BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

BÁO CÁO TỔNG KẾT

ĐỀ TÀI KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ CẤP ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

ĐẶC TRƯNG CỦA KHÔNG GIAN VỚI PHỦ ĐẾM ĐƯỢC THEO ĐIỂM

MÃ SỐ: Đ2013-03-57-BS

Chủ nhiệm đề tài: TS. Lương Quốc Tuyển

Đà Nẵng - 11/2014

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

BÁO CÁO TỔNG KẾT

ĐỀ TÀI KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ CẤP ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

ĐẶC TRƯNG CỦA KHÔNG GIAN VỚI PHỦ ĐẾM ĐƯỢC THEO ĐIỂM

MÃ SỐ: Đ2013-03-57-BS

Xác nhận của cơ quan chủ trì đề tài | Chủ nhiệm đề tài

TS. Lương Quốc Tuyển

Đà Nẵng - 11/2014

DANH SÁCH THÀNH VIÊN THAM GIA NGHIÊN CỨU ĐỀ TÀI VÀ ĐƠN VỊ PHỐI HỢP CHÍNH

Thành viên tham gia nghiên cứu đề tài

ThS. Nguyễn Hoàng Thành

Đơn vị phối hợp chính

Trường Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng

ĐẶT VẤN ĐỀ

Trong những năm 60 của thế kỷ trước, một số tác giả đã phát hiện rằng có thể đặc trưng mạng có tính chất phủ nào đó bởi ảnh của không gian mêtric qua các ánh xạ thích hợp. Đây là phương pháp hiệu quả để phân loại các lớp không gian cũng như phân loại các tính chất phủ trong không gian mêtric suy rộng. Năm 1973, E. Michael và K. Nagami đã đưa ra bài toán mở: *Nếu X là s-ảnh thương của không gian mêtric, thì nó có là s-ảnh thương phủ-compắc của không gian mêtric hay không?* Bài toán này đã thu hút rất nhiều nhà toán học trên thế giới quan tâm nhưng đến nay vẫn chưa có lời giải. Qua đó, các nhà toán học trên thế giới đã đưa ra rất nhiều kết quả liên quan đến:

(1) Đặc trưng ảnh của không gian mêtric qua các ánh xạ thích hợp;

(2) Mối quan hệ giữa các phủ trong Lý thuyết không gian mêtric suy rộng;

(3) Mối quan hệ giữa các ánh xạ có tính chất phủ;

(4) Sự bảo tồn của các không gian, các mạng qua các ánh xạ.

Nhờ đó, các tác giả đã thu được rất nhiều kết quả về tính khả mêtric của không gian tôpô. Hơn nữa, các tác giả cũng đã đặt ra rất nhiều bài toán mở liên quan đến các vấn đề này. Đặc biệt, trong những năm gần đây mạng đếm được theo điểm và các ánh xạ có tính chất phủ đã được nhiều nhà nghiên cứu tôpô đại cương quan tâm như: J. Nagata, G. Gruenhage, Y. Tanaka, C. Liu, S. Lin, Y. Ge, X. Ge ..., các tác giả đã đưa ra rất nhiều kết quả góp phần to lớn cho lĩnh vực tôpô đại cương.

CHƯƠNG 1

HỆ L-PONOMAREV VÀ ẢNH CỦA KHÔNG GIAN MÊTRIC KHẢ LI ĐỊA PHƯƠNG

Năm 1994, S. Lin đã đưa ra khái niệm $msss$-ánh xạ ($mssc$-ánh xạ) để đặc trưng không gian với mạng σ-đếm được địa phương (tương ứng, σ-hữu hạn địa phương) thông qua $msss$-ảnh (tương ứng, $mssc$-ảnh) của không gian mêtric. Sau đó, nhiều tác giả đã thu được một số đặc trưng $msss$-ảnh (tương ứng, $mssc$-ảnh) của không gian mêtric (hoặc không gian nửa-mêtric).

Hơn nữa, N. V. Velichko đã chứng minh rằng không gian X là s-ảnh giả-mở của không gian mêtric khả li địa phương khi và chỉ khi X là không gian khả li địa phương và là s-ảnh giả-mở của không gian mêtric.

Gần đây, N. V. Dung đã thu được một số đặc trưng của $msss$-ảnh ($mssc$-ảnh) của không gian mêtric khả li địa phương trong lớp T_1-không gian chính quy.

1.1 Một số câu hỏi

1.1.1 Câu hỏi. *Tìm một tính chất Φ sao cho không gian X là s-ảnh thương của của không gian mêtric có tính chất Φ khi và chỉ khi X là không gian có tính chất Φ và X là s-ảnh thương của không gian mêtric.*

1.1.2 Câu hỏi. *Hãy đặc trưng $msss$-ảnh thương-dãy (giả-phủ-dãy, phủ-compắc)*

của không gian mêtric khả li địa phương thông qua các mạng σ-đếm được địa phương?

1.1.3 Câu hỏi. *Tìm một tính chất Φ sao cho không gian X là msss-ảnh (mssc-ảnh) của không gian mêtric có tính chất Φ khi và chỉ khi X là không gian có tính chất Φ và X là msss-ảnh (tương ứng, mssc-ảnh) của không gian mêtric.*

Trong chương này, chúng tôi đưa ra khái niệm hệ L-Ponomarev $(f, M, X, \mathcal{P}_n^*)$ mà nó là suy rộng của hệ Ponomarev $(f, M, X, \mathcal{P})$ và chứng minh một số tính chất liên quan đến hệ này. Từ đó, chúng tôi thu được đặc trưng mới của *msss*-ảnh (*mssc*-ảnh) thương của không gian mêtric khả li địa phương, đưa ra câu trả lời khẳng định cho các Câu hỏi 1.1.2 và Câu hỏi 1.1.3.

1.2 Một số định nghĩa

1.2.1 Định nghĩa. Giả sử P là tập con của X và $\{x_n\}$ là dãy hội tụ đến x trong X. Khi đó,

(1) Dãy $\{x_n\}$ được gọi là *từ một lúc nào đó nằm trong P* (*eventually in P*), nếu tồn tại $m \in \mathbb{N}$ sao cho $\{x\} \bigcup \{x_n : n \geq m\} \subset P$.

(2) Dãy $\{x_n\}$ được gọi là *thường xuyên gặp P* (*frequently in P*), nếu tồn tại dãy con $\{x_{n_k}\}$ của $\{x_n\}$ từ một lúc nào đó nằm trong P.

(3) P được gọi là *lân cận dãy của x* (*sequential neighborhood of x*), nếu với mọi dãy L hội tụ đến x trong X, L từ một lúc nào đó nằm trong P.

(4) P được gọi là *mở theo dãy* (*sequentially open*), nếu P là lân cận dãy của x với mọi $x \in P$.

1.2.2 Định nghĩa. Giả sử $\mathcal{P}$ là họ gồm các tập con nào đó của X. Khi đó,

(1) $\mathcal{P}$ được gọi là họ *đếm được theo điểm* (*point-countable*), nếu $(\mathcal{P})_x$ là đếm được với mọi $x \in X$.

(2) $\mathcal{P}$ được gọi là họ *hữu hạn theo điểm* (*point-finite*), nếu $(\mathcal{P})_x$ là hữu hạn với mọi $x \in X$.

(3) $\mathcal{P}$ được gọi là họ *đếm được địa phương* (*locally countable*), nếu với mỗi $x \in X$, tồn tại lân cận V của x sao cho $(\mathcal{P})_V$ là đếm được.

(4) $\mathcal{P}$ được gọi là họ *hữu hạn địa phương* (*locally finite*), nếu với mỗi $x \in X$, tồn tại lân cận V của x sao cho $(\mathcal{P})_V$ là hữu hạn.

(5) $\mathcal{P}$ được gọi là họ *sao-đếm được* (*star-countable*), nếu $(\mathcal{P})_P$ là đếm được với mọi $P \in \mathcal{P}$.

(6) $\mathcal{P}$ được gọi là họ *rời rạc* (*discrete*), nếu với mỗi $x \in X$, tồn tại lân cận V của x sao cho $(\mathcal{P})_V$ có nhiều nhất một phần tử.

(7) Ta nói X *được xác định bởi* $\mathcal{P}$ (X *is determined by* $\mathcal{P}$), nếu với mọi $F \subset X$, F là tập con đóng (tương ứng, tập con mở) trong X khi và chỉ khi $F \cap P$ là tập con đóng (tương ứng, tập con mở) trong P với mọi $P \in \mathcal{P}$.

1.2.3 Định nghĩa. Giả sử $\mathcal{P}$ là một phủ của không gian X và (P) là tính chất phủ. Ta nói rằng $\mathcal{P}$ là phủ có *tính chất* σ-(P) (σ-(P) *property*), nếu nó có thể biểu diễn được dưới dạng $\mathcal{P} = \bigcup\{\mathcal{P}_n : n \in \mathbb{N}\}$, trong đó mỗi $\mathcal{P}_n$ là phủ có tính chất (P) và $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}_{n+1}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

1.2.4 Định nghĩa. Giả sử $\mathcal{P}$ là họ gồm các tập con nào đó của X. Khi đó,

(1) $\mathcal{P}$ được gọi là *mạng tại* x (*network at* x) trong X, nếu $x \in P$ với mọi $P \in \mathcal{P}$ và với mọi lân cận U của x, tồn tại $P \in \mathcal{P}$ sao cho $x \in P \subset U$.

(2) $\mathcal{P}$ được gọi là *mạng* (*network*) của X, nếu $(\mathcal{P})_x$ là mạng tại x với mọi $x \in X$.

(3) $\mathcal{P}$ được gọi là *k-mạng* (*k-network*) của X, nếu với mọi tập con compắc $K \subset U$ với U là mở trong X, tồn tại họ con hữu hạn $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$ sao cho $K \subset \bigcup \mathcal{Q} \subset U$.

(4) $\mathcal{P}$ được gọi là *cs*-mạng* (*cs*-network*) của X, nếu với mọi dãy L hội tụ đến $x \in U$ với U là mở trong X, tồn tại $P \in \mathcal{P}$ sao cho L thường xuyên gặp $P \subset U$.

(5) $\mathcal{P}$ được gọi là *cs-mạng* (*cs-network*) của X, nếu với mọi dãy L hội tụ đến $x \in U$ với U là mở trong X, tồn tại $P \in \mathcal{P}$ sao cho L từ một lúc nào đó nằm trong $P \subset U$.

(6) $\mathcal{P}$ được gọi là phủ *Lindelöf* (tương ứng, *compact*), nếu mỗi phần tử của $\mathcal{P}$ là tập con Lindelöf (tương ứng, compắc).

1.2.5 Định nghĩa. Cho không gian X. Khi đó,

(1) X được gọi là *k-không gian* (*k-space*), nếu nó được xác định bởi phủ gồm tất cả các tập con compắc.

(2) X được gọi là không gian *dãy* (*sequential*), nếu nó được xác định bởi phủ gồm tất cả các tập con compắc khả mêtric.

(3) X được gọi là không gian *Fréchet-Urysohn*, nếu với mọi $F \subset X$ và với mọi $x \in \mathtt{cl}(F)$, tồn tại dãy $\{x_n\}$ trong F hội tụ đến x.

1.2.6 Định nghĩa. Giả sử $\mathcal{P} = \bigcup\{\mathcal{P}_x : x \in X\}$ là một phủ của không gian X thỏa mãn các tính chất sau với mọi $x \in X$.

(a) $\mathcal{P}_x$ là mạng tại x.

(b) Nếu P_1, $P_2 \in \mathcal{P}_x$, thì tồn tại $P \in \mathcal{P}_x$ sao cho $P \subset P_1 \cap P_2$.

(1) $\mathcal{P}$ được gọi là *cơ sở yếu* của X, nếu với $G \subset X$, G là tập hợp mở trong X khi và chỉ khi với mọi $x \in G$, tồn tại $P \in \mathcal{P}_x$ sao cho $P \subset G$.

(2) $\mathcal{P}$ được gọi là *sn-mạng* (tương ứng, *so-mạng*) của X, nếu mỗi phần tử của $\mathcal{P}_x$ là lân cận dãy của x với mọi $x \in X$ (tương ứng, mở theo dãy trong X).

1.2.7 Định nghĩa. Cho không gian X. Khi đó,

(1) X được gọi là không gian *gf-đếm được* (*gf-countable*), nếu nó có cơ sở yếu $\bigcup\{\mathcal{P}_x : x \in X\}$ sao cho $\mathcal{P}_x$ là đếm được với mọi $x \in X$.

(2) X được gọi là không gian *snf-đếm được* (*snf-countable*), nếu nó có *sn*-mạng $\bigcup\{\mathcal{P}_x : x \in X\}$ sao cho $\mathcal{P}_x$ là đếm được với mọi $x \in X$.

(3) X được gọi là không gian *gs-đếm được* (*gs-countable*), nếu nó có cơ sở yếu đếm được.

(4) X được gọi là không gian *sns-đếm được* (*sns-countable*), nếu nó có *sn*-mạng đếm được.

(5) X được gọi là không gian *sos-đếm được* (*sos-countable*), nếu nó có *so*-mạng đếm được.

(6) X được gọi là không gian *cosmic* (*cosmic space*), nếu nó là không gian chính quy có mạng đếm được.

(7) X được gọi là $\aleph_0$*-không gian* ($\aleph_0$*-space*), nếu nó là không gian chính quy có cs^*-mạng đếm được.

(8) X được gọi là H-$\aleph_0$*-không gian* (H-$\aleph_0$*-space*), nếu X là không gian với cs^*-mạng đếm được.

(9) X được gọi là $\aleph$*-không gian* ($\aleph$*-space*), nếu nó là không gian chính quy có k-mạng σ-hữu hạn địa phương.

(10) X được gọi là không gian *sn-khả mêtric* (*sn-metrizable*), nếu nó là không gian chính quy có *sn*-mạng σ-hữu hạn địa phương.

(11) X được gọi là không gian *g-khả mêtric* (*g-metrizable*), nếu nó là không gian chính quy có cơ sở yếu σ-hữu hạn địa phương.

1.2.8 Định nghĩa. Cho ánh xạ $f : X \longrightarrow Y$. Khi đó,

(1) f được gọi là *s-ánh xạ* (*s-map*), nếu $f^{-1}(y)$ là tập con khả li trong X với mọi $y \in Y$.

(2) f được gọi là *ánh xạ compắc* (*compact map*), nếu $f^{-1}(y)$ là tập con compắc trong X với mọi $y \in Y$.

(3) f được gọi là *π-ánh xạ* (*π-map*), nếu X là không gian mêtric với mêtric d và với mỗi $y \in Y$, $d\big(f^{-1}(y), X - f^{-1}(U)\big) > 0$ với mọi lân cận U của y.

(4) f được gọi là ánh xạ *thương* (*quotient*), nếu $f^{-1}(U)$ là tập con mở trong X, thì U là mở trong Y.

(5) f được gọi là ánh xạ *giả-mở* (*pseudo-open*), nếu với mọi $y \in Y$ và với mọi lân cận U của $f^{-1}(y)$ trong X, $y \in \mathtt{Int} f(U)$.

1.2.9 Định nghĩa. Cho ánh xạ $f : X \longrightarrow Y$. Khi đó,

(1) f được gọi là ánh xạ *mở-yếu* (*weak-open*), nếu trong Y tồn tại cở sở yếu $\bigcup\{\mathcal{B}_y : y \in Y\}$ và với mỗi $y \in Y$, tồn tại $x \in f^{-1}(y)$ thỏa mãn điều kiện: Với mỗi lân cận U của x, tồn tại $B \in \mathcal{B}_y$ sao cho $B \subset f(U)$.

(2) f được gọi là ánh xạ *1-phủ-dãy* (*1-sequence-covering*), nếu với mỗi $y \in Y$, tồn tại $x \in f^{-1}(y)$ sao cho mỗi dãy hội tụ đến y trong Y là ảnh của dãy nào đó hội tụ đến x trong X.

(3) f được gọi là ánh xạ *2-phủ-dãy* (*2-sequence-covering*), nếu với mỗi $y \in Y$, $x_y \in f^{-1}(y)$ và $\{y_n\}$ là dãy hội tụ đến y trong Y, tồn tại dãy $\{x_n\}$ hội tụ đến x_y trong X sao cho $x_n \in f^{-1}(y_n)$.

(4) f được gọi là ánh xạ *phủ-dãy* (*sequence-covering*), nếu mỗi dãy hội tụ trong Y là ảnh của dãy nào đó hội tụ trong X.

(5) f được gọi là ánh xạ *giả-phủ-dãy* (*pseudo-sequence-covering*), nếu mỗi dãy hội tụ trong Y là ảnh của tập compắc nào đó trong X.

(6) f được gọi là ánh xạ *phủ-compắc* (*compact-covering*), nếu mỗi tập con compắc trong Y là ảnh của tập con compắc nào đó trong X.

(7) f được gọi là ánh xạ *phủ-dãy con* (*subsequently-covering*), nếu mỗi dãy S hội tụ trong Y, tồn tại tập con compắc K trong X sao cho $f(K)$ là dãy con của S.

(8) f được gọi là ánh xạ *thương-dãy* (*sequentially-quotient*), nếu với mỗi dãy hội tụ L trong Y, tồn tại dãy hội tụ S trong X sao cho $f(S)$ là dãy con của L.

1.2.10 Định nghĩa. Cho ánh xạ $f : X \longrightarrow Y$, trong đó X là không gian con của không gian tích Descartes $\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ của dãy $\{X_i : i \in \mathbb{N}\}$ gồm các không gian mêtric. Khi đó,

(1) f được gọi là *msss-ánh xạ* (*msss-map*), nếu với mỗi $y \in Y$, tồn tại dãy $\{V_i : i \in \mathbb{N}\}$ gồm các lân cận mở của y trong Y sao cho mỗi $p_i f^{-1}(V_i)$ là tập con khả li trong X_i.

(2) f được gọi là *mssc-ánh xạ* (*mssc-map*), nếu với mỗi $y \in Y$, tồn tại dãy $\{V_i : i \in \mathbb{N}\}$ gồm các lân cận mở của y trong Y sao cho mỗi $\mathtt{cl}\big(p_i f^{-1}(V_i)\big)$ là tập compắc trong X_i.

1.2.11 Định nghĩa. Giả sử $\mathcal{P}$ là họ gồm các tập con nào đó của X. Khi đó,

(1) $\mathcal{P}$ được gọi là *cs*-phủ* (*cs*-cover*) của X, nếu với mọi dãy L hội tụ trong X, tồn tại $P \in \mathcal{P}$ sao cho L thường xuyên gặp P.

(2) $\mathcal{P}$ được gọi là *cs-phủ* (*cs-cover*) của X, nếu mọi dãy L hội tụ trong X, tồn tại $P \in \mathcal{P}$ sao cho L từ một lúc nào đó nằm trong P.

(3) $\mathcal{P}$ được gọi là *cfp-phủ* (*cfp-cover*) của X, nếu với mọi tập con compắc $K \subset X$, tồn tại họ hữu hạn $\{K_i : 1 \leq i \leq n\}$ gồm các tập con đóng của K và họ con $\{P_i : 1 \leq i \leq n\} \subset \mathcal{P}$ sao cho $K_i \subset P_i$ với mọi $i \leq n$ và $K = \bigcup\{K_i : 1 \leq i \leq n\}$.

1.3 Kết quả chính

Các kết quả trong mục này được trình bày trong [1,4]. Hơn nữa, trong mục này, chúng tôi giới hạn tính chất (P) và $\alpha(P)$ như sau.

(1) (P) là hữu hạn địa phương, đếm được địa phương.

(2) $\alpha(P)$ là *mssc* nếu (P) là hữu hạn địa phương, và $\alpha(P)$ là *msss* nếu (P) là đếm được địa phương.

1.3.1 Định nghĩa. Giả sử $\mathcal{P} = \bigcup\{\mathcal{P}_n : n \in \mathbb{N}\}$ là mạng Lindelöf có tính chất σ-(P) của không gian X. Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, ta đặt

$$\mathcal{P}_n^* = \{X\} \cup \mathcal{P}_n = \{P_\alpha : \alpha \in \Lambda_n\}$$

và trên mỗi Λ_n ta trang bị tôpô rời rạc. Giả sử rằng với mỗi $x \in X$, tồn tại mạng $\{P_{\alpha_n} : n \in \mathbb{N}\}$ tại x, trong đó $\alpha_n \in \Lambda_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Khi đó,

$$M = \Big\{\alpha = (\alpha_n) \in \prod_{n \in \mathbb{N}} \Lambda_n : \{P_{\alpha_n}\} \text{ là mạng tại } x_\alpha \text{ nào đó trong } \in X\Big\}$$

là không gian mêtric và mỗi điểm x_α là duy nhất trong X với mọi $\alpha \in M$. Định nghĩa $f : M \longrightarrow X$ là ánh xạ được cho bởi $f(\alpha) = x_\alpha$. Lúc này, ta nói rằng $(f, M, X, \mathcal{P}_n^*)$ là một hệ *L-Ponomarev*.

1.3.2 Nhận xét. (1) Giả sử $\mathcal{P} = \bigcup\{\mathcal{P}_n : n \in \mathbb{N}\}$ là mạng Lindelöf của X, trong đó mỗi $\mathcal{P}_n$ có tính chất (P). Khi đó, $\mathcal{P}$ là mạng Lindelöf có tính chất σ-(P).

(2) Nếu $(f, M, X, \mathcal{P}_n^*)$ là hệ L-Ponomarev, thì f là s-ánh xạ.

1.3.3 Bổ đề. *Nếu $\mathcal{P}$ là cs-mạng có tính chất σ-(P), thì $\mathcal{P}$ là cfp-mạng.*

1.3.4 Bổ đề. *Nếu X có cs^*-mạng Lindelöf có tính chất σ-(P), thì X có cs-mạng Lindelöf có tính chất σ-(P).*

1.3.5 Bổ đề. *Giả sử $f : M \longrightarrow X$ là $\alpha(P)$-ánh xạ và M là không gian mêtric khả li địa phương. Khi đó,*

(1) *X có cs^*-mạng Lindelöf với tính chất σ-(P), nếu f là ánh xạ thương-dãy.*

(2) *X có sn-mạng Lindelöf với tính chất σ-(P), nếu f là ánh xạ 1-phủ-dãy.*

(3) *X có so-mạng Lindelöf với tính chất σ-(P), nếu f là ánh xạ 2-phủ-dãy.*

1.3.6 Bổ đề. *Giả sử $\mathcal{P} = \bigcup\{\mathcal{P}_n : n \in \mathbb{N}\}$ là mạng Lindelöf có tính chất σ-(P) và $(f, M, X, \mathcal{P}_n^*)$ là hệ L-Ponomarev. Khi đó, các khẳng định sau là đúng.*

(1) *f là $\alpha(P)$-ánh xạ.*

(2) *M là không gian khả li địa phương.*

(3) *f là ánh xạ phủ-dãy và phủ-compắc, nếu $\mathcal{P}$ là cs-mạng.*

(4) *f là ánh xạ 1-phủ-dãy và phủ-compắc, nếu $\mathcal{P}$ là sn-mạng.*

(5) *f là ánh xạ 2-phủ-dãy và phủ-compắc, nếu $\mathcal{P}$ là so-mạng.*

1.3.7 Định lí. *Đối với không gian X, các khẳng định sau là tương đương.*

(1) *X có cs^*-mạng Lindelöf với tính chất σ-(P);*

(2) *X có cfp-mạng Lindelöf với tính chất σ-(P);*

(3) *X có cs-mạng Lindelöf với tính chất σ-(P);*

(4) *X là $\alpha(P)$-ảnh phủ-dãy và phủ-compact của không gian mêtric khả li địa phương;*

(5) *X là $\alpha(P)$-ảnh thương-dãy của không gian mêtric khả li địa phương;*

(6) *X là $\alpha(P)$-ảnh thương-dãy của không gian mêtric, và có so-phủ gồm các H-$\aleph_0$-không gian con.*

1.3.8 Nhận xét. Sử dụng Định lí 1.3.7, trong trường hợp (P) là tính chất đếm được địa phương, ta thu được câu trả lời khẳng định cho Câu hỏi 1.1.2.

Theo Định lí 1.3.7, ta có các hệ quả sau.

1.3.9 Hệ quả. *Các khẳng định sau là tương đương đối với không gian X.*

(1) *X là k-không gian với cs^*-mạng Lindelöf có tính chất σ-(P);*

(2) *X là k-không gian với cfp-mạng Lindelöf có tính chất σ-(P);*

(3) *X là k-không gian với cs-mạng Lindelöf có tính chất σ-(P);*

(4) *X là $\alpha(P)$-ảnh thương, phủ-dãy và phủ-compắc của không gian mêtric khả li địa phương;*

(5) *X là $\alpha(P)$-ảnh thương của không gian mêtric khả li địa phương;*

(6) *X là H-$\aleph_0$-không gian địa phương và là $\alpha(P)$-ảnh thương của không gian mêtric.*

1.3.10 Nhận xét. Nhờ Hệ quả 1.3.9, ta thu được câu trả lời khẳng định cho Câu hỏi 1.1.3.

1.3.11 Nhận xét. *Giả sử $\mathcal{P}$ là mạng có tính chất σ-(P) của không gian chính quy X. Khi đó,*

(1) *Nếu $\mathcal{P}$ là cs^*-mạng (cfp-mạng; cs-mạng), thì $\mathcal{P}$ là Lindelöf khi và chỉ khi mỗi phần tử của $\mathcal{P}$ là không gian con cosmic, khi và chỉ khi mỗi phần tử của $\mathcal{P}$ là $\aleph_0$-không gian con.*

(2) *Nếu $\mathcal{P}$ là sn-mạng, thì $\mathcal{P}$ là Lindelöf khi và chỉ khi mỗi phần tử của $\mathcal{P}$ là không gian con cosmic, khi và chỉ khi mỗi phần tử của $\mathcal{P}$ là không gian con sns-đếm được.*

(3) *Nếu $\mathcal{P}$ là so-mạng, thì $\mathcal{P}$ là Lindelöf khi và chỉ khi mỗi phần tử của $\mathcal{P}$ là không gian con cosmic, khi và chỉ khi mỗi phần tử của $\mathcal{P}$ là không gian con sos-đếm được.*

Sử dụng Định lí 1.3.7 và Nhận xét 1.3.11, chúng tôi nhận lại được các kết quả của N. V. Dung trong trường hợp X là không gian chính quy.

1.3.12 Hệ quả. *Các khẳng định sau là tương đương đối với không gian X.*

(1) *X có cs-mạng σ-đếm được địa phương gồm các $\aleph_0$-không gian con;*

(2) *X có cs-mạng σ-đếm được địa phương gồm các không gian con cosmic;*

(3) *X là $msss$-ảnh phủ-dãy của không gian mêtric khả li địa phương.*

1.3.13 Hệ quả. *Các khẳng định sau là tương đương đối với không gian X.*

(1) *X có cs-mạng σ-hữu hạn địa phương gồm các $\aleph_0$-không gian con;*

(2) *X có cs-mạng σ-hữu hạn địa phương gồm các không gian con cosmic;*

(3) *X là $mssc$-ảnh phủ-dãy của không gian mêtric khả li địa phương.*

1.3.14 Định lí. *Các khẳng định sau là tương đương đối với không gian X.*

(1) *X có sn-mạng Lindelöf với tính chất σ-(P);*

(2) *X là $\alpha(P)$-ảnh 1-phủ-dãy và phủ-compắc của không gian mêtric khả li địa phương;*

(3) *X là $\alpha(P)$-ảnh 1-phủ-dãy của không gian mêtric khả li địa phương;*

(4) *X là $\alpha(P)$-ảnh 1-phủ-dãy của không gian mêtric, và có so-phủ gồm các H-$\aleph_0$-không gian con.*

1.3.15 Hệ quả. *Các khẳng định sau là tương đương đối với không gian X.*

(1) *X có cơ sở yếu Lindelöf với tính chất σ-(P);*

(2) *X là $\alpha(P)$-ảnh mở-yếu và phủ-compắc của không gian mêtric khả li địa phương;*

(3) *X là $\alpha(P)$-ảnh mở-yếu của không gian mêtric khả li địa phương;*

(4) *X là H-$\aleph_0$-không gian địa phương và là $\alpha(P)$-ảnh mở-yếu của không gian mêtric.*

Nhờ Định lí 1.3.14 và Nhận xét 1.3.11, chúng tôi thu được các kết quả của N. V. Dung trong trường hợp X là không gian chính quy.

1.3.16 Hệ quả. *Các khẳng định sau là tương đương đối với không gian chính quy X.*

(1) *X có sn-mạng σ-đếm được địa phương gồm các không gian con sns-đếm được;*

(2) *X có sn-mạng σ-đếm được địa phương gồm các không gian con cosmic;*

(3) *X là msss-ảnh của không gian mêtric khả li địa phương.*

1.3.17 Hệ quả. *Các khẳng định sau là tương đương đối với không gian chính quy X.*

(1) *X có sn-mạng σ-hữu hạn địa phương gồm các không gian con sns-đếm được;*

(2) *X có sn-mạng σ-hữu hạn địa phương gồm các không gian con cosmic;*

(3) *X là mssc-ảnh 1-phủ-dãy của không gian mêtric khả li địa phương.*

1.3.18 Nhận xét. Nhờ Định lí 1.3.14, ta có thể thêm tiền tố "phủ-compắc" sau tiền tố "1-phủ-dãy" trong Hệ quả 1.3.16(3) và Hệ quả 1.3.17(3).

1.3.19 Định lí. *Các khẳng định sau là tương đương đối với không gian X.*

(1) *X có so-mạng Lindelöf với tính chất σ-(P);*

(2) *X là $\alpha(P)$-ảnh 2-phủ-dãy và phủ-compắc của không gian mêtric khả li địa phương;*

(3) *X là $\alpha(P)$-ảnh 2-phủ-dãy của không gian mêtric khả li địa phương;*

(4) *X là $\alpha(P)$-ảnh 2-phủ-dãy của không gian mêtric, và có so-phủ gồm các H-$\aleph_0$-không gian con.*

1.3.20 Hệ quả. *Các khẳng định sau là tương đương đối với không gian X.*

(1) *X có cơ sở Lindelöf với tính chất σ-(P);*

(2) *X là $\alpha(P)$-ảnh mở và phủ-compắc của không gian mêtric khả li địa phương;*

(3) *X là $\alpha(P)$-ảnh mở của không gian mêtric khả li địa phương;*

(4) *X là H-$\aleph_0$-không gian địa phương và là $\alpha(P)$-ảnh mở của không gian mêtric.*

Nhờ Định lí 1.3.19 và Nhận xét 1.3.11, chúng tôi thu được các kết quả của N. V. Dung trong trường hợp X là không gian chính quy.

1.3.21 Hệ quả. *Các khẳng định sau là tương đương đối với không gian X.*

(1) *X có so-mạng σ-đếm được địa phương gồm các không gian con sos-đếm được;*

(2) *X có so-mạng σ-đếm được địa phương gồm các không gian con cosmic;*

(3) *X là msss-ảnh 2-phủ-dãy của không gian mêtric khả li địa phương.*

1.3.22 Hệ quả. *Các khẳng định sau là tương đương đối với không gian chính quy X.*

(1) *X có so-mạng σ-hữu hạn địa phương gồm các không gian con sos-đếm được;*

(2) *X có so-mạng σ-hữu hạn địa phương gồm các không gian con cosmic;*

(3) *X là msss-ảnh 2-phủ-dãy của không gian mêtric khả li địa phương.*

1.3.23 Nhận xét. Theo Định lí 1.3.19, ta có thể thêm tiền tố "phủ-compắc" sau tiền tố "2-phủ-dãy" trong Hệ quả 1.3.21(3) và Hệ quả 1.3.22(3).

1.4 Một số ví dụ

1.4.1 Ví dụ. s-ảnh thương của không gian mêtric khả li địa phương không là không gian khả li địa phương (xem Ví dụ 9.8 trong [G. Gruenhage, E. Michael, Y. Tanaka, *Spaces determined by point-countable covers*, Pacific J. Math., **113** (1984), 303-332] hoặc Ví dụ 2.9.27 trong [S. Lin, *Generalized Metric Spaces and Mappings*, Chinese Science Press, Beijing, 1995]). Do vậy, Câu hỏi 1.1.1 là không đúng trong trường hợp tính chất Φ là $\aleph_0$-không gian (hoặc khả li địa phương).

1.4.2 Ví dụ. Tồn tại không gian X với k-mạng compắc σ-hữu hạn địa phương (do đó, theo Định lí 1.3.7 ta suy ra X có cs-mạng Lindelöf σ-hữu hạn địa phương), nhưng X không là không gian Lindelöf địa phương (do đó, X không có mạng đếm được địa phương) (xem Ví dụ 4.1(2) trong [Y. Ykeda, Y. Tanaka, *Space having star-countable k-networks*, Topology Proc., **18** (1993), 107-132]). Như vậy,

(1) Không gian X có cs-mạng Lindelöf với tính chất σ-(P) $\not\Rightarrow$ X có cs-mạng đếm được địa phương.

(2) Trong Định lí 1.3.7(6), X không thể là $\aleph_0$-không gian địa phương.

1.4.3 Ví dụ. S_ω là không gian Fréchet-Urysohn và $\aleph_0$-không gian, nhưng nó không là không gian thỏa mãn tiên đề đếm được thứ nhất. Do đó, nó có cs-mạng Lindelöf σ-hữu hạn địa phương. Mặt khác, vì S_ω không là không gian thỏa mãn tiên đề đếm được thứ nhất nên nó không có sn-mạng (hoặc cơ sở yếu) σ-đếm được địa phương. Như vậy,

(1) Không gian X có cs-mạng Lindelöf σ-hữu hạn địa phương (do đó, σ-đếm được địa phương) $\not\Rightarrow$ X có sn-mạng Lindelöf σ-hữu hạn địa phương (hoặc σ-đếm được địa phương).

(2) k-không gian X với cs-mạng Lindelöf σ-hữu hạn địa phương (do đó, σ-đếm được địa phương) $\not\Rightarrow$ X có cơ sở yếu Lindelöf σ-hữu hạn địa phương (hoặc σ-đếm được địa phương).

1.4.4 Ví dụ. Tồn tại không gian gs-đếm được X, nhưng nó không là không gian Fréchet-Urysohn (xem, Ví dụ 2.1 trong [F. Siwiec, *On defining a space by a weak base*, Pacific J. Math., **52** (**1**) (1974), 233-245]). Do đó, X có cơ sở yếu Lindelöf σ-hữu hạn địa phương. Bởi vì X là không gian dãy, không là không gian Fréchet-Urysohn nên X không có so-mạng (hoặc cơ sở yếu) σ-đếm được địa phương. Như vậy,

(1) Không gian X có sn-mạng Lindelöf σ-hữu hạn địa phương (do đó, σ-đếm được địa phương) $\not\Rightarrow$ X có so-mạng σ-hữu hạn địa phương (hoặc σ-đếm được địa phương).

(2) Không gian X có cơ sở yếu Lindelöf σ-hữu hạn địa phương (do đó, σ-đếm được địa phương) $\not\Rightarrow$ X có cơ sở σ-hữu hạn địa phương (hoặc σ-đếm được địa phương).

1.4.5 Ví dụ. Tồn tại không gian X có sn-mạng đếm được địa phương nhưng X không là $\aleph$-không gian (xem Ví dụ 2.19 trong [X. Ge, *Spaces with a locally countable sn-network*, Lobachevskii J. Math., **26** (2007), 33-49]). Do đó, X có sn-mạng Lindelöf σ-đếm được địa phương. Bởi thế,

(1) Không gian X có sn-mạng đếm được địa phương $\not\Rightarrow$ X có cs-mạng Lindelöf σ-hữu hạn địa phương.

(2) Không gian X có sn-mạng Lindelöf σ-đếm được địa phương $\not\Rightarrow$ X có sn-mạng (hoặc cs-mạng) Lindelöf σ-hữu hạn địa phương.

(3) Không gian X có cs-mạng Lindelöf σ-đếm được địa phương $\not\Rightarrow$ X có cs-mạng Lindelöf σ-hữu hạn địa phương.

1.4.6 Ví dụ. Sử dụng Ví dụ 3.1 trong [Y. Ge, J. S. Gu, *On π-images of separable metric spaces*, Math. Sci., **10** (2004), 65-71] ta thấy rằng X là không gian Hausdorff, không chính quy và có cơ sở đếm được, nhưng nó không là π-ảnh thương-dãy của không gian mêtric. Do đó, X không là $\aleph_0$-không gian. Nhờ Định lí 1.3.19, X là $mssc$-ảnh 2-phủ-dãy (và mở) của không gian mêtric khả li địa phương.

(1) Tồn tại H-$\aleph_0$-không gian, nhưng nó không là $\aleph_0$-không gian.

(2) Không gian X có cs-mạng (hoặc sn-mạng, hoặc so-mạng) Lindelöf σ-hữu hạn địa phương $\not\Rightarrow$ X là π, $mssc$-ảnh (hoặc $msss$-ảnh) thương-dãy của không gian mêtric.

CHƯƠNG 2

ẢNH COMPẮC CỦA KHÔNG GIAN MÊTRIC KHẢ LI ĐỊA PHƯƠNG

Trong chương này, chúng tôi chứng minh rằng không gian X có sn-mạng Lindelöf σ-hữu hạn địa phương (σ-đếm được địa phương) khi và chỉ khi X là $mssc$-ảnh (tương ứng, $msss$-ảnh) compắc phủ-compắc của không gian mêtric khả li địa phương, khi và chỉ khi X là π, $mssc$-ảnh (tương ứng, $msss$-ảnh) thương-dãy của không gian mêtric khả li địa phương, trong đó tiền tố "phủ-compắc" (hoặc "thương-dãy") không thể được thay thế bởi tiền tố "phủ-dãy". Từ đó, chúng tôi thu được đặc trưng mới của không gian với cơ sở yếu đếm được địa phương.

Các kết quả trong chương này được trình bày trong [2,3]. Hơn nữa, các không gian trong chương này được giả thiết thêm rằng chúng là các không gian chính quy.

2.1 Ảnh compắc thương-dãy của không gian mêtric khả li địa phương

2.1.1 Bổ đề. *Giả sử $f : M \longrightarrow X$ là mssc-ánh xạ, và M là không gian mêtric khả li địa phương. Khi đó, X có cs-mạng Lindelöf σ-hữu hạn địa phương.*

2.1.2 Định nghĩa. Giả sử $\{\mathcal{P}_i\}$ là dãy gồm các phủ nào đó của không gian X. Ta nói rằng $\{\mathcal{P}_i\}$ là *mạng sao-điểm*, nếu $\{\mathtt{St}(x, \mathcal{P}_i) : i \in \mathbb{N}\}$ là mạng của x với mọi $x \in X$.

2.1.3 Định lí. *Đối với không gian X, các khẳng định sau là tương đương.*

(1) *X là không gian sn-khả mêtric và X có so-phủ gồm các $\aleph_0$-không gian con;*

(2) *X có sn-mạng Lindelöf σ-hữu hạn địa phương;*

(3) *X là mssc-ảnh compắc phủ-compắc của không gian mêtric khả li địa phương;*

(4) *X là mssc-ảnh compắc giả-phủ-dãy của không gian mêtric khả li địa phương;*

(5) *X là mssc-ảnh compắc phủ-dãy con của không gian mêtric khả li địa phương;*

(6) *X là π, mssc-ảnh thương-dãy của không gian mêtric khả li địa phương.*

Theo Định lí 2.1.3, ta có

2.1.4 Hệ quả. *Đối với không gian X, các khẳng định sau là tương đương.*

(1) *X có cơ sở yếu đếm được địa phương;*

(2) *X là $\aleph_0$-không gian địa phương và là không gian g-khả mêtric;*

(3) *X có cơ sở yếu Lindelöf σ-hữu hạn địa phương;*

(4) *X là $mssc$-ảnh compắc thương, phủ-compắc của không gian mêtric khả li địa phương;*

(5) *X là $mssc$-ảnh compắc thương, giả-phủ-dãy của không gian mêtric khả li địa phương;*

(6) *X là $mssc$-ảnh compắc thương, phủ-dãy con của không gian mêtric khả li địa phương;*

(7) *X là π và $mssc$-ảnh thương của không gian mêtric khả li địa phương.*

Chứng minh tương tự Định lí 2.1.3 ta thu được định lí sau.

2.1.5 Định lí. *Đối với không gian X, các khẳng định sau là tương đương.*

(1) *X là không gian có sn-mạng σ-đếm được địa phương và có so-phủ gồm các $\aleph_0$-không gian con;*

(2) *X có sn-mạng Lindelöf σ-đếm được địa phương;*

(3) *X là $msss$-ảnh compắc phủ-compắc của không gian mêtric khả li địa phương;*

(4) *X là $msss$-ảnh compắc giả-phủ-dãy của không gian mêtric khả li địa phương;*

(5) *X là $msss$-ảnh compắc phủ-dãy con của không gian mêtric khả li địa phương;*

(6) *X là π, $msss$-ảnh thương-dãy của không gian mêtric khả li địa phương.*

Nhờ Định lí 2.1.5, ta có

2.1.6 Hệ quả. *Đối với không gian X, các khẳng định sau là tương đương.*

(1) *X là $\aleph_0$-không gian địa phương và có cơ sở yếu σ-đếm được địa phương;*

(2) *X có cơ sở yếu Lindelöf σ-đếm được địa phương;*

(3) *X là $msss$-ảnh compắc thương, phủ-compắc của không gian mêtric khả li địa phương;*

(4) *X là $msss$-ảnh compắc thương, giả-phủ-dãy của không gian mêtric khả li địa phương;*

(5) *X là $msss$-ảnh compắc thương, phủ-dãy con của không gian mêtric khả li địa phương;*

(6) *X là π và $msss$-ảnh thương của không gian mêtric khả li địa phương.*

2.2 Một số ví dụ

2.2.1 Ví dụ. Giả sử C_n là dãy hội tụ chứa điểm giới hạn p_n của nó với mọi $n \in \mathbb{N}$, trong đó $C_m \cap C_n = \emptyset$ nếu $m \neq n$. Giả sử $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ là tập tất cả các số hữu tỷ trong $\mathbb{R}$. Đặt

$$M = \big(\bigoplus\{C_n : n \in \mathbb{N}\}\big) \oplus \mathbb{R}$$

và giả sử X là không gian thương thu được từ M bằng cách đồng nhất mỗi p_n trong C_n với q_n trong $\mathbb{R}$. Khi đó, theo chứng minh của Ví dụ 3.1 trong [Y. Ge, S. Lin, *g-metrizable spaces and the images of semi-metric spaces*, Czech. Math. J., **57** (**132**) (2007), 1141-1149], X có cơ sở yếu đếm được và X không là π-ảnh thương phủ-dãy của không gian mêtric. Do đó,

(1) Không gian X với sn-mạng Lindelöf σ-hữu hạn địa phương (σ-đếm được địa phương) $\not\Rightarrow$ X là π, $mssc$-ảnh (tương ứng, $msss$-ảnh) phủ-dãy của không gian mêtric khả li địa phương.

(2) Không gian X với cơ sở yếu Lindelöf σ-hữu hạn địa phương (σ-đếm được địa phương) $\not\Rightarrow$ X là π, $mssc$-ảnh (tương ứng, $msss$-ảnh) thương phủ-dãy của không gian mêtric khả li địa phương.

2.2.2 Ví dụ. Sử dụng Ví dụ 3.1 trong [Y. Ge, J. S. Gu, *On π-images of separable metric spaces*, Math. Sci., **10** (2004), 65-71], ta thấy rằng X là không gian Hausdorff, không chính quy và X có cơ sở đếm được, nhưng nó không là π-ảnh thương-dãy của không gian mêtric. Điều này chứng tỏ rằng tính chất chính quy của X không thể bỏ được trong Định lí 2.1.3, Hệ quả 2.1.4 Định lí 2.1.5 và Hệ quả 2.1.6.

2.2.3 Ví dụ. S_ω là không gian Fréchet-Urysohn và $\aleph_0$-không gian, nhưng nó không là không gian thỏa mãn tiên đề đếm được thứ nhất. Do đó, S_ω có cs-mạng Lindelöf σ-hữu hạn địa phương. Nhờ Định lí 2.1 trong [N. V. Dung, *On sequence-covering mssc-images of locally separable metric spaces*, Publications de L'institut Mathématique, Nouvelle série, **87** (**101**) (2010), 143-153] ta suy ra X là $mssc$-ảnh của không gian mêtric khả li địa phương. Hơn nữa, vì S_ω không là không gian thỏa mãn tiên đề đếm được thứ nhất nên nó không có sn-mạng đếm được theo điểm. Bởi vậy,

(1) Không gian X với cs-mạng Lindelöf σ-hữu hạn địa phương (σ-đếm được địa phương) $\not\Rightarrow$ X là π, $mssc$-ảnh (tương ứng, $msss$-ảnh) thương-dãy của không gian mêtric khả li địa phương.

(2) X là $mssc$-ảnh ($msss$-ảnh) thương phủ-dãy của không gian mêtric khả li địa phương $\not\Rightarrow$ X có sn-mạng Lindelöf σ-hữu hạn địa phương (tương ứng, σ-đếm được địa phương).

2.2.4 Ví dụ. Sử dụng Ví dụ 2.7 trong [Z. Li, *On π-s-images of metric spaces*, Int. J. Math. Sci., **7** (2005), 1101-1107], ta thấy rằng X là ảnh compắc thương, phủ-compắc của không gian mêtric compắc địa phương, nhưng nó không có cs-mạng đếm được theo điểm. Do đó, ảnh compắc thương phủ-

compắc của không gian mêtric khả li địa phương $\not\Rightarrow$ X có sn-mạng Lindelöf σ-hữu hạn địa phương (σ-đếm được địa phương).

2.2.5 Ví dụ. Tồn tại không gian X có sn-mạng đếm được địa phương mà X không là $\aleph_0$-không gian (xem Ví dụ 2.19 trong [X. Ge, *Spaces with a locally countable sn-network*, Lobachevskii J. Math., **26** (2007), 33-49]). Do đó, X có sn-mạng Lindelöf σ-đếm được địa phương. Như vậy,

(1) Không gian với sn-mạng đếm được địa phương $\not\Rightarrow$ X có sn-mạng Lindelöf σ-hữu hạn địa phương.

(2) Không gian với sn-mạng Lindelöf σ-đếm được địa phương $\not\Rightarrow$ X có sn-mạng Lindelöf σ-hữu hạn địa phương.

TÀI LIỆU THAM KHẢO LIÊN QUAN ĐẾN ĐỀ TÀI

[1] T. V. An and L. Q. Tuyen, *L-Ponomarev's system and images of locally separable metric spaces* , Publ. Inst. Math. **93**(**107**) (2013), 133-144.

[2] L. Q. Tuyen, *Spaces with σ-locally finite Lindelöf sn-networks*, Publ. Inst. Math., **93**(**107**) (2013), 145-152.

[3] L. Q. Tuyen, *Spaces with σ-locally countable Lindelöf sn-networks*, Novi Sad J. Math., **43** (2013), 201-209.

[4] L. Q. Tuyen, *Notes on pseudo-sequence-covering maps*, Novi Sad J. Math., (2014) to appear.