BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

VÕ THỊ THANH

CÁC ĐẶC TRƯNG CỦA NỬA VÀNH ZEROSUMFREE VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: Phương pháp toán sơ cấp

Mã số : 60.46.01.13

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Đà Nẵng – Năm 2015

Công trình được hoàn thành tại

ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

Người hướng dẫn khoa học: TS. Trương Công Quỳnh

Phản biện 1: TS. Phạm Quý Mười

Phản biện 2: GS.TSKH. Nguyễn Văn Mậu

Luận văn đã được bảo vệ trước Hội đồng chấm Luận văn tốt nghiệp Thạc sĩ Khoa học họp tại Đại Học Đà Nẵng vào ngày 12 tháng 12 năm 2015.

Có thể tìm hiểu Luận văn tại:

- Trung tâm Thông tin-Học liệu, Đại học Đà Nẵng
- Thư viện trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Nửa vành là cấu trúc đại số rất phong phú trong toán học. Nửa vành cung cấp lý thuyết khái quát chung mang tính tự nhiên nhất của vành. Lý thuyết nửa vành được biết đến trong những ứng dụng của toán học, khoa học và kĩ thuật.

Khái niệm nửa vành đầu tiên được xuất hiện trong công trình của nhà toán học người Đức R.Dedekind vào năm 1894 đề cập đến ideal của vành giao hoán và muộn hơn nữa trong công trình của F.S. Macaulay[10], W. Krull[8], E. Noether[11], và P. Lorenzen[9] đề cập đến tiên đề của các số tự nhiên và các số hữu tỷ không âm.

Cấu trúc đại số của nửa vành mà chúng ta được gặp lần đầu tiên đó chính là cấu trúc của tập hợp số tự nhiên. Sau này còn có thêm tập hợp các số nguyên dương, số hữu tỷ dương và cả các số thực dương nữa. Đặc biệt, những tập hợp số này đã được đưa vào xuyên suốt trong chương trình học từ bậc mẫu giáo đến bậc phổ thông dưới những hình thức khác nhau. Các tập hợp số này đều có những tính chất, đặc điểm chung nhất định bên cạnh những đặc điểm riêng biệt, thú vị của nó.

Đề tài "**Các đặc trưng của nửa vành zerosumfree và ứng dụng**" này được viết với hy vọng phần nào có thể thỏa mãn được mong muốn của bản thân là nghiên cứu rõ hơn những đặc điểm chung ấy, bên cạnh đó có thể tìm tòi, liên hệ những ứng dụng của nó trong thực tế.

2. Mục tiêu và nội dung nghiên cứu đề tài

Mục tiêu của đề tài là tìm hiểu về "nửa vành zerosumfree" và nghiên cứu những tính chất đặc trưng của nó.

Trên cơ sở đó, tìm các vấn đề liên quan như khảo sát nửa vành zerosumfree có tính chất trừ .

Đóng góp của đề tài là tổng quan các kết quả thu được của các tác giả đã nghiên cứu trên nửa vành zerosumfree và chủ yếu trong [3] ,[4]và [12], chứng minh chi tiết, làm rõ các mệnh đề, định lý, đưa ra ví dụ minh họa để người đọc dễ dàng tiếp cận vấn đề. Ngoài ra, trong luận văn, tác giả cố gắng tìm hiểu các ứng dụng và mở rộng một số kết quả thú vị về nửa vành và nửa vành zerosumfree.

3. Phương pháp nghiên cứu

1. Thu thập các bài báo khoa học của các tác giả đã nghiên cứu liên quan đến nửa vành zerosumfree, nửa vành zerosumfree có tính chất trừ.

2. Sử dụng một số kĩ thuật trong lý thuyết nhóm, nửa nhóm, lý thuyết vành và nửa vành, lý thuyết môđun và nửa môđun để áp dụng tổng quan và chứng minh chi tiết các kết quả của một số tác giả đã nghiên cứu.

3. Vận dụng các kết quả đã có trong các bài báo về nửa vành zerosumfree để tìm ra các vấn đề liên quan.

4. Trao đổi kết quả nghiên cứu với GVHD thông qua các buổi seminar.

4. Bố cục đề tài

Nội dung của luận văn chia thành hai chương:

Chương 1: Trình bày lại một số kiến thức cơ sở về lý thuyết nửa vành và nửa môđun.

Chương 2: Trình bày khái niệm về nửa vành zerosumfree và các đặc trưng của nó. Nghiên cứu tính chất trừ của nửa vành zerosumfree và đặc biệt là các đặc điểm của vành sai phân trên nửa vành zerosumfree. Cuối cùng là một vài ví dụ về nửa vành liên quan đến nửa vành zerosumfree thường gặp và một số ứng dụng của nửa vành zerosumfree trong thực tế.

Những kết quả trên đây là sự cố gắng không ngừng của tôi trong thời gian nghiên cứu luân văn. Vì vậy, tôi rất mong được sự góp ý chân thành từ quý thầy cô giáo cùng các bạn đọc để nội dung đề tài được hoàn thiện hơn.

CHƯƠNG 1

MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ SỞ

Chương này hệ thống lại một số nội dung cơ bản về lý thuyết nửa vành, nửa môđun và các nội dung liên quan

1.1. NỬA VÀNH VÀ ĐỒNG CẤU NỬA VÀNH

Định nghĩa 1.1.1. Một tập hợp *A* khác rỗng cùng với hai phép toán (+) và nhân (.) được gọi là một nửa vành (semiring) nếu các điều kiện sau được thỏa mãn:

(1) (*A*,+) là một vị nhóm giao hoán với phần tử không là 0_A.

(2) (*A*,.) là một vị nhóm với phần tử đơn vị là 1_A.

(3) Phép nhân phân phối hai phía với phép cộng.

(4) $0_A r = 0_A = r0_A$ với mọi $r \in A$.

Nếu phép nhân trên nửa vành *A* có tính giao hoán thì *A* được gọi là nửa vành giao hoán.

Định nghĩa 1.1.4. Một phần tử *r* của một hemiring *H* được gọi là *lũy đẳng cộng tính (additively idempotent)* nếu *r*+*r*=*r*. Ta kí hiệu $I^+(H)$ là tập hợp tất cả các phần tử lũy đẳng cộng tính của *H*. *H* được gọi là một *hemiring lũy đẳng cộng tính* nếu $I^+(H) = H$.

Định nghĩa 1.1.5. Một phần tử *r* của một hemiring *H* được gọi là *nhân lũy đẳng(multiplicatively idempotent)* nếu r^2=*r*. Ta kí hiệu $I^*(H)$ là tập hợp tất cả các phần tử nhân lũy đẳng của *H*. *H* được gọi là một *hemiring nhân lũy đẳng* nếu $I^*(H) = H$.

Định nghĩa 1.1.9. Một phần tử *r* của nửa vành *A* được gọi là *khả đối* nếu tồn tại một phần tử *r’* thuộc *A* sao cho *r+r’=0*. Khi đó *r’* được gọi là *phần tử đối* của *r* và nó là duy nhất.

(i) Ta sẽ biểu thị phần tử đối của phần tử *r* (nếu nó tồn tại) bởi *–r* và tập tất cả các phần tử của *A* có phần tử đối là *V(A).*

(ii) *V(A)* là nhóm con lớn nhất của *(A,+).*

. **Định nghĩa 1.1.13.** Một phần tử *u* của một nửa vành *A* được gọi là *giản ước được* nếu *u+b=u+c* thì kéo theo *b=c* với $b, c \in A$. Nếu mọi phần tử của nửa vành *A* đều giản ước được thì *A* được gọi là *nửa vành giản ước được*.

1.3. NỬA MÔĐUN VÀ NỬA MÔĐUN CON

Định nghĩa 1.3.1. Cho *A* là một nửa vành. Một *A- nửa môđun phải* *M* là một vị nhóm giao hoán *(M,+)* với phần tử không là 0_M cùng với ánh xạ $M \times A \to M$ xác định bởi $(m,r) \mapsto m.r$ được gọi là phép nhân vô hướng thỏa mãn các điều kiện sau:

(1) $m.(rr')=(mr).r'$;

(2) $(m+m').r=m.r+m.r'$;

(3) $m.(r+r')=m.r+mr'$;

(4) $m.1_A=m$;

(5) $0_M.r=0_M=m.0_A$.

trong đó *r,r’* là các phần tử tùy ý thuộc *A*, *m* và *m’* là các phần tử tùy ý thuộc *M*. Ký hiệu *A*-nửa môđun phải *M* là M_A.

Định nghĩa 1.3.3. Một phần tử m thuộc A- nửa môđun phải M được gọi là *lũy đẳng cộng tính* nếu $m+m=m$. Ta kí hiệu tập $I(M)=\{m\in M \mid m+m=m\}$. Dễ dàng thấy rằng $I(M)$ là một A-nửa môđun con của M. Nếu $I(M)=M$ thì M được gọi là *lũy đẳng cộng tính.*

Định nghĩa 1.3.4. Một A- nửa môđun phải M thỏa mãn $V(M)=M$ được gọi là một *A-nhóm phải (right A-group)*. Một nửa môđun trên một vành R đươc gọi là *R-môđun*. Một *A-nhóm trái (left A-group)* được định nghĩa tương tự.

1.4. QUAN HỆ TƯƠNG ĐẲNG VÀ NỬA MÔĐUN THƯƠNG

Định nghĩa 1.4.1. Cho A là một nửa vành và M là một A- nửa môđun phải. Một quan hệ tương đương $\equiv$ xác định trên nửa vành M được gọi là một *quan hệ đồng dư* nếu $m\equiv m'$ và $n\equiv n'$ thì $m+n=m'+n'$ và $mr=m'r$ với mọi $r\in A$.

Kí hiệu *Cong*(M_A) là tập tất cả các quan hệ đồng dư trên A *-nửa môđun phải M.*

Định nghĩa 1.4.2. Cho M là một A-nửa môđun phải và $\equiv$ là một quan hệ đồng dư trên M. Với mỗi $m\in M$, ta kí hiệu $m/\equiv$ là lớp tương đương của m ứng với quan hệ $\equiv$ và trên tập thương $M/\equiv$ gồm tất cả các lớp tương đương $m/\equiv$. Ta định nghĩa phép cộng và nhân vô hướng như sau: Với mọi $m,n\in M$ và $r\in A$,

$$m/_{\equiv}+n/_{\equiv}=(m+n)/_{\equiv};$$

$$(m/_{\equiv})r = \left(mr\right)/_{\equiv}.$$

Khi đó $M/\equiv$ cùng với hai phép toán trên là một *A*- nửa môđun phải và nó được gọi là *nửa môđun thương của M* theo quan hệ tương đẳng $\equiv$.

Ví dụ 1.4.3. Cho *A* là một vành có $V(A)=\{0_M\}$ và *M* là một nửa môđun con của *A*. Định nghĩa quan hệ δ trên *M* như sau: $m\delta m'$ với mọi $m,m'\in M$ $\Leftrightarrow$ *Ann(m)=Ann(m')* trong đó $Ann(m)=\{s\in A: ms=0_M\}$ là một quan hệ đồng dư trên *M*.

Thật vậy, δ là một quan hệ tương đương trên *M*. Giả sử $m\delta m'$ và phần tử *n* tùy ý thuộc *M*. Nếu $s\in Ann(m+n)$ thì

$0_M=(m+n)s=ms+ns.$

Do $V(M)=\{0_M\}$ nên $ms=ns=0_M$ và vì thế

$s\in Ann(m)=Ann(m')$. Mặt khác $s\in Ann(m')$ tức là

$m's=0_M$ nên $(m'+n)s=m's+ns=0_M$, suy ra

$s\in Ann(m'+n)$ hay $Ann(m+n)\subseteq Ann(m'+n)$.

Tương tự ta có $Ann(m'+n)\subseteq Ann(m+n)$. Vậy

$Ann(m+n)=Ann(m'+n)$ tức là $(m+n)\delta(m'+n)$.

Giả sử $s \in A$ tùy ý và $t \in Ann(ms)$ thì $0_M = (ms)t = m(st)$. Do đó $st \in Ann(m) = Ann(m')$ suy ra $0_M = m'(st) = (m's)t$ hay $t \in Ann(m's)$. Vì vậy $Ann(ms) \subseteq Ann(m's)$. Tương tự ta cũng có $Ann(m's) \subseteq Ann(ms)$. Vậy $Ann(ms) = Ann(m's)$ hay $(ms)\delta(m's)$.

Định nghĩa 1.4.3. Nếu $M \neq \{0_M\}$ và *Cong(M)* chỉ có hai phần tử thì khi đó *A*- nửa môđun *M* được gọi là *đồng dư đơn* (congruence-simple) hoặc *c- đơn* (c-simple).

CHƯƠNG 2

CÁC ĐẶC TRƯNG CỦA NỬA VÀNH ZEROSUMFREE VÀ ỨNG DỤNG

Trong chương này các kết quả chủ yếu được trích dẫn từ tài liệu [3], [4], [12] và một số kết quả suy ra từ đó, cụ thể như sau:

Trong 2.1, tôi trình bày khái niệm và một số tính chất đặc trưng của nửa vành zerosumfree cùng với một số ví dụ minh họa. Một số tính chất trên nửa vành được áp dụng cho nửa vành zerosumfree để có kết quả cụ thể hơn.

Trong 2.2, tôi đề cập tới một số kết quả của tính chất trừ khi xét nó trên nửa vành zerosumfree. Tôi trình bày thêm định nghĩa một V- nửa vành phải, nêu lên mối quan hệ giữa nửa vành zerosumfree và nửa vành zeroic, xét các lớp nửa vành mà nửa môđun trên nó có bao nội xạ. Từ đó đưa ra khẳng định nếu mỗi nửa vành zerosumfree S thỏa mãn tính chất: " Mọi mở rộng cốt yếu của mỗi S- nửa môđun c- đơn M đều trùng với M" thì S là một V- nửa vành phải và vành sai phân tương ứng của nó là vành không. Mặt khác, nếu nửa vành nào đó thỏa mãn một tính chất nhưng không phải là vành thì có thể chuyển thành một nửa vành zerosumfree khác 0 vẫn mang tính chất đó.

Trong 2.3, tôi trình bày một số ứng dụng thực tế của nửa vành zerosumfree và một số ví dụ về nửa vành liên quan đến nửa vành zerosumfree thường gặp như tập các số tự nhiên, tập các số nguyên không âm, tập các số hữu tỷ không âm, tập các số thực không âm.

2.1. NỬA VÀNH ZEROSUMFREE

Định nghĩa 2.1.1. Một nửa vành *A* được gọi là zerosumfree nếu phần tử *0* là phần tử khả đối duy nhất của vị nhóm *(A,+,0)*. Nghĩa là, với mọi *a,a'* thuộc *A*, nếu *a+a'=0* thì *a=a'=0*.

Ví dụ 2.1.1. Tập các số tự nhiên $\mathbb{N}$ với phép toán cộng và nhân thông thường các số tự nhiên là giao hoán và là zerosumfree.

Ví dụ 2.1.2. Cho mỗi số nguyên dương *n*, xét tập $X_n = \{-\infty, 0, 1, 2, ..., n\}$ trong đó $-\infty$ được giả thiết thỏa mãn các điều kiện sau: $-\infty \le i$ và $-\infty + i = -\infty$, với mọi *i* thuộc X_n. Ta định nghĩa phép toán cộng và nhân trên X_n như sau:

$$i+h=\min\{i,h\} \text{ và } i.h=\max\{i,h\}.$$

Lúc đó, X_n là một nửa vành có đơn vị giao hoán và zerosumfree.

Mệnh đề 2.1.1. *A là một nửa vành zerosumfree nếu và chỉ nếu V(A)={0}.*

Nhận xét 2.1.2. Cho *R* là một vành giao hoán, một tập con *P* của *R* với các phép toán cộng và nhân được hạn chế từ *R* thỏa $P \cap (-P) = \{0\}$. Khi đó, *P* là một nửa vành zerosumfree có đơn vị.

Nhận xét 2.1.3. Một nửa vành chia được thì nó hoặc là một nửa vành zerosumfree hoặc là một vành chia được.

Mệnh đề 2.1.3. *Nếu A là một nửa vành nguyên thỏa mãn luật giản ước, là một nửa vành zerosumfree thì chỉ có một A-nửa môđun trái nội xạ là {0}.*

2.2 NỬA VÀNH ZEROSUMFREE CÓ TÍNH CHẤT TRỪ (SUBTRACTIVE)

Định nghĩa 2.2.1. Một nửa vành S được gọi là V- nửa vành phải (tương ứng, trái) nếu mọi S- nửa môđun phải (tương ứng, trái) đơn đều nội xạ.

Định nghĩa 2.2.2. Một tập không rỗng *A* của nửa vành zerosumfree *H* được gọi là có tính chất *nửa trừ (semisubtractive)* nếu $a \in A \cap V(H)$ kéo theo $-a \in A \cap V(H)$ và *A* được gọi là có tính chất *trừ (subtractive)* nếu $a \in A$ thì $a + a' \in A$ kéo theo $a' \in A$. Nó được gọi là có tính chất *trừ mạnh (strong)* nếu và chỉ nếu $a + a' \in A$ kéo theo $a \in A$ và $a' \in A$.

Định nghĩa 2.2.3. Một iđêan *I* của nửa vành có đơn vị *A* được gọi là cộng hút (additively absorbing) nếu $a + r \in I, \forall a(\neq 0) \in I$ và $r \in A$.

Nhận xét 2.2.1. Nếu *A* là một tập con khác rỗng của nửa vành zerosumfree có đơn vị *H*, khi đó ta định nghĩa tập hợp

$I = Ann(a) = (0 : A) = \{r \in H \mid r.a = 0_H, \forall a \in A\}$.

Nếu $A \neq \{0\}$ khi đó $(0 : A)$ là một iđêan trái của *H*, được gọi là iđêan linh hóa tử trái của *A* và nó là một iđêan trái có tính chất *trừ* của *H*.

Mệnh đề 2.2.1. *Cho H là một nửa vành zerosumfree và tập hợp* $S = H \times \mathbb{N}$ *là một Dorroh mở rộng của H. Khi đó S là một nửa vành* *zerosumfree, mặt khác một tập con không rỗng I của H là iđêan (hai phía) của H nếu và chỉ nếu $J=\{(a,0)\mid a\in I\}$ là một iđêan (hai phía) của S. Hơn nữa, I có tính chất trừ nếu và chỉ nếu J cũng vậy.*

Mệnh đề 2.2.2. *Nếu I là một iđêan của nửa vành có đơn vị zerosumfree A. Khi đó, 0/I là một iđêan của A, ngoài ra nó cũng là một nửa vành zerosumfree và là một iđêan có tính chất trừ.*

Bổ đề 2.2.1. *Một iđêan cộng hút của nửa vành có đơn vị A xác định một quan hệ $\sim_I$ trên A bởi cách đặt $r \sim_I r' \Leftrightarrow r = r'$ hoặc cả r,r' thuộc I. Đây là một quan hệ đồng dư.*

Mệnh đề 2.2.3. *Nếu A là một nửa vành giao hoán có đơn vị khác {0} không có quan hệ đồng dư không tầm thường thực sự khi đó hoặc A=IB={0,1} hoặc A là một trường.*

Nhận xét 2.2.3. Nếu *A* có 2 phần tử và là zerosumfree thì *A=IB*. Nếu *A* có hơn hai phần tử thì *A* không thể là zerosumfree.

Mệnh đề 2.2.4. *Nếu I là một iđêan có tính chất trừ cực đại của một nửa vành giao hoán có đơn vị A, khi đó A/I là một nửa trường.*

Mệnh đề 2.2.6 ([4, Proposition A]) *Cho một vành R, những điều sau là tương đương :*

1, R là một V-vành phải ;

2, Mọi mở rộng cốt yếu của R- môđun phải M đều trùng với M ;

3, Mỗi vành chia được của R là một V- vành phải.

Định lý 2.2.2. ([4, Theorem B]) *Một vành giao hoán R là một V-vành nếu và chỉ nếu R là chính quy.*

Bổ đề 2.2.2. *Nếu M là nửa vành zerosumfree, khi đó* δ *(định nghĩa trong ví dụ 1.4.3) là một quan hệ đồng dư trên M. Hơn nữa, nếu M là nửa môđun c-đơn thì* δ *là quan hệ đẳng thức.*

Mệnh đề 2.2.7 ([3, Proposition 13.55]) *Nếu A là nửa vành giao hoán và M là một A- nửa môđun c-đơn khác không thì M hoặc là một môđun hoặc M là lũy đẳng cộng tính.*

Nhận xét 2.2.4. Cho *S* là một nửa vành và *M* là một *S*-môđun. Khi đó ta có thể xem *M* như là một S^{Δ}-môđun bằng cách đặt $m(a,b)^{\Delta} = ma - mb$ với mọi $m \in M$ và $(a,b)^{\Delta} \in S^{\Delta}$. Ngược lại, mỗi S^{Δ}-môđun *M* cũng có thể xem như là một *S*-môđun bằng cách đặt $ms = m(s,0)^{\Delta}$ với mọi $m \in M$ và $s \in S$. Từ đó suy ra $Cong\left(M_S\right) = Cong\left(M_{S^{\Delta}}\right)$ với mọi môđun *M*. Đặc biệt, *M* là một *S*-môđun đơn nếu và chỉ nếu *M* là một S^{Δ}-môđun đơn.

Mệnh đề 2.2.8. ([4, Proposition 1.4]) *Cho S là một nửa vành, Một S-môđun M là đơn nếu và chỉ nếu* $M \cong S^{\Delta} / J$ *, trong đó J là một iđêan cực đại của vành* S^{Δ}.

Mệnh đề 2.2.9. ([4, Proposition 1.5]) *Mỗi nửa môđun c-đơn lũy đẳng cộng tính trên một nửa vành giao hoán S khác không chứa chính xác hai phần tử. Một nửa nhóm M={*0_M *; m} lũy đẳng cộng tính là một S- nửa môđun c-đơn nếu và chỉ nếu Ann(m) là một iđêan nguyên tố mạnh trong S.*

Theo Mệnh đề 2.2.6, " mỗi vành *R* là một *V*- vành phải nếu và chỉ nếu mỗi mở rộng cốt yếu của mỗi *R*- môđun đơn *M* đều trùng với *M*". Ta xét tính chất tương tự này trên một nửa vành.

" *Mọi mở rộng cốt yếu của mỗi S-nửa môđun đơn M đều trùng với M"* *(*)*

Nếu $\alpha : S \to T$ là một toàn cấu nửa vành thì mỗi *T*- nửa môđun phải *M* có thể được xét như là một *S*- nửa môđun phải bằng cách đặt $ms = m\alpha(s)$. Ta có $Cong\left(M_S\right) = Cong\left(M_T\right)$, do đó nếu một *T*- nửa môđun phải *M'* là một mở rộng cốt yếu của *T*- nửa môđun đơn *M* thì ta cũng có *S*- nửa môđun phải đơn

M. Vì thế ta có mệnh đề sau:

Mệnh đề 2.2.10. ([4,Proposition 2.1]) *Mỗi ảnh đồng cấu của một nửa vành có tính chất (*) là một nửa vành có tính chất (*).*

Nhận xét 2.2.5. Cho *S* là một nửa vành và θ_R là quan hệ Bourne trên *S* được xác định bởi iđêan *V(S)*. Khi đó S/θ_R là một nửa vành zerosumfree.

Ngoài ra, chúng ta dễ thấy rằng *S* là một vành khi và chỉ khi nửa vành thương S/θ_R là 0. Như vậy, từ Mệnh đề 2.2.10, mọi nửa vành thỏa mãn tính chất (*) nhưng không phải là một vành có thể chuyển thành một nửa vành zerosumfree khác 0 có tính chất (*) bằng cách chia thương bởi quan hệ Bourne xác định bởi *V(S)*.

Trên mỗi *S*- nửa môđun *M*, ta trang bị một quan hệ $\lhd_M$ xác định bởi $m \lhd_M m'$ với *m, m'* tùy ý thuộc *M* nếu tồn tại số tự nhiên *k'* và một phần tử $n \in M$ sao cho *k'm'=m+n.* Theo cách xác định này thì $\Diamond_M$ là một quan hệ đồng dư trên *M*. Nếu xem *S* là một *S*- nửa môđun, khi đó ta có ngay quan hệ đồng dư $\Diamond_S$ trên nửa môđun *S*. Hơn nữa, $\Diamond_S$ là quan hệ đồng dư trên nửa vành. Từ cách định nghĩa $\lhd_M$ như trên, ta có ngay $m \lhd_M (m+m)$ và $(m+m) \lhd_M m$ nên $m \Diamond_M (m+m)$ với mọi $m \in M$. Do đó ta có Bổ đề sau:

Bổ đề 2.2.3. ([4, Lema 2.2]) *Môđun thương* $M^{\Diamond} = M / \Diamond_M$ *là lũy đẳng cộng tính và nửa môđun* $M^{\Diamond}$ *là 0 nếu và chỉ nếu M là một môđun. Đặc biệt, nếu một nửa vành S không phải là vành thì khi đó nửa vành thương* $S^{\Diamond} = S / \Diamond_M$ *là một nửa vành khác không và lũy đẳng cộng tính.*

Bổ đề 2.2.4. ([4], Lema 2.3) *Đặt* $ms^{\Diamond} = ms$ *với mọi* $m \in M$ *và* $s \in S$*, khi đó mỗi S- nửa môđun M lũy đẳng cộng tính có thể được xét như một* $S^{\Diamond}$ *- nửa môđun, và Cong(M_S)= Cong(* $M_{S^{\Diamond}}$*). Đặc biệt, nửa môđun thương* $N^{\Diamond} = N / \Diamond_N$ *là một S- và* $S^{\Diamond}$ *- nửa môđun với mọi* S *- nửa môđun N.*

Bổ đề 2.2.5.([4, Lemma 2.4]) *Cho M là một nửa môđun trên nửa vành zerosumfree S. Khi đó, tồn tại một S- nửa môđun* $\tilde{M}$ *và* $z \in \tilde{M}$ *sao cho* $M \subseteq \tilde{M}$ *và m+z=z với mọi* $m \in M$ *.*

Mệnh đề 2.2.11. *Một nửa vành zerosumfree có tính chất (*) thì vành sai phân tương ứng* S^{Δ} *là vành không.*

Nhận xét 2.2.6. Theo Mệnh đề 2.2.11, một nửa vành zerosumfree *S* có tính chất (*) thì vành sai phân tương ứng S^{Δ} là 0. Do đó, *S* là một nửa vành zeroic vì theo Nhận xét trong 1.2. Ngoài ra, một nửa vành *S* là zeroic thì *S* là một nửa vành zerosumfree.

Trong lý thuyết vành môđun, ta có một kết quả quan trọng là mọi môđun được chứa trong một môđun nội xạ. Tuy nhiên, trong lý thuyết nửa vành và nửa môđun thì điều này không xảy ra. Chẳng hạn, nếu *S* là một nửa vành nguyên, giản ước được và zerosumfree thì chỉ có một *S*- nửa môđun nội xạ đó là $\{0\}$.

2.3. CÁC ỨNG DỤNG CỦA NỬA VÀNH ZEROSUMFREE VÀ MỘT SỐ NỬA VÀNH LIÊN QUAN ĐẾN NỬA VÀNH ZEROSUMFREE THƯỜNG GẶP

2.3.1. Một số ứng dụng của nửa vành zerosumfree

Lý thuyết nửa vành đã được áp dụng trong nhiều loại ứng dụng khác nhau như trong toán ứng dụng, khoa học và công nghệ, trong đó đáng chú ý là thuyết các máy tự động, lý thuyết tối ưu hóa, quá trình truyền thông và trong lý thuyết tập mờ…. Trong khoa học máy tính, lý thuyết các máy tự động là ngành nghiên cứu về máy học trừu tượng và các bài toán mà máy đó có khả năng giải quyết. Máy tự động là mô hình toán học của máy có trạng thái hữu hạn. Với các ký tự dẫn vào, một máy trạng thái hữu hạn truyền (hoặc " bước nhảy") qua một chuỗi các trạng thái theo một hàm truyền nào đó. Hàm này thông báo cho các máy tự động trạng thái nào cần truyền tiếp, từ một trạng thái vào một ký tự hiện thời. Lý thuyết các máy tự động liên hệ chặt chẽ với thuyết ngôn ngữ hình thức như các máy tự động thường được phân loại nhờ lớp ngôn ngữ hình thức chúng có khả năng nhớ lại. Dựa trên công trình của Kleene vào năm 1956, Eilenberg đã xây dựng một lý thuyết đại số toàn diện được trình bày trong cuốn sách – *Automata,Languges , and Machines* công bố vào năm 1974. Một công trình quan trọng khác – *Automata - Theoretic Aspects of Formal Power Series*- đã được xuất bản vào năm 1978 bởi Salomaa và Soittola.

Một trong những nửa vành cơ bản đằng sau lý thuyết các máy tự động là nửa vành **tropical** $(\mathbb{N}\cup\{\infty\},\min,+)$, lần đầu tiên được giới thiệu bởi Simon. Nửa vành tropical đã tìm ra các ứng dụng mới quan trọng. Nói riêng, nửa vành này và tính chất của nó đã được sử dụng gần đây để xây dựng thuật toán hữu hiệu cho các mục đích phân loại khác nhau. Một ví dụ tiêu biểu là công trình của Allauzen và Mohri về kiểm định tính chất được gọi là *ghép cặp đôi* (*twins property)* . Họ đã xây dựng một thuật toán hữu hiệu cho việc kiểm chứng tính chất này bằng cách dùng máy tự động với trọng số trên nửa vành giao hoán và giản ước được mà có độ phức tạp

$O(|Q|^2 + |E|^2)$, trong đó Q là tập hợp các trạng thái của các máy tự động và E là tập các bước truyền . Thuật toán được chỉ ra là thực tiễn với các máy tự động có trọng số và lớn đến khoảng vài triệu bước truyền trong các ứng dụng về nhận dạng giọng nói .

Cuninghame-Greene nghiên cứu các ứng dụng khác nhau trong lý thuyết tối ưu hóa, bao gồm cả các bài toán tìm đường ngắn nhất trong lý thuyết đồ thị. Trong nghiên cứu của mình, ông ấy đã xét cấu trúc sau: Giả sử $\mathbb{R}_{\max} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ và định nghĩa phép toán cộng $\oplus$ và nhân $\otimes$ như sau: $a \oplus b = \max\{a,b\}, a \otimes b = a + b$ (trong đó phép toán + là phép cộng thông thường trên tập số thực), và $-\infty \oplus b = -\infty$ với mọi $b \in \mathbb{R}_{\max}$. Khi đó, $(\mathbb{R}_{\max}, \oplus, \otimes)$ được gọi là nửa vành **max-plus,** và cũng được biết như đại số lịch trình. Nửa vành này chính xác là một nửa trường, và một số lượng lớn đại số tuyến tính mang sang các không gian vec tơ và các ma trận trên nửa trường. Đối ngẫu của nửa vành max-plus là đại số tối ưu hóa $(\mathbb{R}_{\min}, \oplus, \otimes)$, ở đó $\mathbb{R}_{\min} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ và định nghĩa phép toán cộng $\oplus$ và nhân $\otimes$ như sau: $a \oplus b = \min\{a,b\}, a \otimes b = a + b$. Đây cũng là một nửa trường mà đã được ứng dụng cho các bài toán tối ưu hóa trên các đồ thị bởi Gondran và Minoux và đến nay trở thành công cụ chuẩn mực trong tối ưu hóa.Kế đó, dựa trên cấu trúc này toàn bộ lý thuyết xác suất mới được gọi là *giải tích lũy đẳng* đã được phát triển bởi Maslov và đồng nghiệp của ông. Lý thuyết này có những áp dụng thú vị trong vật lý lượng tử, và do vậy được chú ý nhiều trong tính toán lượng tử. Vào năm 1993, Barvinok đã đạt được tiếp cận mới cho tối ưu hóa tổ hợp , bằng cách xét bài toán tổng quan của tối ưu hóa tổ hợp như sau. Lấy một số nguyên *n* và tập *S* chứa các phần tử của $\mathbb{N}^n \subset \mathbb{R}^n$ và vec tơ $v=[a_1,....,a_n]^T \in \mathbb{R}^n$, ta muốn tìm $t_v = \min\left\{v.y \mid y \in S\right\}$, trong đó phép toán (.) là tích thông thường trên $\mathbb{R}^n$.Ví dụ như, khi xét những bài toán như *bài toán người bán hàng rong* nổi tiếng, *n* thể hiện số cạnh trong đồ thị đã cho , *S* là tập hợp các đường đi có thể có (ở đây $c=[c_1,....,c_n]^T \in S$ nghĩa là tồn tại một đường đi trong đó, cho mỗi $1 \le i \le n,$ cạnh thứ *i* xuất hiện c_i lần), và $v=[a_1,....,a_n]^T \in \mathbb{R}^n$ trong đó a_i là giá phải trả để đi hết cạnh *i*. Barinok chú thích rằng nếu ta xét việc tính toán này trong đại số tối ưu hóa $\mathbb{R}_{\min}$, khi đó ta thấy $t_v = p(a_1,....,a_n)$, trong đó $p(\mathrm{X}_1,....,\mathrm{X}_n) = \sum\left\{X_1^{c_1} \otimes ......\otimes X_n^{c_n} \mid c \in S\right\}$. Nói cách khác, bài toán tối ưu hóa đã được rút gọn về tính toán một đa thức nhiều biến trên một nửa trường.

2.3.2. Một số nửa vành zerosumfree thường gặp

Ví dụ 2.3.1. Nếu $1 < n \in \mathbb{N}$ khi đó $\left\{k \in \mathbb{N} \mid k \ge n\right\} \cup \left\{0\right\}$ là một iđêan của $\mathbb{N}$ và họ tất cả các iđêan như thế bị đóng dưới phép toán hợp và giao. Tất cả các phần tử của iđêan($\mathbb{N}$) không nhất thiết là *chính(principal)* nhưng với mỗi $I \in idean(\mathbb{N})$ thì tồn tại một tập con hữu hạn *A* của $\mathbb{N}$ sao cho *I+A* là một iđêan chính của $\mathbb{N}$.

Ví dụ 2.3.2. Định nghĩa phép toán $\oplus$ và $\otimes$ trên $\mathbb{N}$ như sau:

$a \oplus b = \max\{a, b\}$ nếu $a \le 6$ hoặc $b \le 6$ và $a+b$ trong các trường hợp còn lại,

$a \otimes b = \min\{a, b\}$ nếu $a \le 6$ hoặc $b \le 6$ và ab trong các trường hợp còn lại.

Lúc đó $(\mathbb{N}, \oplus, \odot)$ là một nửa vành giao hoán có những iđêan *subtractive*.

$$I = \{k \in \mathbb{N} \mid 0 \le k \le 6 \text{ hoặc } k = 2t + 8, t \in \mathbb{N}\},$$

$$J = \{k \in \mathbb{N} \mid 0 \le k \le 6 \text{ hoặc } k = 3t + 9, t \in \mathbb{N}\}.$$

Ví dụ 2.3.3. $\mathbb{N}$ - nửa môđun chính là một vị nhóm cộng giao hoán. Ta có thể xét ví dụ sau: $M = \mathbb{Z} \setminus \mathrm{P}$ trong đó P là tập các số nguyên dương là một $\mathbb{N}$ - nửa môđun.

Nếu *(M,+)* là một nửa nhóm giao hoán lũy đẳng, khi đó M là một $\mathbb{N}$ - nửa môđun trái với phép nhân vô hướng định nghĩa bởi:

$$\mathbb{N} \times M \longrightarrow M$$

$$(0, m) \mapsto 0_M = 0.m$$

$$(i, m) \mapsto m = i.m(\forall i(\ne 0) \in \mathbb{N})$$

Ví dụ 2.3.4. Xét $f : M \longrightarrow N$ là một A-đồng cấu trái. Nếu f là một toàn ánh khi đó nó là một A- toàn cấu. Nhưng điều ngược lại không đúng.

Ví dụ 2.3.5. Lấy $S = \left[\mathbb{R}^{+} \times \{0\}\right] \cup \left[\{0\} \times \mathbb{R}^{+}\right]$ và định nghĩa trên *S* phép toán như sau:

$$(a,0) \oplus (a',0) = (a+a',0);$$
$$(0,b) \oplus (0,b') = (0,b+b');$$
$$(a,0) \oplus (0,b) = (0,a+b) = (0,b) \oplus (a,0)$$

Và phép toán nhân

$$(a,0) \odot (a',0) = (aa',0);$$
$$(a,0) \odot (0,b) = (0,ab);$$
$$(0,b) \odot (0,b') = (0,bb');$$
$$(0,b) \odot (a,0) = (ba,0).$$

Khi đó $(S,\oplus,\odot)$ là một nửa vành có quan hệ Dorroh $R = S \times \mathbb{N}$, hơn nữa, $I = \{0\} \times \mathbb{R}^{+}$ là một iđêan trái của *S* và $J = I \times \{0\}$ là một iđêan trái khác không của *R*.

Ví dụ 2.3.6. Trong phạm trù của *R*- môđun, ta biết rằng nếu $f : A \to B$ là một *R*-đồng cấu khi đó *f* là đơn ánh khi *Kerf={0}*. Nhưng trong phạm trù của *A*- nửa môđun kết quả trên không còn đúng. Ví dụ sau sẽ chứng tỏ điều này:

Lấy **IB** là nửa vành có đơn vị Boolean, định nghĩa một $\mathbb{N}$ - nửa môđun **IB** như sau:

$$\mathbb{N} \times IB \longrightarrow IB$$
$$(0,x) \mapsto 0.x = 0$$

$$(n,x)\mapsto nx=1(n\neq 0)$$

Định nghĩa một toàn ánh

$$f:\mathbb{N}\longrightarrow IB$$

$$0\mapsto 0$$

$$(0\neq)n\mapsto 1$$

Khi đó f là một $\mathbb{N}$ - đồng cấu có *Kerf={0}* nhưng nó không đơn cấu.

KẾT LUẬN

Trong luận văn này, dựa vào các tài liệu tham khảo, tôi đã tìm hiểu, tổng hợp và từ đó trình bày lại các vấn đề như sau:

Trong chương I, tôi đã trình bày lại một số kiến thức cơ sở trong lý thuyết nửa vành và nửa môđun để chuẩn bị cho nội dung nghiên cứu của chương sau.

Ở chương II, dựa trên các tài liệu tham khảo, chủ yếu là [3], [4], [12], tôi đã tập trung làm rõ các nội dung chính của luận văn, cụ thể như sau:

1. Giới thiệu khái niệm nửa vành zerosumfree và một số ví dụ minh họa. Nêu và chứng minh chi tiết một số tính chất của nó (MĐ 2.1.1, 2.1.2, NX 2.1.3) đặc biệt là MĐ 2.1.3 nêu lên một nửa vành zerosumfree nguyên, thỏa mãn luật giản ước thì chỉ có một nửa môđun nội xạ là *{0}*.

2. Đề cập đến tính chất *trừ* của một nửa vành zerosumfree (MĐ 2.2.1, MĐ 2.2.2, NX 2.2.3) và cũng trình bày thêm định nghĩa một *V*- nửa vành phải, nêu lên mối quan hệ giữa nửa vành zerosumfree và nửa vành zeroic, xét các lớp nửa vành mà nửa môđun trên nó có bao nội xạ. Từ đó đưa ra khẳng định nếu mỗi nửa vành zerosumfree *S* thỏa mãn tính chất: *" Mọi mở rộng cốt yếu của mỗi S- nửa môđun phải đơn M đều trùng với M"* thì *S* là một *V*- nửa vành phải và vành sai phân tương ứng của nó là vành không. Mặt khác, nếu nửa vành nào đó thỏa mãn một tính chất nhưng không phải là vành thì có thể

chuyển thành một nửa vành zerosumfree khác 0 vẫn mang tính chất đó (MĐ 2.2.10, MĐ 2.2.11).

3. Trình bày một số ứng dụng thực tế của nửa vành, ngoài ra nêu thêm một số ví dụ về nửa vành liên quan đến nửa vành zerosumfree thường gặp như tập số tự nhiên, tập các số thực không âm.