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AB}$ ngược hướng, nên ba điểm A, B, M thẳng hàng.
Hoàn toàn tương tự như trên ta cũng dễ dàng chứng minh được A, D, N thẳng hàng.

3.4 BÀI TOÁN CHỨNG MINH SONG SONG, VUÔNG GÓC

Bài toán 3.4.1. Cho hình hộp đứng ABCD.A'B'C'D' có các cạnh $AB = AD = a, AA' = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và góc $\widehat{BAD} = 60^0$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của A'D' và A'B'. Chứng minh $AC' \perp (BDMN)$.

GIẢI.
Bước 1. Trong ΔABD ta có $AB = AD = a$ và $\widehat{BAD} = 60^0$. Suy ra ΔABD là tam giác đều cạnh a.
Gọi I là giao điểm của AC và BD, I' là giao điểm của A'C' và B'D'.
Trong ΔAIB ta có $IA^2 = AB^2 - IB^2 = \dfrac{3a^2}{4}$, suy ra $IA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Chọn hệ trục tọa độ Descartes Oxyz như hình vẽ với gốc tọa độ O trùng với điểm I'.
Bước 2. Ta có: $I(0;0;0), B'\left(0; \dfrac{a}{2}; 0\right), A'\left(-\dfrac{a\sqrt{3}}{2}; 0; 0\right), D'\left(0; -\dfrac{a}{2}; 0\right)$,
$A\left(-\dfrac{a\sqrt{3}}{2}; 0; \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right), B\left(0; \dfrac{a}{2}; \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right), C'\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}; 0; 0\right), M\left(-\dfrac{a\sqrt{3}}{4}; -\dfrac{a}{4}; 0\right)$,
$N\left(-\dfrac{a\sqrt{3}}{4}; \dfrac{a}{4}; 0\right)$.
Bước 3. $\overrightarrow{BM} = \left(-\dfrac{a\sqrt{3}}{4}; -\dfrac{3a}{4}; -\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right); \overrightarrow{BN} = \left(-\dfrac{a\sqrt{3}}{4}; -\dfrac{a}{4}; -\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)$.

Gọi $\overrightarrow{n}$ là VTPT của (BDMN) khi đó:

$$\begin{cases} \overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{BM} \\ \overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{BN} \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{n} = [\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BN}] = \left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}; 0; -\frac{a^2\sqrt{3}}{8}\right).$$

Lại có $\overrightarrow{AC'} = \left(a\sqrt{3}; 0; -\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$. Đường thẳng AC' nhận $\overrightarrow{AC'}$ làm VTCP.

Dễ thấy hai vectơ $\overrightarrow{n}$ và $\overrightarrow{AC'}$ cùng phương. Suy ra $AC' \perp (BDMN)$.

Bài toán 3.4.2. Cho hình vuông ABCD cạnh a. Vẽ cùng về một phía (ABCD) các đoạn thẳng AA', CC' vuông góc với (ABCD) sao cho $AA' = CC' = a$. Chứng minh $AC \perp (BC'D)$.

Chọn hệ trục tọa độ Descartes Oxyz như hình vẽ với gốc tọa độ O trùng với điểm A.

Khi đó ta có: $A(0;0;0), B(0;a;0), C(a;a;0), D(a;0;0), A'(0;0;a), C'(a;a;a)$.

$\overrightarrow{A'C} = (a;a;-a), \overrightarrow{BC'} = (a;0;a), \overrightarrow{BD} = (a;-a;0)$

Gọi $\overrightarrow{n}$ là VTPT của (BC'D) khi đó ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{BC'} \\ \overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{BD} \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{n} = \left[\overrightarrow{BC'}, \overrightarrow{BD}\right] = \left(a^2; a^2; -a^2\right).$$

Ta thấy $\overrightarrow{n} = a.\overrightarrow{A'C}$, nên $\overrightarrow{n}$ và $\overrightarrow{A'C}$ cùng phương. Suy ra $AC \perp (BC'D)$.

Bài toán 3.4.3. Cho hình hộp đứng ABCD.A'B'C'D'. Hai điểm M, N lần lượt nằm trên hai cạnh AD và CC' sao cho $\frac{AM}{MD} = \frac{CN}{NC'}$. Chứng minh rằng đường thẳng $MN//(ACB')$.

GIẢI.

Gọi $AB = a, AD = b, AA' = h$. Chọn hệ trục tọa độ Descartes Oxyz như hình vẽ sao cho gốc tọa độ O trùng với điểm A.

Khi đó: $A(0;0;0), B(a;0;0), C(a;b;0), D(0;b;0), A'(0;0;h), B'(a;0;a)$, $D'(0;b;h), C'(a;b;h)$

Giả sử $\frac{AM}{MD} = \frac{CN}{NC'} = x, (x > 0)$.

Khi đó $AM = \frac{x}{1+x}AD$ và $CN = \frac{x}{1+x}CC'$, suy ra $M\left(0; \frac{x}{1+x}.b; 0\right)$; $N\left(a; b; \frac{x}{1+x}.h\right)$.

Ta có $\overrightarrow{MN} = \left(a; \frac{1}{1+x}.b; \frac{x}{1+x}.h\right)$; $\overrightarrow{AC} = (a;b;0)'\overrightarrow{AB'} = (a;0;h)$.

Gọi $\overrightarrow{n}$ là VTPT của (ACB'). Khi đó:

$$\begin{cases} \overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{AB'} \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{n} = \left[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB'}\right] = (bh; -ah; -ab).$$

Vì $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{MN} = abh - \frac{abh}{1+x} - \frac{xabh}{1+x} = 0$, nên $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{MN}$ và $M \notin (ACB')$.

Suy ra $MN//(ACB')$.

3.5 BÀI TOÁN VỀ GÓC VÀ KHOẢNG CÁCH

Bài toán 3.5.1. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm SA, M là trung điểm của AE, N là trung điểm của BC. Chứng minh MN vuông góc với BD và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC.

GIẢI.

Bước 1. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Chọn hệ trục Oxyz như hình vẽ sao cho $C \in Ox, D \in Oy, S \in OZ$.

Bước 2. Ta có: $O(0;0;0); A\left(-\dfrac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right); B\left(0;-\dfrac{a\sqrt{2}}{2};0\right);$

$$C\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right); D\left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right); S\left(0;0;h\right), h>0.$$

Bước 3. Goi I là trung điểm của SA. Ta có:

$I\left(-\dfrac{a\sqrt{2}}{4};0;\dfrac{h}{2}\right); E\left(-\dfrac{a\sqrt{2}}{2};-\dfrac{a\sqrt{2}}{2};h\right); M\left(-\dfrac{a\sqrt{2}}{2};-\dfrac{a\sqrt{2}}{4};\dfrac{h}{2}\right);$

$N\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{4};-\dfrac{a\sqrt{2}}{4};0\right).$

$$\overrightarrow{MN}=\left(\frac{3a\sqrt{2}}{2};0;-\frac{h}{2}\right), \overrightarrow{BD}=\left(0;a\sqrt{2};0\right).$$

Dễ thấy $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BD}=0 \Leftrightarrow MN \perp BD.$

$$\overrightarrow{AC}=(a\sqrt{2};0;0); \overrightarrow{MA}=\left(0;-\frac{ah\sqrt{2}}{4};-\frac{h}{2}\right).$$

$[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AC}]=\left(0;-\dfrac{ah\sqrt{2}}{2};0\right)$. Suy ra $[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AC}].\overrightarrow{MA}=\left(0;-\dfrac{a^2h}{4};0\right)$.

Vậy $d(MN,AC)=\dfrac{|[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AC}].\overrightarrow{MA}|}{|[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AC}]|}=\dfrac{a\sqrt{2}}{4}.$

Bài toán 3.5.2. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD, các mặt bên tạo với đáy một góc β. Điểm K là trung điểm của SB. Hãy tính góc φ giữa hai mặt phẳng (AKC) và (SAB) theo β.

GIẢI.

Gọi H là giao điểm của AC và BD. Không mất tính tổng quát ta đặt cạnh hình vuông là a và SH = h ($h>0$).

Ta suy ra được $h=\dfrac{a\tan\beta}{2}$. Chọn hệ trục tọa độ Descartes Oxyz như hình vẽ với gốc tọa độ O trùng với điểm H.

Ta có: $H(0;0;0), A(a;0;0), B(0;a;0), C(-a;0;0), D(0;-a;0), S(0;0;h),$

$K\left(0;\dfrac{a}{2};\dfrac{h}{2}\right)$.
Khi đó mặt phẳng (SAB) có phương trình:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{h}=1 \Leftrightarrow hx+hy+az-ha=0$$

Suy ra $\overrightarrow{n_1}=(h;h;a)$ là một VTPT của mặt phẳng (SAB).
Ta có $\overrightarrow{AK}=\left(-a;\dfrac{a}{2};\dfrac{h}{2}\right),\overrightarrow{AC}=(-a;0;0)$ và $[\overrightarrow{AK},\overrightarrow{AC}]=\left(0;-\dfrac{ah}{2};\dfrac{a^2}{2}\right)$.
Nên mặt phẳng (AKC) có VTPT là $\overrightarrow{n_2}=(0;h;-a)$.
Do đó: $\cos\varphi=\dfrac{|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|.|\overrightarrow{n_2}|}=\dfrac{|a^2-h^2|}{\sqrt{(2h^2+a^2)(a^2+h^2)}}$.

Với $h=\dfrac{a\tan\beta}{2}$, ta có: $\cos\varphi=\dfrac{|1-\dfrac{1}{4}\tan^2\beta|}{\sqrt{\dfrac{1}{2}\tan^2\beta+1}.\sqrt{1+\dfrac{1}{4}\tan^2\beta}}$.

3.6 BÀI TOÁN VỀ DIỆN TÍCH VÀ THỂ TÍCH

Bài toán 3.6.1. Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA=2HB$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích của khối chóp S.ABC và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a.

GIẢI.
Bước 1. Gọi I là trung điểm của AB, kẻ HD // CI, $D\in BC$. Chọn hệ trục tọa độ Decartes Oxyz sao cho gốc tọa độ trùng với điểm H, B thuộc Ox, D thuộc Oy, S thuộc Oz. ΔABC đều cạnh a nên $CI=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Bước 2. Ta có: $H(0;0;0),A\left(-\dfrac{2a}{3};0;0\right),B\left(\dfrac{a}{3};0;0\right),C\left(-\dfrac{a}{6};\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$, $S(0;0;z)$ với $z>0$.

Bước 3. $\overrightarrow{SC}=\left(-\dfrac{a}{6};\dfrac{a\sqrt{3}}{2};-z\right),\overrightarrow{k}=(0;0;1)$. Góc giữa SC và (ABC) bằng 60^0 nên ta có: $\sin 60^0=\dfrac{|\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{k}|}{|\overrightarrow{SC}|.|\overrightarrow{k}|}=\dfrac{3z}{\sqrt{7a^2+9z^2}}\Leftrightarrow z^2=\dfrac{21a^2}{9}$.

Suy ra $z=\dfrac{a\sqrt{21}}{3}$, do đó $S\left(0;0;\dfrac{a\sqrt{21}}{3}\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{SA}=\left(-\dfrac{2a}{3};0;-\dfrac{a\sqrt{21}}{3}\right),\overrightarrow{SB}=\left(\dfrac{a}{3};0;-\dfrac{a\sqrt{21}}{3}\right)$

và $[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}] = \left(0; -\dfrac{a^2\sqrt{21}}{3}; 0\right); \overrightarrow{SC} = \left(-\dfrac{a}{6}; \dfrac{a\sqrt{3}}{2}; -\dfrac{a\sqrt{21}}{3}\right)$.

Thể tích của khối chóp S.ABC là:

$V_{S.ABC} = \dfrac{1}{6}|[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}].\overrightarrow{SC}| = \dfrac{a^3\sqrt{7}}{12}$ (đvtt).

$\overrightarrow{BC} = \left(-\dfrac{a}{2}; \dfrac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right), \overrightarrow{AB} = (a; 0; 0)$

Suy ra $[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BC}] = \left(-\dfrac{a^2\sqrt{7}}{2}; -\dfrac{a^2\sqrt{21}}{6}; -\dfrac{a^2\sqrt{3}}{3}\right)$.

Do đó $d(SA, BC) = \dfrac{|[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BC}].\overrightarrow{AB}|}{|[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BC}]|} = \dfrac{a\sqrt{42}}{8}$.

3.7 BÀI TOÁN VỀ QUỸ TÍCH

Bài toán 3.7.1. Cho hai điểm A, B và một số thực dương k. Tìm quỹ tích những điểm M trong không gian sao cho $MA = kMB$.

GIẢI.

Bước 1. Chọn hệ trục tọa độ Descartes Oxyz với gốc tọa độ O là trung điểm của AB, trục Ox trùng với OB.

Bước 2. Đặt $AB = 2a, (a > 0)$, do đó: $A(-a; 0; 0), B(a; 0; 0)$.

Bước 3. Gọi $M(x; y; z)$, khi đó:

$$\overrightarrow{MA} = (-a - x; -y; -z), \overrightarrow{MB} = (a - x; -y; -z).$$

Theo giả thiết

$$MA = k.MB \Leftrightarrow MA^2 = k^2MB^2$$

Suy ra $(-a - x)^2 + y^2 + z^2 = k^2\left((a - x)^2 + y^2 + z^2\right)$

$$\Leftrightarrow (1 - k^2)x^2 + (1 - k^2)y^2 + (1 - k^2)z^2 + 2a(1 + k^2)x = 0.$$

Nếu $k = 1$ thì qũy tích điểm M là đường thẳng $x = 0$.

Nếu $k \neq 1$ thì phương trình tương đương với:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2\frac{a(1 + k^2)}{1 - k^2}x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{a(1 + k^2)}{1 - k^2}\right)^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{a(1 + k^2)}{1 - k^2}\right)^2.$$

Vậy quỹ tích điểm M là mặt cầu tâm $I\left(\dfrac{a(1 + k^2)}{1 - k^2}; 0; 0\right)$ nằm trên đường thẳng AB, bán kính $R = \left|\dfrac{a(1 + k^2)}{1 - k^2}\right|$.

CHƯƠNG 4
PHƯƠNG PHÁP DÙNG QUAN HỆ SONG SONG, QUAN HỆ VUÔNG GÓC

Chương này trình bày việc vận dụng quan hệ song song, quan hệ vuông góc để giải một số lớp bài toán hình học không gian.

4.1 QUY TRÌNH GIẢI BÀI TOÁN HÌNH HỌC KHÔNG GIAN SỬ DỤNG QUAN HỆ SONG SONG, QUAN HỆ VUÔNG GÓC

Bước 1. Vẽ hình và biểu diễn các mối quan hệ (song song, vuông góc, bằng nhau, ...) lên hình vẽ.

Bước 2. Phân tích các giả thiết và các yêu cầu của kết luận.

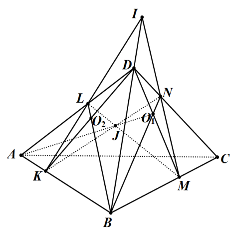
Bước 3. Vận dụng cách định nghĩa, định lý, tính chất để chứng minh kết luận.

4.2 BÀI TOÁN CHỨNG MINH BA ĐIỂM THẲNG HÀNG, BA ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG QUY

Bài toán 4.2.1. Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Gọi I là điểm trên nữa đường thẳng BD nhưng không thuộc đoạn BD. Trong (ABD) vẽ đường thẳng qua I và cắt hai đoạn AB, AD lần lượt tại K và L. Trong (BCD) vẽ đường thẳng qua I cắt hai đoạn CB, CD tương ứng tại M và N. Giả sử $BN \cap DM = O_1; BL \cap DK = O_2; LM \cap KN = J$. Chứng minh ba điểm A, J, O_1 thẳng hàng.

GIẢI.

Bước 1. Ta có hình vẽ:



Bước 2. Theo giả thiết ta có:

$BN \cap DM = O_1$, nên $O_1 \in BN$ suy ra $O_1 \in (ABN)$ (1)

và $LM \cap KN = J$, nên $J \in KN$ suy ra $J \in (ABN)$ (2)

Bước 3. Từ (1) và (2) suy ra O_1, A, J cùng thuộc (ABN) (3)

Tương tự ta có:

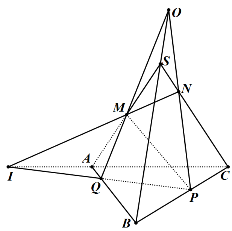
$O_1 \in DM$ suy ra $O_1 \in (ADM)$ (4)

$J \in LM$ suy ra $J \in (ADM)$ (5)

Từ (4) và (5) suy ra A, O_1, J cùng thuộc (ADM) (6)
Hai mặt phẳng (ADM) và (ABN) có chung điểm A, nên chắc chắn (ABN) và (ADM) phải cắt nhau theo giao tuyến là đường thẳng Δ. Từ (3) và (6) ta suy ra A, O_1, J thẳng hàng.

Bài toán 4.2.2. Cho M, N, P là ba điểm tùy ý trên các cạnh SA, SC, BC của tứ diện SABC sao cho NP không song song với SB. Q là giao điểm của (MNP) với cạnh AB. Chứng minh QM, SB, PN đồng quy.

GIẢI.

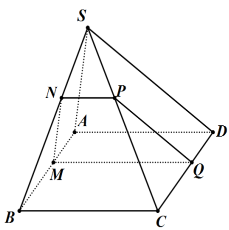


Trong (SAC), ta có: $MN \cap AC = I$.
Trong (ABC), ta có: $IB \cap AB = Q$. Suy ra $Q = (MNP) \cap AB$.
Trong (INP), ta có: $QM \cap PN = O$.
Do ba điểm B, S, O thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng (AQM) và (CPN) nên B, S, O thẳng hàng. Suy ra ba đường thẳng QM, SB, PN đồng quy tại O.

4.3 BÀI TOÁN CHỨNG MINH SONG SONG, VUÔNG GÓC

Bài toán 4.3.1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Trên các cạnh AB, SB, SC lấy các điểm M, N, P thỏa mãn điều kiện $AM = k.AB, SN = k.SB, SP = k.SC, (0 < k < 1)$. Tìm giao điểm Q của CD và mặt phẳng (MNP). Chứng minh $MQ//AD$ và $PQ//SD$.

GIẢI.
Bước 1. Ta có hình vẽ:



Bước 2. Theo giả thiết ta có: $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{SN}{SB} = \dfrac{SP}{SC}$, suy ra $\left\{ \begin{array}{l} MN//SA \\ NP//BC \end{array} \right.$.

Bước 3. Khi đó ta có:
$\begin{cases} M \in (MNP) \cap (ABCD) \\ NP//BC \end{cases}$, suy ra $(MNP) \cap (ABCD) = Mx$, với $Mx//BC$
và Mx cắt CD tại Q. Vậy $CD \cap (MNP) = Q$.
Ta có $MQ//BC, AD//BC$. Suy ra $MQ//AD$.

Áp dụng định lý Ta-lét, ta có:

$$MQ//AD, \text{ suy ra } \frac{DQ}{DC} = \frac{AM}{AB} = k;$$
$$NP//BC, \text{ suy ra } \frac{SN}{SB} = \frac{SP}{SC} = k.$$

Do đó $\dfrac{SP}{SC} = \dfrac{DQ}{DC}$, suy ra $PQ//SD$.

Bài toán 4.3.2. Cho tứ diện ABCD. Chứng minh điều kiện để tứ diện có cạnh đối nhau vuông góc:

$$AB \perp CD \Leftrightarrow AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2$$

GIẢI.

Ta chứng minh điều kiện theo hai trường hợp.
Điều kiện ($\Rightarrow$): Giả sử $AB \perp CD \Rightarrow CD \perp (ABH)$. H là chân đường cao BH, suy ra $CD \perp AH$.

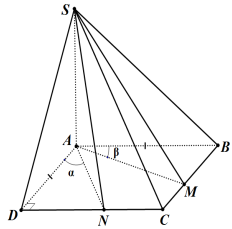
Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác với M là trung điểm CD.
Suy ra $\begin{cases} AC^2 - AD^2 = 2\overline{CD}.\overline{MH} \\ BC^2 - BD^2 = 2\overline{CD}.\overline{MH} \end{cases}$, do đó $AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2$.
Điều kiện ($\Leftarrow$): Giả sử $AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2$ (1)
Gọi M là trung điểm CD, AH_1, BH_2 là chân đường cao tương ứng, ta có:
$\begin{cases} AC^2 - AD^2 = 2\overline{CD}.\overline{MH_1} & (2) \\ BC^2 - BD^2 = 2\overline{CD}.\overline{MH_2} & (3) \end{cases}$
Từ (1), (2) và (3) ta có: $\overline{CD}.\overline{MH_1} = \overline{CD}.\overline{MH_2}$
suy ra $\overline{MH_1} = \overline{MH_2} \Leftrightarrow H_1 \equiv H_2$ (4)
Từ (4) ta có $CD \perp (ABH_1) = (ABH_2)$, cả hai mặt phẳng $(ABH_1); (ABH_2)$ đều chứa AB, do đó $CD \perp AB$.
Kết luận: Điều kiện cần và đủ để hai cạnh đối AB và CD của tứ diện ABCD vuông góc nhau là $AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2$.

4.4 BÀI TOÁN VỀ GÓC VÀ KHOẢNG CÁCH

Bài toán 4.4.1. Trong mặt phẳng (P) cho hình vuông ABCD cạnh a. Đoạn thẳng SA cố định vuông góc với (P) tại A. M, N lần lượt là hai điểm di động trên cạnh BC và CD. Đặt $M = u, DN = v$. Chứng minh rằng $4(u + v) + uv = a^2$ là điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng (SAM) và (SAN) tạo với nhau một góc 45^0.

GIẢI.

Ta có $(SAM) \cap (SAN) = SA$.



Do $SA \perp (ABCD)$, suy ra $AM \perp SA, AN \perp SA$.
Suy ra $\widehat{MAN}$ là góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAM) và (SAN).
Đặt $\widehat{DAN} = \alpha, \widehat{MAB} = \beta$.
Khi đó $\widehat{MAN} = 45^0 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 45^0 \Leftrightarrow \tan(\alpha + \beta) = 1$.

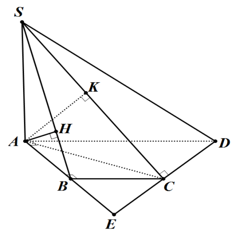
$$\Leftrightarrow \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha.\tan\beta} = 1 \Leftrightarrow \frac{\frac{v}{a} + \frac{u}{a}}{1 - \frac{uv}{a^2}} = 1 \Leftrightarrow a(u+v) + uv = a^2.$$

Suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 4.4.2. Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông, trong đó $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^0; BA = BC = a;\ AD = 2a$. Giả sử $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc với đáy (ABCD). Gọi H là hình chiếu của A lên SB. Tính khoảng cách từ H đến (SCD).

GIẢI.

Dễ thấy trong hình thang ABCD, ta có: $AC = a\sqrt{2}$. Do $AB = a\sqrt{2}$, suy ra ΔABC là tam giác vuông cân tại C. Do đó ta có $BC \perp AC$.



Theo Định lý ba đường vuông góc ta có: $SC \perp CD$.
Giả sử $CD \cap AB = E$. Ta có B là trung điểm của AE.
Vì $BC \perp (SAC)$, suy ra $(SDC) \perp (SAC)$.
Do $(SDC) \cap (SAC) = SC$, nên nếu kẻ $AK \perp SC$, suy ra $AK \perp (SCD)$.
Suy ra $d(A, (SCD)) = AK$ (1)
Ta có $AB \cap (SCD) = E$, suy ra $d(A, (SCD)) = 2.d(B, (SCD))$ (do $AB = BE$). (2)
Kẻ $AH \perp SB$. Ta có trong tam giác vuông SAB: $SA^2 = SH.SB$, vì $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{3}$, nên $SH = \dfrac{SA^2}{SB} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Theo Định lý Ta-lét, ta có: $\dfrac{d(B,(SCD))}{d(H,(SCD))} = \dfrac{BS}{HS} = \dfrac{3}{2}$.

Suy ra: $d(H,(SCD)) = \dfrac{2}{3}d(B,(SCD))$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra: $d(H,(SCD)) = \dfrac{1}{3}d(A,(SCD)) = \dfrac{1}{3}AK$ (4)

Do $SA = AC = a\sqrt{2}$, suy ra $AK = a$

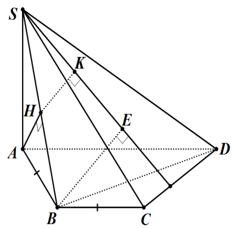
Từ (4) và (5) suy ra $d(H,(SCD)) = \dfrac{a}{3}$.

4.5 BÀI TOÁN VỀ DIỆN TÍCH VÀ THỂ TÍCH

Bài toán 4.5.1. Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có đáy ABCD là hình thang, trong đó $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^0, BA = BC = a, AD = 2a$. Giả sử SA vuông góc với đáy ABCD và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu của A trên SB. Tìm thể tích tứ diện SHCD.

GIẢI.

Bước 1. Ta có hình vẽ:



Bước 2. Trong hình thang vuông ABCD dễ thấy $\widehat{BCD} = 135^0$ và $CD = a\sqrt{2}$.

Kẻ HK và BE cùng vuông góc với (SCD), suy ra $HK//BE$ và S, K, E thẳng hàng.

Bước 3. Theo Định lí Talet, ta có: $\dfrac{HK}{BE} = \dfrac{SH}{SB}$ (1).

Ta có: $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{3}$.

Trong tam giác vuông SAB, ta có:

$SA^2 = SH.SB$ nên $SH = \dfrac{SA^2}{SB} = \dfrac{2\sqrt{3}a}{3}$.

Do đó từ (1) suy ra: $HK = \dfrac{SH.BE}{SB} = \dfrac{2}{3}BE$.

Từ đó ta có $V_{H.SCD} = \dfrac{2}{3}V_{B.SCD}$. (2)

Lại có: $V_{B.SCD} = V_{S.BCD} = \dfrac{1}{3}.S_{BCD}.SA = \dfrac{1}{6}.BC.CD.\sin 135^0.SA$

Vậy $V_{B.SCD} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. (3)

Từ (2) và (3) suy ra: $V_{SHCD} = V_{H.SCD} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{9}$ (đvtt).

KẾT LUẬN

Luận văn "Một số phương pháp giải toán hình học không gian" đã đạt được mục đích và nhiệm vụ đề ra, cụ thể luận văn đã thực hiện được các vấn đề sau:

1. Tìm hiểu và trình bày phương pháp vectơ, phương pháp tọa độ, quan hệ song song, quan hệ vuông góc trong giải toán hình học không gian.

2. Hệ thống và phân loại các bài toán hình học không gian giải được bằng phương pháp vectơ, phương pháp tọa độ, phương pháp dùng quan hệ song song và quan hệ vuông góc.

3. Định hướng việc ứng dụng từng phương pháp cho mỗi lớp bài toán cụ thể.

4. Đối với mỗi phương pháp đều có những bài toán minh họa rõ ràng, cùng với những bài toán tương tự.

Hy vọng rằng nội dung của luận văn còn được tiếp tục hoàn thiện và phát triển hơn nữa, nhằm có thể là một tài liệu tham khảo tốt cho học sinh, sinh viên và những ai quan tâm đến giải toán hình học không gian.