BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

BÁO CÁO TÓM TẮT TỔNG KẾT
ĐỀ TÀI KHOA HỌC CÔNG NGHỆ CẤP BỘ

TÊN ĐỀ TÀI

CÁC ĐẶC TRƯNG CỦA VÀNH CHÍNH QUI VON NEUMANN VÀ CÁC TRƯỜNG HỢP TỔNG QUÁT CỦA VÀNH VÀ MÔĐUN NỘI XẠ

MÃ SỐ: **B2013-03-11**

Chủ nhiệm đề tài: TS. TRƯƠNG CÔNG QUỲNH

ĐÀ NẴNG, 8/2016

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

BÁO CÁO TÓM TẮT TỔNG KẾT
ĐỀ TÀI KHOA HỌC CÔNG NGHỆ CẤP BỘ

TÊN ĐỀ TÀI

CÁC ĐẶC TRƯNG CỦA VÀNH CHÍNH QUI VON NEUMANN VÀ CÁC TRƯỜNG HỢP TỔNG QUÁT CỦA VÀNH VÀ MÔĐUN NỘI XẠ

MÃ SỐ: **: B2013-03-11**

Xác nhận của cơ quan chủ trì

Chủ nhiệm đề tài

TS. Trương Công Quỳnh

ĐÀ NẴNG, 8/2016

DANH SÁCH THÀNH VIÊN THAM GIA ĐỀ TÀI

1. **TS. Trương Công Quỳnh**, Trường ĐHSP-ĐH Đà Nẵng
2. **GS. TS. Lê Văn Thuyết**, Đại học Huế.
3. **TS. Lê Đức Thoang**, Trường ĐHSP Phú Yên
4. **TS. Bành Đức Dũng**, Trường ĐHGTVT-TPHCM.
5. **Ths. Phan Thế Hải**, Trường CĐSP Bà Rịa-Vũng Tàu
6. **Ths. Phan Hồng Tín**, Trường CĐCN Huế.
7. **Ths. Lương Thị Minh Thủy**, Trường ĐHSP Huế.

THÔNG TIN KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU

1. Thông tin chung:

- Tên đề tài:

Các đặc trưng của vành chính qui Von Neumann và các trường hợp tổng quát của vành và môđun nội xạ.

- Mã số: B2013-03-11
- Chủ nhiệm: TS. Trương Công Quỳnh
- Cơ quan chủ trì: Trường Đại học Sư Phạm-Đại học Đà Nẵng
- Thời gian thực hiện: 24 tháng

2. Mục tiêu: Đưa ra các đặc trưng của vành chính qui von Neumann, chính qui mạnh thông qua các trường hợp tổng quát của môđun nội xạ chính. Nghiên cứu các trường hợp tổng quát của môđun nội xạ chính. Đồng thời đưa ra các áp dụng của lớp môđun này vào lớp vành cổ điển.

3. Tính mới và sáng tạo: Các kết quả của đề tài làm rõ một số kết quả trong lý thuyết vành và môđun và góp phần làm phong phú thêm cấu trúc đại số.

4. Kết quả nghiên cứu:

- Đưa ra đặc trưng của tính chính quy của các các đồng cấu liên quan tính "xạ ảnh" của chúng.
- Đặc trưng chính quy của nhóm Hom thông qua tính chẻ ra địa phương của các đồng cấu.
- Đưa ra đặc trưng của tính nửa chính quy của nhóm Hom và các cấu trúc con Δ, ∇ với các tính chất của ảnh và hạt nhân của nhóm Hom đó.
- Nghiên cứu tính chính quy của các môđun thương thông qua lớp môđun mở rộng của môđun phần phụ.
- Đặc trưng của lớp vành nửa nguyên sơ, vành chính quy thông qua lớp môđun mở rộng của giả nội xạ chính đã được nghiên cứu.
- Đặc trưng của vành giả GP-nội xạ với điều kiện dây chuyền và các iđêan cực đại trên vành tự đồng cấu của môđun giả qgp-nội xạ.

5. Sản phẩm: 5 bài báo khoa học.

- Kosan, M. Tamer; Quynh, Truong Cong, On essential extensions of direct sums of either injective or projective modules, J. Algebra Appl. **13** (2014), 1450038, 8 pp.

• Truong Cong Quynh and Nguyen Van Sanh (2014), "On quasi pseudo-GP-injective rings and modules", *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, **37**(2), 321-332.

• Truong Cong Quynh (2013), "On pseudo semi-projective modules", *Turkish Journal of Mathematics*, **37**, 27 - 36

• Truong Cong Quynh and Phan Hong Tin (2013), "Some properties of e-supplemented and e-lifting modules", *Vietnam Journal of Mathematics*, **41**(3), 303-312.

• Truong Cong Quynh, M. Tamer Kosan and Phan The Hai (2013), "A Note on regular Morphisms", *Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp.*, **41**, 249-260.

6. Hiệu quả, phương thức chuyển giao kết quả nghiên cứu và khả năng áp dụng: Đề tài dùng để làm tài liệu tham khảo cho nghiên cứu sinh và cao học.

Đà Nẵng, Ngày tháng năm 2016

Cơ quan chủ trì **Chủ nhiệm đề tài**

INFORMATION ON RESEARCH RESULTS

1. General information:

- Project title:

On characterizations of von Neumann regular rings and generalizations of injective rings and modules

- Code number: B2010-ĐN-03-50
- Coordinator: Ph.D. Truong Cong Quynh
- Implementing institution: Da Nang University of Education
- Duration: from 1/2013 to 12/2014

2. Objective(s): We give some characterizations of von Neumann regular, strongly regular via general principally injective. We study some general principally injective. Moreover, we also give some characterizations of classical rings via this class of modules.

3. Creativeness and innovativeness: The results of the research to clarify some of the results of rings and modules theory and contribute the abundant algebraic structures.

4. Research results:

- Characterizations of regularity of homomorphisms with "projectivity" of them.
- Characterizations of regularity of Hom group by local splitting of homomorphisms.
- Give some properties about regularity of Hom group and substructures of Δ, ∇ with kernels and images.
- Study some properties of factor modules via general supplemented modules.
- We characterize of semiprimary rings, regular rings via general principally pseudo-injective are studied.
- Characterizations of pseudo GP-injective rings with condition chains of maximal ideals of its endomorphism rings.

5. Products: 5 papers

- Kosan, M. Tamer; Quynh, Truong Cong, On essential extensions of direct sums of either injective or projective modules, J. Algebra Appl. **13** (2014), 1450038, 8 pp.
- Truong Cong Quynh and Nguyen Van Sanh (2014), “On quasi pseudo-GP-injective rings and modules”, *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, **37**(2), 321-332.

• Truong Cong Quynh (2013), “On pseudo semi-projective modules”, *Turkish Journal of Mathematics*, **37**, 27 - 36

• Truong Cong Quynh and Phan Hong Tin (2013), “Some properties of e-supplemented and e-lifting modules”, *Vietnam Journal of Mathematics*, **41**(3), 303-312.

• Truong Cong Quynh, M. Tamer Kosan and Phan The Hai (2013), “A Note on regular Morphisms”, *Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp.*, **41**, 249-260.

6. Effects, transfer alternatives of reserach results and applicability: Direction for Doctor of Philosophy and Masters students.

MỞ ĐẦU

Năm 1940, Baer đã đưa ra một tiêu chuẩn quan trọng để kiểm tra tính nội xạ của một môđun. Từ khi có tiêu chuẩn Baer kiểm tra tính nội xạ, thì có hai hướng của mở rộng nội xạ cùng tồn tại. Hướng thứ nhất là mở rộng theo tiêu chuẩn Baer. Năm 1952, Ikeda đã đưa ra các khái niệm vành P-nội xạ và F-nội xạ, và tác giả đã nghiên cứu những áp dụng của chúng vào lý thuyết vành tựa Frobenius. Tác giả Ikeda cũng đã chứng minh được một vành tựa Frobenius nếu và chỉ nếu vành đã cho là Artin phải và F-nội xạ phải. Năm 1970, Bjork đã mở rộng kết quả của tác giả Ikeda chỉ cho vành thỏa mãn điều kiện ACC trên các linh hóa tử phải. Một số đặc trưng của vành P-nội xạ và các trường hợp tổng quát của nó được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu trên vành và cũng như trên môđun và đã thu được nhiều kết quả: Rutter (1975), Ming (1978), Chen-Ding (2001), Shen-Chen (2006). Hướng thứ hai là mở rộng nội xạ theo định nghĩa gốc. Năm 1961, các tác giả Johnson-Wong đã nghiên cứu lớp môđun tựa nội xạ và đã đưa ra mối liên hệ của môđun tựa nội xạ và vành tự đồng cấu của nó. Cụ thể các tác giả đã chỉ ra được một môđun tựa nội xạ nếu và chỉ nếu nó bất biến qua mọi tự đồng cấu của bao nội xạ của nó. Hơn nữa, vành tự đồng cấu của một môđun tựa nội xạ cũng là vành nửa chính quy và vành thương của nó trên căn Jacobson là một vành tựa nội xạ. Từ những tính chất "tốt" của lớp môđun tựa nội xạ, các tác giả Jain- Singh

(1967) đã nghiên cứu một trường hợp tổng quát của nó đó là lớp môđun giả nội xạ và đã đưa ra các đặc trưng của lớp môđun này. Hơn nữa, tính chính quy của vành tự đồng cấu của môđun giả nội xạ đã được xem xét. Sau này đã có nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu và cũng đưa ra các đặc trưng khác của lớp môđun này: Hai (2005), Alahmadi- Er- Jain (2005). Tuy nhiên, tính bất biến của môđun qua các tự đồng cấu và tự đẳng cấu của bao nội xạ của nó vẫn chưa được xem xét. Như chúng ta được biết một đặc trưng đẹp của vành nửa đơn Artin đã được chứng minh bởi Osofsky đó là: Một vành là nửa đơn Artin nếu và chỉ nếu mọi môđun phải (hoặc trái) xyclic là nội xạ. Kết quả này đã thu hút nhiều tác giả trong và ngoài nước quan tâm nghiên cứu. Năm 1973, Michler và Villamayor đã nghiên cứu một trường hợp tổng quát của vành nửa đơn Artin đó là V-vành, theo đó một vành được gọi là V-vành phải nếu mọi môđun phải đơn là nội xạ. Các cấu trúc mới của lớp vành này đã được đưa ra. Năm 1978, Ming đã quan tâm các đặc trưng của vành mà mọi môđun phải đơn (suy biến) là P-nội xạ. Đây là lớp vành mở rộng của V-vành. Từ đó tác giả đã đưa ra được nhiều đặc trưng mới của lớp vành nửa đơn Artin, chính quy, chính quy mạnh. Tiếp tục công việc của Ming, các tác giả Kim, Nam, Chen, Ding cũng tìm cách đưa các đặc trưng của các lớp vành trên thông qua môđun dưới điều kiện yếu hơn và họ thu được một số kết quả mới làm sáng tỏ thêm cấu trúc của các vành cổ điển. Tuy nhiên, các tác giả chưa chỉ ra được mối liên hệ của vành chính quy của vành tự đồng cấu của môđun M mà mọi môđun phải đơn (suy biến) là M-nội xạ chính. Nếu thực hiện được điều này, thì chúng ta có một cấu trúc hoàn chỉnh về tính chính quy cho lớp các mô đun trong phạm trù $\sigma[M]$. Năm 1999, Zhang đã chứng minh được một vành là chính quy nếu và chỉ nếu mọi môđun là GP-nội xạ. Kết quả này mở rộng kết quả của các tác giả Ming, Chen cho trường hợp P-nội xạ. Các kết quả này chỉ ra được có thể đặc trưng vành chính quy thông qua lớp các môđun mở rộng của môđun nội xạ chính. Tuy nhiên mối liên hệ của vành chính quy của vành tự đồng cấu của môđun M mà mọi môđun phải là M-tổng quát nội xạ chính vẫn chưa được các tác giả giải quyết.

Năm 1972, Zelmanowitz đã tổng quát khái niệm vành chính quy von Neumann cho môđun. Tác giả đã đưa ra được các đặc trưng của môđun chính quy với lớp các môđun con hữu hạn sinh là hạng tử trực tiếp. Năm 2004, Kach và Mader đã xem xét khái niệm vành và môđun chính quy von Neumann bằng tính chính quy của các đồng cấu. Các kết quả được biết của vành và môđun chính quy đã được các tác giả tổng quát hóa và nhiều đặc trưng khác đã được đưa ra nghiên cứu. Vấn đề này đã thu hút nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu chẳng hạn như Nicholson (2007), Zhou (2009), Lee (2010). Tuy nhiên, vấn đề của tính chính quy của $\mathrm{Hom}(M, N)$ thông qua các trường hợp tổng quát của môđun nội xạ và nội xạ chính (chẳng hạn như môđun C2, GC2) vẫn chưa giải quyết. Hiện nay nhiều tác giả trong và ngoài nước quan tâm nghiên cứu tính chính quy của vành thông qua các trường hợp nội xạ và mối liên hệ của vành tự đồng cấu của môđun mà môđun thỏa mãn điều kiện mở rộng nội xạ. Vì vậy vấn đế này mang tính thời sự cần được nghiên cứu. Mục đích làm sáng tỏ thêm cấu trúc của vành và môđun góp phần vào sự phát triển của chuyên ngành Đại số.

CHƯƠNG 1
KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong chương này, chúng tôi giới thiệu một số khái niệm cơ bản liên quan đến nội dung đề tài. Sau đây là một số khái niệm và kết quả tiêu biểu.

1.1.2 Môđun nội xạ và các trường hợp tổng quát.

Môđun U được gọi là *nội xạ theo* M (hay U là M-nội xạ) nếu với mọi đơn cấu $\iota : N \longrightarrow M$ và mọi đồng cấu $f : N \longrightarrow U$ đều tồn tại đồng cấu $g : M \longrightarrow U$ sao cho $f = g \cdot \iota$. Môđun U được gọi là *tự nội xạ* nếu U là U-nội xạ. Môđun U được gọi là *nội xạ* nếu U là M-nội xạ, với mọi $M \in \text{Mod-}R$.

Một trong những cách để kiểm tra một môđun có là nội xạ hay không, chúng ta thường dùng tiêu chuẩn sau:

Tiêu chuẩn Baer (để kiểm tra tính nội xạ của một môđun): Môđun N là *nội xạ* nếu với mọi iđêan phải I của R, mọi đồng cấu $f : I \longrightarrow N$ luôn tồn tại đồng cấu $\bar{f} : R_R \longrightarrow N$ sao cho $\bar{f}\iota = f$, trong đó $\iota : I \hookrightarrow R_R$ là đơn cấu chính tắc.

Nhờ tiêu chuẩn Baer này, nhiều nhà toán học đã định nghĩa các lớp môđun F-nội xạ, P-nội xạ, AGP-nội xạ....

Môđun N được gọi là *P-nội xạ* (*F-nội xạ*) nếu với mọi iđêan phải chính (t.ư, hữu hạn sinh) I của R, mọi đồng cấu $f : I \longrightarrow N$ đều có thể mở rộng thành đồng cấu $g : R_R \longrightarrow N$. Môđun N được gọi là *GP-nội xạ* nếu với mọi $0 \neq a \in R$, tồn tại số tự nhiên n sao cho $a^n \neq 0$ và mọi đồng cấu $f : a^nR \longrightarrow N$ đều có thể mở rộng được đến đồng cấu $g : R_R \longrightarrow N$.

Định nghĩa 1.1.1. Vành R được gọi là *tự nội xạ phải* (*t.ư, F-nội xạ phải, P-nội xạ phải, GP-nội xạ phải, tự nội xạ đơn phải*) nếu R_R là môđun nội xạ (t.ư, F-nội xạ, P-nội xạ, GP-nội xạ, nội xạ đơn).

1.2 Vành chính quy và các trường hợp tổng quát của nó

Liên quan đến khái niệm liên tục, chúng tôi muốn nhắc đến khái niệm *chính quy* (theo nghĩa von Neumann trên vành). Phần tử a của vành R được gọi là *chính quy* nếu nó thỏa mãn các điều kiện tương đương sau đây:

(i) Tồn tại phần tử $x \in R$ thỏa mãn $axa = a$.

(ii) $R_R = aR \oplus T$ với T là iđêan phải của R.

(iii) ${}_RR = Ra \oplus L$ với L là iđêan trái của R.

Vành R được gọi là *chính quy* nếu mọi phần tử của R đều chính quy. Vành R được gọi là vành *nửa chính quy* nếu $R/J(R)$ là vành chính quy và các lũy đẳng nâng được modulo $J(R)$.

Định nghĩa 1.2.5. Cho M_R và N_R là các môđun. Đồng cấu $\alpha \in [M, N]$ được gọi là chính quy nếu tồn tại $\beta \in [N, M]$ sao cho $\alpha = \alpha\beta\alpha$. Môđun $[M, N]$ gọi là chính quy nếu mỗi $\alpha \in [M, N]$ là chính quy. Môđun M_R được gọi là chính quy nếu $[M, R]$ là chính quy. Rõ ràng $\mathrm{End}(M)$ là vành chính quy nếu và chỉ nếu $[M, M]$ là chính quy.

Bổ đề 1.2.6. *Cho $\alpha \in [M, N]$ là chính quy, nói cách khác là $\alpha = \alpha\beta\alpha$ với $\beta \in [N, M]$ nào đó. Khi đó các điều kiện sau được thỏa* *mãn:*

(1) $M = \mathrm{Ker}(\alpha) \oplus \phi(M)$ *và* $\mathrm{Ker}(\alpha) = \mathrm{Ker}(\phi)$, *với* $\phi^2 = \phi = \beta\alpha \in E_M$.

(2) $N = \alpha(M) \oplus \mathrm{Ker}(\varepsilon)$ *và* $\alpha(M) = \varepsilon(N)$, *với* $\varepsilon^2 = \varepsilon = \alpha\beta \in E_N$.

CHƯƠNG 2

ĐẶC TRƯNG TÍNH CHÍNH QUY VÀ NỬA CHÍNH QUY CỦA CÁC ĐỒNG CẤU

Nội dung chương này bao gồm các kết quả nghiên cứu về tính chất chính quy và nửa chính quy của các đồng cấu. Từ đó đưa ra các áp dụng của chúng trong một số lớp vành cổ điển (Artin, hoàn chỉnh, nửa hoàn chỉnh,...) và môđun đặc biệt. Hơn nữa, mối liên hệ của căn, song môđun suy biến và đối suy biến của Hom cũng đã được nghiên cứu.

2.1 Tính chính quy của các đồng cấu.

Định lý 2.1.1. *Cho* M *và* N *là các môđun và* $\alpha \in [M, N]$. *Khi đó các điều kiện sau là tương đương đối với* $\alpha \in [M, N]$:

(1) α *là chính quy.*

(2) $\alpha(M)$ *là một hạng tử trực tiếp của* N *và với mỗi đồng cấu* $f : M \to \alpha(M)$ *và* $g : \alpha(M) \to \alpha(M)$, *thì tồn tại đồng cấu* $h : \alpha(M) \to M$ *sao cho* $fh = g$.

$$\begin{tikzcd}
& \alpha(M) \arrow[ld, dashed] \arrow[d, "g"] & \\
M \arrow[r, "f"'] & \alpha(M) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Định lý sau một rộng kết quả của Nicholson-Zhou.

Định lý 2.1.2. *Giả sử M là N-nội xạ. Khi đó các điều kiện sau là tương đương:*

(1) $[M, N]$ *là chính quy.*

(2) $[M, \alpha(M)]$ *là chính quy với mỗi* $\alpha \in [M, N]$.

(3) *Với mỗi* $\alpha \in [M, N]$, *và với mỗi đồng cấu* $f : M \to \alpha(M)$ *và* $g : \alpha(M) \to \alpha(M)$, *thì tồn tại đồng cấu* $h : \alpha(M) \to M$ *sao cho* $fh = g$.

$$
\begin{tikzcd}
& \alpha(M) \arrow[dl, dashed] \arrow[d, "g"] & \\
M \arrow[r, "f"'] & \alpha(M) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

Cho Q và N là các môđun. Đồng cấu $h : Q \longrightarrow N$ được gọi là *chẻ ra địa phương* nếu cho bất kỳ $x_0 \in h(Q)$ thì tồn tại một đồng cấu $h' : N \longrightarrow Q$ sao cho $h(h'(x_0)) = x_0$.

Định lý sau đây đưa ra đặc trưng chính quy của $[M, N]$ thông qua tính chẻ ra địa phương của các đồng cấu.

Định lý 2.1.5. *Cho M và N là các môđun. Nếu M là hữu hạn sinh, khi đó các điều kiện sau đây tương đương:*

(1) $[M, N]$ *là chính quy.*

(2) Mỗi đồng cấu từ môđun M-sinh vào N là chẻ ra địa phương.

(3) Mỗi đồng cấu $M \longrightarrow N$ là chẻ ra địa phương.

Cho M là R-môđun phải. M được gọi là *chính quy theo nghĩa Zelmanowitz* nếu cho mỗi $m \in M$, tồn tại một đồng cấu $f : M \longrightarrow R$ sao cho $m = mf(m)$.

Cho $M = R$, theo định nghĩa trên ta có hệ quả sau đây.

Hệ quả 2.1.6. *Cho N là một môđun. Khi đó các điều kiện sau là tương đương:*

(1) N là môđun chính quy theo nghĩa Zelmanowitz.

(2) Mỗi đồng cấu từ môđun nào đó vào N là chẻ ra địa phương.

(3) Mỗi đồng cấu $R \longrightarrow N$ là chẻ ra địa phương.

Ví dụ sau chỉ ra rằng điều kiện "M là hữu hạn sinh" không thể bỏ được trong định lý trên.

Ví dụ 2.1.7. Cho $A = \{a/p^n \in \mathbb{Q} | a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ là một nhóm con của $\mathbb{Q}$ với nhóm con $\mathbb{Z}$. Ta có nhóm thương $A/\mathbb{Z}$ và được kí hiệu là $\mathbb{Z}_{p^\infty}$. Khi đó $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ không là hữu hạn sinh như $\mathbb{Z}$-môđun. Đặt $M = N = \mathbb{Z}_{p^\infty}$. Khi đó $[M, N]$ không chính quy.

Từ bổ đề trên ta có kết quả sau.

Định lý 2.1.9. *Các điều kiện sau là tương đương đối với các môđun M và N:*

(1) $[M, N]$ là chính quy.

(2) N là M-xạ ảnh trực tiếp và mỗi môđun con M-sinh hữu hạn của N là một hạng tử trực tiếp của N.

Ta nói rằng môđun H được gọi là *N-nội xạ hạn chế đến M* nếu mỗi $\alpha \in [M, N]$, mỗi đồng cấu từ $\alpha(M)$ đến H có thể mở rộng đến N. Môđun H được gọi là *M-xạ ảnh hạn chế đến N* nếu mỗi toàn cấu $p : M \longrightarrow A, A \leq N$ và mỗi đồng cấu $f : H \longrightarrow A$, thì tồn tại một đồng cấu $g : H \longrightarrow M$ sao cho $pg = f$.

Định lý 2.1.10. *Cho M, N là các môđun. Khi đó $[M, N]$ là chính quy nếu và chỉ nếu H vừa là N-nội xạ hạn chế đến M vừa là M-xạ ảnh hạn chế đến N với mỗi môđun H.*

Vành R được gọi là *PP phải* nếu với mọi $a \in R, r(a) = eR$ với $e^2 = e \in R$ nào đó.

2.2 Đồng cấu nửa chính quy

Định lý sau đây là mở rộng của một kết quả của Nicholson và Zhou.

Định lý 2.2.2. *Cho M và N là các môđun. Nếu M vừa là (GC2) vừa là N-nội xạ trực tiếp, thì các điều kiện sau là tương đương:*

(1) $[M, N]$ *là nửa chính quy và* $\triangle[M, N] = J[M, N]$.

(2) $\mathrm{Ker}(\alpha)$ *nằm dưới một hạng tử trực tiếp của M với bất kỳ* $\alpha \in [M, N]$.

Định lý sau đây là đối ngẫu với Định lý 2.2.2.

Định lý 2.2.3. *Cho M và N là các môđun. Nếu N vừa là (GD2) vừa là M-xạ ảnh trực tiếp, thì các điều kiện sau là tương đương:*

(1) $[M, N]$ *là nửa chính quy và* $J[M, N] = \bigtriangledown[M, N]$.

(2) $\mathrm{Im}(\alpha)$ *nằm trên một hạng tử trực tiếp của M với bất kỳ* $\alpha \in [M, N]$.

Định lý 2.2.4. *Cho M và N là các môđun. Giả sử M vừa là liên tục tổng quát vừa là N-nội xạ trực tiếp. Khi đó $[M, N]$ là nửa chính quy và $J[M, N] = \triangle[M, N]$.*

Trường hợp $M = N$ trong định lý trên ta có hệ quả sau.

Hệ quả 2.2.5. *Cho M là môđun liên tục. Khi đó E_M là nửa chính quy và* $J(E_M) = \{\alpha \in S = End(M) | \mathrm{Ker}(\alpha) \leq^e M\}$.

Chúng ta có định lý sau đây đối ngẫu sau.

Định lý 2.2.6. *Cho M và N là các môđun. Giả sử N vừa là rời rạc tổng quát vừa là M-xạ ảnh trực tiếp. Khi đó $[M, N]$ là nửa chính quy và $J[M, N] = \bigtriangledown[M, N]$.*

Với $M = N$, ta có hệ quả sau đây.

Hệ quả 2.2.7. *Nếu M là một môđun rời rạc, thì E_M là nửa chính quy và* $J(E_M) = \{\alpha \in S = End(M) | \mathrm{Im}(\alpha) \ll M\}$.

Định lý 2.2.9. *Cho M và N là các môđun. Nếu M vừa là (GC2) vừa là N-nội xạ, khi đó các điều kiện sau là tương đương:*

(1) $[M, N]$ *là nửa chính quy.*

(2) $\mathrm{Ker}(\alpha)$ *nằm dưới một hạng tử trực tiếp của M với mọi $\alpha \in [M, N]$.*

Chúng ta có định lý đối ngẫu sau đây:

Định lý 2.2.11 *Cho M và N là các môđun. Nếu N vừa là (GD2) vừa là M-xạ ảnh, thì những điều kiện sau là tương đương:*

(1) $[M, N]$ *là nửa chính quy.*

(2) $\mathrm{Im}(\alpha)$ *nằm trên một hạng tử trực tiếp của M với mọi $\alpha \in [M, N]$.*

Định lý sau đây mở rộng một kết quả của Nicholson và Yousif.

Định lý 2.1.12. *Cho M và N là các môđun. Nếu N là xạ ảnh, khi đó những điều kiện sau là tương đương:*

(1) $[M, N]$ *là nửa chính quy.*

(2) N/K có phủ xạ ảnh với mỗi môđun con M-sinh hữu hạn K của N.

Định lý 2.2.14. *Giả sử môđun M là $\mathcal{T}$-đối suy biến tương đối với môđun N. Nếu N là rời rạc tổng quát và là môđun M-xạ ảnh trực tiếp, thì $[M, N]$ là chính quy.*

Cho M và N là các môđun và I là $E_M - E_N$ song môđun của $[M, N]$. $[M, N]$ được gọi là *I-chính quy* nếu với mỗi $f \in [M, N]$ thì tồn tại $g \in [N, M]$ sao cho $fgf - f \in I$.

Cho $X \leq [M, N], \mathrm{Ker}(X) = \bigcap\{\mathrm{Ker}(g) | g \in X\}$ được gọi là *môđun con M-linh hóa tử của M.*

Định lý 2.2.15. *Cho M và N là các môđun. Nếu M là N-nội xạ và M thỏa mãn ACC trên môđun con M-linh hóa tử của M, thì $[M, N]$ là $\triangle[M, N]$-chính quy.*

Chúng ta cũng có định lý đối ngẫu sau:

Định lý 2.2.16. *Cho M và N là các môđun. Nếu N là M-xạ ảnh và N thỏa mãn DCC trên $\{\mathrm{Im}(\alpha)|\alpha \in [M,N]\}$, thì $[M,N]$ là $\bigtriangledown[M,N]$-chính quy.*

Cho M và N là các môđun. Ta sử dụng các kí hiệu sau đây.

$$\begin{gathered} r.U(E_N) = \{t \in E_N | \exists t' \in E_N, tt' = 1_N\} \\ l.U(E_N) = \{t \in E_N | \exists t' \in E_N, t't = 1_N\} \\ r.U(E_M) = \{s \in E_M | \exists s' \in E_M, ss' = 1_M\} \\ l.U(E_M) = \{s \in E_M | \exists s' \in E_M, s's = 1_M\}. \end{gathered}$$

Định lý 2.2.21. *Những điều kiện sau là tương đương đối với các môđun M và N:*

(1) dãy

$$\begin{gathered} f_0E_M \geq f_1E_M \geq ... \geq f_nE_M \geq ... \\ E_Nf_0 \geq E_Nf_1 \geq ... \geq E_Nf_n \geq ... \end{gathered}$$

là dừng, với mỗi $g_i \in [N,M], f_i \in [M,N]$ và $f_{i+1} = f_i - f_ig_if_i$.

(2) Với mỗi $g_i \in [N,M]$ và $f_i \in [M,N]$, đặt $f_{i+1} = f_i - f_ig_if_i$. Khi đó ta có dãy

(a) $\mathrm{Im}(f_0) \geq \mathrm{Im}(f_1) \geq ... \geq \mathrm{Im}(f_n) \geq ...$;

(b) $\mathrm{Ker}(f_0) \leq \mathrm{Ker}(f_1) \leq ... \leq \mathrm{Ker}(f_n) \leq ...$

là dừng.

Trong trường hợp này $[M,N]$ là $J[M,N]$-chính quy.

Ta nhận thấy rằng nếu E_M hay E_N không chứa tập vô hạn các phần tử lũy đẳng trực giao thì $r.U(E_M) = l.U(E_M)$ và $r.U(E_N) = l.U(E_N)$.

Hệ quả 2.2.22. *Cho M và N là các môđun, với $T = End(N)$ và $S = End(M)$. Giả sử E_M hay E_N không chứa tập vô hạn các phần tử lũy đẳng trực giao. Khi đó những điều kiện sau là tương đương:*

(1) Với mỗi $g_i \in [N,M], f_0 \in [M,N], f_{i+1} = f_i - f_ig_inf_i$, dãy

$$f_0E_M \geq f_1E_M \geq ... \geq f_nE_M \geq ...$$

là dừng.

(2) *Với mỗi* $g_i \in [N, M], f_0 \in [M, N], f_{i+1} = f_i - f_ig_if_i$, *dãy*

$$E_Nf_0 \geq E_Nf_1 \geq ... \geq E_Nf_n \geq ...$$

là dừng.

(3) *Với mỗi* $g_i \in [N, M], f_0 \in [M, N], f_{i+1} = f_i - f_ig_if_i$, *có các dãy sau đây*

(a) $\mathrm{Im}(f_0) \geq \mathrm{Im}(f_1) \geq ... \geq \mathrm{Im}(f_n) \geq ...;$

(b) $\mathrm{Ker}(f_0) \leq \mathrm{Ker}(f_1) \leq ... \leq \mathrm{Ker}(f_n) \leq ...$

là dừng.

2.3 Tính chính quy của môđun trong một số lớp môđun khác

Trước hết, chúng tôi gọi một môđun con N của M là *e-đối cốt yếu* trong M (ký hiệu $N \ll_e M$), nếu $N + L = M$ với $L \leq^e M$ thì suy ra $L = M$. Cho N, L là các môđun con của M. Môđun con L được gọi là e-phần phụ của N trong M nếu $M = N + L$ và $N \cap L \ll_e L$. Một môđun M được gọi là e-phần phụ nếu mỗi môđun con của M có một e-phần phụ trong M. Cho M là một môđun. Ký hiệu $Rad_e(M) = \bigcap\{N \leq^e M |\ N$ là cực đại $M\}$. Khi đó $Rad_e(M) = \sum\{N |\ N \ll_e M\}$.

Trong phần tiếp theo chúng ta sẽ xét điều kiện dây chuyền trên các môđun con e-đối cốt yếu. Hơn nữa một số đặc trưng của môđun Artin đã được nghiên cứu. Từ đó chúng ta sẽ thu được các đặc trưng chính quy của vành thương $R/J(R)$.

Trước hết chúng ta có đặc trưng của $Rad_e(M)$ xác định bởi dây chuyền tăng trên các môđun con e-đối cốt yếu.

Định lý 2.3.3. *Các điều kiện sau là tương đương đối với một môđun* M*:*

(1) $Rad_e(M)$ *là một môđun Nơte.*

(2) *M thỏa mãn điều kiện ACC trên các môđun con e-đối cốt yếu.*

Mệnh đề 2.3.4. *Các điều kiện sau là tương đương đối với một môđun M:*

(1) *$Rad_e(M)$ có chiều Goldie hữu hạn.*

(2) *Mỗi môđun con e-đối cốt yếu của M có chiều Goldie hữu hạn và tồn tại một số nguyên dương k sao cho $\operatorname{udim} N \leq k$ cho mỗi $N \ll_e M$.*

(3) *M không chứa một tổng trực tiếp vô hạn các môđun con e-đối cốt yếu.*

Định lý 2.3.5. *Các điều kiện sau là tương đương đối với một môđun M:*

(1) *$Rad_e(M)$ là một môđun Artin.*

(2) *Mỗi môđun con e-đối cốt yếu của M là Artin.*

(3) *M thỏa mãn điều kiện DCC trên các môđun con e-đối cốt yếu.*

Một môđun con N của M được gọi là *e-nửa cực đại* nếu $N = \cap_{i=1}^{n} L_i$ với L_i là môđun con cực đại và cốt yếu trong M cho mỗi $i = 1, ..., n$.

Mệnh đề 2.3.6. *Các điều kiện sau là tương đương đối với môđun M:*

(1) *M là một môđun Artin.*

(2) *M thỏa mãn điều kiện DCC trên các môđun con e-đối cốt yếu của M và các môđun con e-nửa cực đại của M.*

(3) *M thỏa mãn điều kiện DCC trên các môđun con e-đối cốt yếu của M và $Rad_e(M)$ là môđun con e-nửa cực đại của M.*

Định lý 2.3.7. *Cho M là một môđun. Khi đó M là Artin nếu và chỉ nếu môđun M là e-phần phụ nhiều và thỏa mãn điều kiện DCC trên các môđun e-phần phụ và e-đối cốt yếu của M.*

Mệnh đề 2.3.9. *Nếu M là môđun e-phần phụ và thỏa mãn điều kiện ACC trên các môđun con e-đối cốt yếu của M, thì các môđun thương M/A cũng vậy với mỗi môđun con A của M.*

CHƯƠNG 3
MÔĐUN GIẢ NỘI XẠ CHÍNH VÀ ĐỐI NGẪU CỦA NÓ

Nội dung chương này bao gồm các kết quả nghiên cứu về tính chất chính quy của vành và môđun thông qua lớp môđun tổng quát của môđun nội xạ chính. Hơn nữa, một trường hợp đối ngẫu của lớp môđun tổng quát của môđun nội xạ chính cũng đã được xét đến. Từ đó chúng tôi thu được một số kết quả trên vành tự đồng cấu của nó.

3.1 Môđun giả nội xạ chính

Trong phần này chúng tôi nghiên cứu các đặc trưng của lớp môđun tổng quát của lớp môđun nội xạ chính. Một số đặc trưng của lớp vành nửa nguyên sơ, vành chính quy thông qua lớp môđun này đã được nghiên cứu.

3.1.1 Vành và môđun giả $QP-$nội xạ

Định nghĩa 3.1.1. (1) Một R-môđun phải N được gọi là *M-nội xạ chính* (viết tắt, $M-p-$nội xạ) nếu mọi đồng cấu từ một môđun con M-cyclic của M vào N có thể mở rộng đến đồng cấu từ M vào N. Một R-môđun phải M được gọi là *tựa nội xạ chính* (viết tắt, qp-nội xạ) nếu M là $M-p-$nội xạ. Vành R được gọi là *vành P-nội xạ phải* nếu R_R là qp-nội xạ.

(2) Một R-môđun phải N được gọi là *giả M-nội xạ* nếu với mọi môđun con A của M thì bất kỳ đơn cấu $\alpha : A \to N$ có thể

được mở rộng đến một đồng cấu $M \to N$. Một R-môđun phải M được gọi là *giả nội xạ* nếu M là giả M-nội xạ.

(3) Một môđun N được gọi là *giả $M-p-$nội xạ* nếu mọi đơn cấu từ một môđun con M-cyclic nào đó của M vào N có thể được mở rộng đến một đồng cấu từ M vào N. Một môđun M được gọi là *tựa giả nội xạ chính* (viết tắt, giả qp-nội xạ) nếu M là giả p-nội xạ. Vành R được gọi là *giả P-nội xạ* nếu R_R là giả qp-nội xạ.

Ta có các quan hệ sau:

$$
\begin{tikzcd}
 & M\text{-}p\text{-nội xạ} \arrow[r] \arrow[dd, "/" marking] & \text{giả } M\text{-}p\text{-nội xạ} \\
M\text{-nội xạ} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
 & \text{giả } M\text{-nội xạ} &
\end{tikzcd}
$$

Ví dụ sau chứng tỏ các chiều ngược lại không đúng.

Ví dụ 3.1.2. (1) Cho $R = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & F \end{pmatrix}$ với F là một trường, $M_R = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ và $N_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix}$. Khi đó

(i) N không phải là M-nội xạ và giả M-p-nội xạ.

(ii) N là M-p-nội xạ.

(2) Cho $\mathbb{Z}$ là vành các số nguyên. Khi đó $\mathbb{Z}$-môđun $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ là giả $\mathbb{Z}-p$-nội xạ nhưng không phải là $\mathbb{Z}-p$-nội xạ.

(3) Cho $R = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid$ hầu hết các phần tử x_n bằng $a \in \mathbb{Z}_2$ nào đó trừ một số hữu hạn$\}$. Khi đó, R_R là giả R_R-nội xạ nhưng không là R_R-nội xạ.

Định lý 3.1.8. *Các điều kiện sau là tương đương với môđun M với $S = \mathrm{End}(M)$:*

(1) M là giả qp-nội xạ.

(2) Nếu $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g)$ với $f, g \in S$ thì $Sf = Sg$.

(3) *Nếu* $f \in S$ *và* $\alpha, \beta : f(M) \to M$ *là đơn cấu, thì* $\alpha = s\beta$ *với* $s \in S$ *nào đó.*

Định lý 3.1.9. *Các điều kiện sau là tương đương với vành* R*:*

(1) R *là vành giả* P*-nội xạ phải.*

(2) *Nếu* $r(x) = r(y)$ *với* $x, y \in R$ *thì* $Rx = Ry$*.*

3.1.2 Vành và môđun giả $QGP-$nội xạ

Định nghĩa 3.1.10.

(1) Một R-môđun phải M được gọi là *nội xạ chính suy rộng* (viết tắt, gp-nội xạ) nếu bất kỳ $0 \neq x \in R$ nào đó, tồn tại một $n \in \mathbb{N}$ sao cho $x^n \neq 0$ và bất kỳ R-đồng cấu nào từ x^nR vào M có thể mở rộng đến đồng cấu từ R_R vào M. Một vành R được gọi là GP*-nội xạ phải* nếu R_R là gp-nội xạ.

(2) Một R-môđun phải N được gọi là *giả* $M-gp-$*nội xạ* nếu mỗi đồng cấu $0 \neq \alpha \in \mathrm{End}(M)$, tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho $\alpha^n \neq 0$ và mọi đơn cấu từ $\alpha^n(M)$ vào N có thể mở rộng đến một đồng cấu M vào N. Một môđun M được gọi là *giả* qgp*-nội xạ* nếu M là giả $M - gp-$nội xạ. Vành R được gọi là *giả* GP*-nội xạ phải* nếu R_R là giả qgp-nội xạ.

Ta có mối quan hệ sau đây:

qp-nội xạ $\Rightarrow$ giả qp-nội xạ $\Rightarrow$ giả qgp-nội xạ

Ví dụ sau chứng tỏ các chiều ngược lại không đúng.

Ví dụ 3.1.11.

(i) Cho $R = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid$ hầu hết các phần tử x_n bằng $a \in \mathbb{Z}_2$ nào đó trừ một số hữu hạn$\}$. Khi đó, R_R là giả qp-nội xạ nhưng không là qp-nội xạ.

(ii) Cho $K = F(y_1, y_2, \ldots)$ và $L = F(y_2, y_3, \ldots)$ với F là một trường và $\rho : K \to L$ là một đẳng cấu qua $\rho(y_i) = y_{i+1}$ và $\rho(c) = c$ với mọi $c \in F$. Cho $K[x_1, x_2; \rho]$ là vành của các đa thức xoắn trái trên K mà $x_i k = \rho(k) x_i$ với tất cả $k \in K$ và $i = 1, 2$. Xét $R = K[x_1, x_2; \rho]/(x_1^2, x_2^2)$. Khi đó R_R là giả *gqp*-nội xạ mà không là giả *qp*-nội xạ.

Định lý 3.1.19. *Nếu M là giả qgp-nội xạ thì M thỏa mãn điều kiện $GC2$.*

Hệ quả 3.1.20. *Nếu R là vành giả GP-nội xạ phải thì R_R thỏa mãn điều kiện $GC2$.*

Định lý 3.1.23. *Cho M là một môđun giả qgp-nội xạ, tự sinh và $S = \mathrm{End}(M)$. Khi đó, các điều kiện sau là tương đương:*

(1) S là vành hoàn chỉnh phải.

(2) Với bất kỳ $s_1, s_2, \ldots \in S$ nào đó thì dãy

$$\mathrm{Ker}(s_1) \leq \mathrm{Ker}(s_1 s_2) \leq \cdots$$

là dừng.

3.2 Môđun giả qgp-nội xạ trên vành tự đồng cấu và các iđêan cực đại.

Trong phần này chúng tôi nghiên cứu các đặc trưng của vành giả GP-nội xạ với điều kiện dây chuyền và các iđêan cực đại trên vành tự đồng cấu của môđun giả qgp-nội xạ.

Chúng ta có thể tóm tắt một kết quả chính trong mục này như sau:

Mệnh đề 3.2.3. *Cho M là môđun giả qgp-nội xạ và $S = \mathrm{End}(M)$. Khi đó, với bất kỳ phần tử đều u của S nào đó thì*

$$A_u = \{s \in S | \, \mathrm{Ker}(s) \cap \mathrm{Im}(u) \neq 0\}$$

là iđêan trái cực đại duy nhất của S chứa $l_S(\mathrm{Im}(u))$.

3.3 Về môđun giả M-xạ ảnh chính

Trong phần này chúng tôi nghiên cứu các tính chất của lớp môđun đối ngẫu của lớp môđun giả qp-nội xạ chính và đồng thời nó là một trường hợp tổng quát của môđun s-xạ ảnh. Một số đặc trưng của vành chính quy, Artin, hoàn chỉnh,... thông qua lớp môđun đã được đưa ra.

3.3.1 Một số khái niệm

Định nghĩa 3.3.1. Một R-môđun N được gọi là giả M-xạ ảnh chính nếu cho mỗi tự đồng cấu ε của M, mỗi toàn cấu $p : M \to \varepsilon(M)$ và mỗi tự đồng cấu $f : N \to \varepsilon(M)$, thì tồn tại một đồng cấu $h : N \to M$ sao cho $ph = f$.

$$\begin{tikzcd}
& N \arrow[dl, dotted, "h"'] \arrow[d, "f"] & \\
M \arrow[r, "p"] & \varepsilon(M) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& 0 &
\end{tikzcd}$$

hoặc tương đương nếu, cho mỗi tự đồng cấu ε của M và mỗi tự đồng cấu $f : N \to M/\operatorname{Ker}(\varepsilon)$, thì tồn tại một đồng cấu $h : N \to M$ sao cho $\pi h = f$ với $\pi : M \to M/\operatorname{Ker}(\varepsilon)$ là toàn cấu chính tắc.

Một môđun M được gọi là giả s-xạ ảnh nếu M là giả M-xạ ảnh chính.

3.3.2 Một số kết quả khác về môđun giả s-xạ ảnh

Trong phần này chúng tôi sẽ nghiên cứu một số tính chất của môđun giả s-xạ ảnh và vành tự đồng cấu của nó.

Định lý 3.3.9. *Cho M và N là các môđun và $\alpha \in [M, N]$. Khi đó các điều kiện sau là tương đương đối với $\alpha \in [M, N]$:*

(1) *α là chính quy .*

(2) *$\alpha(M)$ là một hạng tử trực tiếp của N và cho mỗi đồng cấu $f : M \to \alpha(M)$ và $g : \alpha(M) \to \alpha(M)$, thì tồn tại đồng cấu $h : \alpha(M) \to M$ sao cho $fh = g$.*

$$\begin{tikzcd} & \alpha(M) \arrow[dl, dashed] \arrow[d, "g"] & \\ M \arrow[r, "f"'] & \alpha(M) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Bây giờ chúng ta sẽ xét mối quan hệ giữa chiều Goldie của M và vành tự đồng cấu của nó.

Định lý 3.3.17. *Giả sử M là vật p-tự sinh và giả s-xạ ảnh. Khi đó M_R có chiều Goldie hữu hạn nếu và chỉ nếu S_S có chiều Goldie hữu hạn. Hơn nữa, trong trường hợp này, $dim(M_R) = dim(S_S)$.*

Một áp dụng cho kết quả trên là:

Ví dụ 3.3.18. *Cho R là một vành với $dim(R_R) = k$, n là một số nguyên dương và S là vành của tất cả các matrận cấp $n \times n$ trên vành R. Khi đó $dim(S_S) = nk$.*

Tiếp theo chúng ta cũng có các đặc trưng của vành nửa đơn xác định bởi tính giả s-xạ ảnh của mô đun.

Định lý 3.3.20. *Các điều kiện sau là tương đương đối với vành R đã cho:*

(1) *R là vành nửa đơn.*

(2) *Mỗi môđun giả s-xạ ảnh là xạ ảnh.*

(3) *Mỗi tổng trực tiếp của một họ các môđun giả s-xạ ảnh là xạ ảnh.*

(4) *Tổng trực tiếp của hai môđun giả s-xạ ảnh là xạ ảnh.*

Như chúng ta đã biết một vành R là hoàn chỉnh phải nếu và chỉ nếu mỗi R-môđun phải có phủ xạ ảnh. Chúng ta sẽ có một kết quả tương tự cho môđun s-xạ ảnh.

Định lý 3.3.21. *Các điều kiện sau là tương đương với vành R đã cho:*

(1) *R là vành hoàn chỉnh phải.*

(2) *Cho mỗi R-môđun phải M, thì tồn tại một toàn cấu $f : N \to M$ sao cho N là giả s-xạ ảnh và* $\mathrm{Ker}(f) \ll N$.

Kết luận

Đề tài bao gồm các kết quả chính sau đây:

1. Đưa ra đặc trưng của tính chính quy của các các đồng cấu liên quan tính "xạ ảnh" của chúng (Định lý 2.1.1, Định lý 2.1.2).

2. Đặc trưng chính quy của nhóm Hom thông qua tính chẻ ra địa phương của các đồng cấu (Định lý 2.1.5).

3. Đưa ra đặc trưng của tính nửa chính quy của nhóm Hom và các cấu trúc con Δ, ∇ với các tính chất của ảnh và hạt nhân của nhóm Hom đó (Định lý 2.2.2, Định lý 2.2.3, Định lý 2.2.9, Định lý 2.2.11).

4. Nghiên cứu tính chính quy của các môđun thương thông qua lớp môđun mở rộng của môđun phần phụ (Định lý 2.3.5, Mệnh đề 2.3.6, và Định lý 2.3.7).

5. Đặc trưng của lớp vành nửa nguyên sơ, vành chính quy thông qua lớp môđun mở rộng của giả nội xạ chính đã được nghiên cứu (Định lý 3.1.8, Định lý 3.1.9, Mệnh đề 3.1.21 và Định lý 3.1.23).

6. Đặc trưng của vành giả GP-nội xạ với điều kiện dây chuyền và các iđêan cực đại trên vành tự đồng cấu của môđun giả qgp-nội xạ (Mệnh đề 3.2.1, Mệnh đề 3.2.2, Mệnh đề 3.2.3 và Mệnh đề 3.2.6).

Đề tài cũng đặt ra một số vấn đề mở: Nghiên cứu các đặc trưng của vành mà mọi môđun cyclic (iđêan) là giả GP-nội xạ. Nghiên cứu các áp dụng của lớp vành GP-nội xạ và giả GP-nội xạ đối với lý thuyết vành tựa-Frobenius. Trong thời gian tới, chúng tôi sẽ tiếp tục nghiên cứu để trả lời các vấn đề nói trên.