BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

LÊ THỊ THANH LAM

BẤT ĐẲNG THỨC VÀ BÀI TOÁN CỰC TRỊ TRONG LỚP ĐA THỨC LƯỢNG GIÁC

Chuyên ngành : Phương pháp toán sơ cấp
Mã số: 60.46.40

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Đà Nẵng - Năm 2013

Công trình được hoàn thành tại

ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

Người hướng dẫn khoa học: **GS.TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU**

Phản biện 1: TS. Nguyễn Duy Thái Sơn

Phản biện 2: PGS. TS. Huỳnh Thế Phùng

Luận văn được bảo vệ tại Hội đồng chấm luận văn tốt nghiệp Thạc sĩ khoa học họp tại Đại học Đà Nẵng vào ngày 14 tháng 12 năm 2013.

** Có thể tìm hiểu luận văn tại:*

- Trung tâm Thông tin - Học liệu, Đại học Đà Nẵng
- Thư viện trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Bất đẳng thức là một trong những vấn đề cổ điển nhất của toán học, cũng là phần toán sơ cấp đẹp và thú vị nhất. Các bài toán về bất đẳng thức rất đa dạng về đề tài, phong phú về chủng loại và phù hợp với nhiều đối tượng thuộc các cấp học khác nhau.

Các bài toán về bất đẳng thức lượng giác trong toán sơ cấp là khó và rất khó, nhưng có thể giải chúng bằng phương pháp sơ cấp, không vượt quá giới hạn của chương trình toán học phổ thông. Trong các kì thi chọn học sinh giỏi thì các bài toán liên quan đến phép tính lượng giác thường ẩn dưới dạng công cụ giải toán. Nhiều bài toán liên quan đến ước lượng và tính toán các tổng, tích cũng như các bài toán cực trị thường có mối quan hệ ít nhiều đến các đặc trưng lượng giác. Do đó, các bài toán về bất đẳng thức lượng giác luôn đem lại sự hấp dẫn đối với nhiều đối tượng học sinh và giáo viên khi nghiên cứu vấn đề này.

Luận văn "*Bất đẳng thức và bài toán cực trị trong lớp đa thức lượng giác*" đề cập đến một số dạng bất đẳng thức lượng giác mà biểu thức thường là một đa thức lượng giác. Trên cơ sở đó, nội dung chính của luận văn trình bày phần lí thuyết cũng như các bài tập liên quan đến bất đẳng thức lượng giác, bài toán cực trị trong lớp đa thức lượng giác, từ đó khai thác thêm các ứng dụng trong đại số và giải tích như lượng giác hóa một số bài toán đại số, ước lượng đa thức, xấp xỉ đa thức, ...

2. Mục đích nghiên cứu

Nhằm hệ thống tổng quan các bài toán về bất đẳng thức lượng giác cơ bản, bất đẳng thức liên quan đến đa thức lượng giác.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Đối tượng khảo sát của đề tài luận văn là các bài toán về bất đẳng thức trong lớp các đa thức lượng giác và hệ thống các kiến thức liên quan.

Nghiên cứu từ các tài liệu, giáo trình của GS.TSKH. Nguyễn Văn Mậu, các sách chuyên đề về bất đẳng thức, đa thức, lượng giác, ...

4. Phương pháp nghiên cứu

Nghiên cứu trực tiếp từ các tài liệu của thầy hướng dẫn, tham khảo ý kiến của các đồng nghiệp nơi công tác cũng như các bạn học viên trong lớp.

Tổng hợp các tài liệu liên quan, nắm vững cốt lõi của nội dung kiến thức, từ đó sắp xếp, trình bày hệ thống và khai thác các ứng dụng theo đề tài đã chọn.

5. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài

Tạo được một đề tài phù hợp cho việc giảng dạy, bồi dưỡng học sinh trung học phổ thông.

Đề tài đóng góp thiết thực cho việc nâng cao chất lượng dạy học từ các chuyên đề toán trong trường THPT, đem lại niềm say mê sáng tạo từ những bài toán cơ bản nhất.

6. Cấu trúc của luận văn

Luận văn gồm phần mở đầu, 3 chương, phần kết luận và danh mục tài liệu tham khảo.

Mở đầu

Chương 1. Một số tính chất của hàm số lượng giác và đa thức lượng giác

Chương 2. Các bất đẳng thức liên quan đến đa thức lượng giác

CHƯƠNG 1
MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ ĐA THỨC LƯỢNG GIÁC

1.1 TÍNH CHẤT CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

1.1.1 Tính chẵn lẻ của hàm số

Xét hàm số $f(x)$ với tập xác định $D(f) \subset \mathbb{R}$ và tập giá trị $R(f) \subset \mathbb{R}$.

Định nghĩa 1.1. Hàm số $f(x)$ với tập xác định $D(f) \subset \mathbb{R}$ được gọi là hàm số chẵn trên M, $M \subset D(f)$ nếu

$$\forall x \in M \Rightarrow -x \in M \text{ và } f(-x) = f(x), \forall x \in M.$$

$f(x)$ được gọi là hàm số lẻ trên M, $M \subset D(f)$ nếu

$$\forall x \in M \Rightarrow -x \in M \text{ và } f(-x) = -f(x), \forall x \in M.$$

Nhận xét 1.1.
Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn.
Các hàm số $y = \sin x, y = \tan x, y = \cot x$ là những hàm số lẻ trên tập xác định của chúng.

1.1.2 Tính tuần hoàn và phản tuần hoàn của hàm số

Định nghĩa 1.2.
a) Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm tuần hoàn (cộng tính) chu kì a $(a > 0)$ trên M nếu $M \subset D(f)$ và

$$\begin{cases} \forall x \in M \Rightarrow x \pm a \in M \\ f(x+a) = f(x), \ \ \forall x \in M \end{cases}$$

b) Cho $f(x)$ là một hàm số tuần hoàn trên M. Khi đó $T (T > 0)$ được gọi là chu kì cơ sở của $f(x)$ nếu $f(x)$ tuần hoàn với chu kì T mà không tuần hoàn với bất cứ chu kì nào bé hơn T.

Nhận xét 1.2.
Hàm số $y = \cos x$, hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kì $T = 2\pi$.
Hàm số $y = \tan x$, hàm số $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kì $T = \pi$.

Bài toán 1.1. Cho cặp hàm số $f(x), g(x)$ tuần hoàn trên M có các chu kì lần lượt là a và b, với $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Chứng minh rằng $F(x) := f(x) + g(x)$ và $G(x) := f(x).g(x)$ cũng là những hàm tuần hoàn trên M.

Định nghĩa 1.3.
a) Hàm số $f(x)$ được gọi là phản tuần hoàn (cộng tính) chu kì b $(b > 0)$ trên M nếu $M \subset D(f)$ và

$$\begin{cases} \forall x \in M \Rightarrow x \pm b \in M \\ f(x+b) = -f(x), \ \ \forall x \in M \end{cases}$$

b) Nếu $f(x)$ là một hàm số phản tuần hoàn chu kì b_0 trên M mà không là hàm phản tuần hoàn với bất kì chu kì nào bé hơn b_0 trên M thì b_0 được gọi là chu kì cơ sở của hàm phản tuần hoàn $f(x)$ trên M.

Bài toán 1.2. Chứng minh rằng mọi hàm phản tuần hoàn trên M cũng là hàm tuần hoàn trên M.

Định nghĩa 1.4.
Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm tuần hoàn (nhân tính) chu kì a $(a \notin \{-1, 0, 1\})$ trên M nếu $M \subset D(f)$ và

$$\begin{cases} \forall x \in M \Rightarrow a^{\pm 1}x \in M \\ f(ax) = f(x), \forall x \in M \end{cases}$$

Ví dụ 1.1.
Xét $f(x) = \sin(2\pi \log_2 x)$. Khi đó $f(x)$ là hàm tuần hoàn nhân tính chu kì 2 trên $\mathbb{R}^+$

Thật vậy, ta có: Với mọi $x \in \mathbb{R}^+$ thì $2^{\pm 1} \in \mathbb{R}^+$ và

$$\begin{aligned} f(2x) &= \sin[2\pi \log_2(2x)] \\ &= \sin[2\pi(1 + log_2 x)] \\ &= \sin(2\pi + 2\pi \log_2 x) \\ &= \sin(2\pi \log_2 x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

Định nghĩa 1.5.
Hàm số $f(x)$ được gọi là phản tuần hoàn (nhân tính) chu kì a ($a \notin \{-1, 0, 1\}$) trên M nếu $M \subset D(f)$ và

$$\begin{cases} \forall x \in M \Rightarrow a^{\pm 1}x \in M \\ f(ax) = -f(x), \forall x \in M \end{cases}$$

Bài toán 1.3. Chứng minh rằng mọi hàm số phản tuần hoàn nhân tính trên M cũng là hàm tuần hoàn nhân tính trên M

1.2 TÍNH CHẤT CỦA ĐA THỨC LƯỢNG GIÁC

1.2.1 Định nghĩa đa thức lượng giác

Định nghĩa 1.6.
Biểu thức

$$L_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{1.1}$$

trong đó

$$a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R}(k \in \{1, 2, \ldots, n\}; |a_n| + |b_n| \neq 0(n \in \mathbb{N}^*)$$

được gọi là đa thức lượng giác bậc n (cấp n) với các hệ số a_0, a_k, b_k

Định nghĩa 1.7.
Nếu trong đa thức (1.1) tất cả các hệ số $b_k (k \in \{1, 2, \ldots, n\})$ đều bằng 0 thì ta có đa thức lượng giác cấp n thuần cos:

$$C_n(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots + a_n \cos nx, (a_n \neq 0) \tag{1.2}$$

Nếu trong đa thức (1.1) tất cả các hệ số $a_k(k \in \{1, 2, \ldots, n\})$ đều bằng 0 thì ta có đa thức lượng giác cấp n thuần sin:

$$S_n(x) = a_0 + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \ldots + b_n \sin nx, (b_n \neq 0) \quad (1.3)$$

1.2.2 Một số tính chất

Sau đây ta liệt kê một số tính chất đơn giản của đa thức lượng giác.

Tính chất 1.1. Cho $L_m(x)$ và $L_n(x)$ là hai đa thức lượng giác. Khi đó:
a) $L_m(x)+L_n(x)$ là đa thức lượng giác bậc k, với $k \leq max\{m, n\}$
b) $L_m(x).L_n(x)$ là đa thức lượng giác bậc $m + n$

Tính chất 1.2. Đa thức lượng giác $L_n(x)$ với $a_0 = 0$ luôn có ít nhất một nghiệm.

Tính chất 1.3. Với mọi đa thức lượng giác $L_n(x)$ dạng (1.1) luôn luôn tìm được các đa thức đại số $P_n(t)$ và $Q_{n-1}(t)$ lần lượt có bậc không quá n và $n - 1$ đối với t sao cho

$$L_n(x) = P_n(\cos x) + \sin x Q_{n-1}(\cos x).$$

Chứng minh. Ta có công thức Moivre

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx, n \in \mathbb{N}$$

Khai triển công thức trên rồi đồng nhất phần thực và phần ảo của hai vế ta được các công thức:

$$C_n^0 \cos^n x - C_n^2 \cos^{n-2} x \sin^2 x + C_n^4 \cos^{n-4} \sin^4 x - \ldots = \cos nx$$

$$C_n^1 \cos^{n-1} x \sin x - C_n^3 \cos^{n-3} x \sin^3 x + C_n^5 \cos^{n-5} \sin^5 x - \ldots = \sin nx$$

Như vậy, từ các công thức trên ta nhận được các kết quả sau:
$\exists q_{k-1}(t)$ sao cho $\sin kx = \sin x q_{k-1}(\cos x)$, trong đó $q_{k-1}(t)$ là đa thức đại số bậc $k - 1$, với $k \geq 1, k \in \mathbb{N}$
Do đó

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k \sin kx) = \sin x Q_{n-1}(\cos x)$$

với

$$Q_{n-1}(\cos x) = \sum_{k=1}^{n} q_{k-1}(\cos x)$$

và

$$\cos kx = p_k(\cos x)$$

trong đó $p_k(t)$ là đa thức đại số bậc k, với $k \geq 1, k \in \mathbb{N}$
Suy ra

$$a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx) = P_n(\cos x)$$

với

$$P_n(\cos x) = \sum_{k=1}^{n} p_k(\cos x)$$

Vậy tính chất (1.3) đã được chứng minh.

Từ chứng minh này, ta cũng suy ra được các kết quả sau:

Tính chất 1.4. Với mọi đa thức lượng giác $S_n(x)$ dạng (1.3) luôn luôn tồn tại đa thức đại số $Q_{n-1}(t)$ để

$$S_n(x) = b_0 + \sin x Q_{n-1}(\cos x)$$

Tính chất 1.5. Với mọi đa thức lượng giác $C_n(x)$ dạng (1.2) luôn luôn tồn tại đa thức đại số $P_n(t)$ để

$$C_n(x) = P_n(\cos x)$$

trong đó $P_n(t)$ là đa thức bậc n đối với t và có hệ số bậc cao nhất là $a_n.2^{n-1}$. Ngược lại, với mọi đa thức $P_n(t)$ với hệ số bậc cao nhất bằng 1 thì từ phép đặt ẩn phụ $t = \cos x$ ta đều biến đổi về được đa thức C_n dạng (2.2) với $a_n = 2^{1-n}$

Bài toán 1.4. Viết công thức biểu diễn của $\cos nx$ và $\sin nx$ theo các lũy thừa của $\cos x$ và $\sin x$.

Bài toán 1.5. Biểu diễn các hàm số $\sin^n x$ và $\cos^n x$ dưới dạng các đa thức lượng giác

Bài toán 1.6. Cho $k, n \in \mathbb{Z}^+$ và r là số dương. Tính

1. $C_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} r^k \cos kx$

2. $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} r^k \sin kx$

Bài toán 1.7. Chứng minh rằng

1. $\sum\limits_{k=0}^{n} \sin(\alpha + kx) = \dfrac{\sin \dfrac{(n+1)x}{2} \sin(\alpha + \dfrac{nx}{2})}{\sin \dfrac{\alpha}{2}}$

2. $\sum\limits_{k=0}^{n} \cos(\alpha + kx) = \dfrac{\sin \dfrac{(n+1)x}{2} \cos(\alpha + \dfrac{nx}{2})}{\sin \dfrac{\alpha}{2}}$

Bài toán 1.8. Cho α thỏa mãn $n\alpha = 2\pi$ với $n > k, n, k \in \mathbb{Z}$ và

$$f(x) = a_0 + \sum_{j=1}^{k} (a_j \cos jx + b_j \sin jx). \tag{1.4}$$

Chứng minh rằng

$$f(x+\alpha) + f(x+2\alpha) + \ldots + f(x+n\alpha) = na_0. \tag{1.5}$$

Bổ đề 1.1. Nếu (1.5) đúng với các hàm số $f_1(x)$ và $f_2(x)$ ($f_1(x)$ và $f_2(x)$ có dạng (1.4)) thì (1.5) cũng đúng với các hàm số $f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$ ($f(x)$ cũng có dạng (1.4)).

Bổ đề 1.2. Với a là góc tùy ý, β là góc không chia hết cho 2π nhưng $n\beta$ chia hết cho 2π thì

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(a + k\beta) = 0; \sum_{k=1}^{n} \sin(a + k\beta) = 0$$

Bài toán 1.9. Cho

$$C_n(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots + a_n \cos nx (a \neq 0)$$

Chứng minh rằng

$$C_n(0) - C_n\Big(\frac{\pi}{n}\Big) + C_n\Big(\frac{2\pi}{n}\Big) - C_n\Big(\frac{3\pi}{n}\Big) + \ldots - C_n\Big(\frac{(2n-1)\pi}{n}\Big) = 2na_n.$$

Hệ quả 1.1.

$$|C_n(0)| + \Big|C_n(\frac{\pi}{n})\Big| + \Big|C_n(\frac{2\pi}{n})\Big| + \ldots + \Big|C_n(\frac{(2n-1)\pi}{n})\Big| \geq 2n|a_n|$$

Từ đó dễ thấy tồn tại k để $\Big|C_n(k\frac{\pi}{n})\Big| \geq |a_n|$.

Hệ quả 1.2. Độ lệch so với 0 của đa thức lượng giác $C_n(x)$ không nhỏ hơn $|a_n|$.

Hệ quả 1.3. Độ lệch so với 0 của đa thức quy chuẩn $P_n(x)$ trên đoạn $[-1; 1]$ không nhỏ hơn 2^{1-n}

Hệ quả 1.4. Đa thức quy chuẩn có độ lệch nhỏ nhất trên đoạn $[-1; 1]$ có dạng

$$P_n(\cos\alpha) = 2^{1-n} \cos n\alpha$$

hay là

$$P_n(x) = 2^{1-n} \cos(n \arccos x)$$

và độ lệch nhỏ nhất đó là 2^{1-n}

1.2.3 Đa thức Chebyshev

Định nghĩa 1.8. Các đa thức $T_n(x), n \in \mathbb{N}$ được xác định như sau:

$$\begin{cases} T_0(x) = 1; T_1(x) = x, \\ T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \forall n > 1, \end{cases}$$

được gọi là đa thức Chebyshev (loại 1)

Định nghĩa 1.9. Các đa thức $U_n(x), n \in \mathbb{N}$ được xác định như sau:

$$\begin{cases} U_0(x) = 0; U_1(x) = 1, \\ U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x), \forall n > 1, \end{cases}$$

được gọi là đa thức Chebyshev (loại 2).

- **Tính chất của đa thức** $T_n(x)$.

Tính chất 1.6. $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ với mọi $x \in [-1; 1]$

Tính chất 1.7. $T_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$ bậc n có hệ số cao nhất bằng 2^{n-1} và là hàm chẵn khi n chẵn, là hàm lẻ khi n lẻ.

Tính chất 1.8. $T_n(x)$ có đúng n nghiệm trên đoạn $[-1; 1]$ là

$$x_k = \cos \frac{2k+1}{2n}\pi, (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

Tính chất 1.9. $T_n(x) \leq 1, \forall x \in [-1; 1]$ và $T_n(x) = 1$ khi $x = \cos \frac{k\pi}{n}$,
$k \in \mathbb{Z}$

Tính chất 1.10. Đa thức $T^*(x) = 2^{1-n}T_n(x)$ là đa thức bậc n với hệ số bậc cao nhất bằng 1 và có độ lệch so với 0 trên [-1;1] là nhỏ nhất trong tất cả các đa thức bậc n với hệ số bậc cao nhất bằng 1.

- **Tính chất của đa thức** $U_n(x)$.

Tính chất 1.11.

$$U_n(x) = \frac{\sin(n \arccos x)}{\sqrt{1 - x^2}}$$

với mọi $x \in (-1; 1)$

Tính chất 1.12. $U_n(x) = \frac{1}{n}T'_n(x) = \frac{\sin nt}{\sin t}, \cos t = x$, đa thức bậc $n-1$ có hệ số bậc cao nhất bằng 2^{n-1} và là hàm chẵn khi n lẻ, là hàm lẻ khi n chẵn.

Tính chất 1.13. $|U_n(x)| \leq n, \forall x \in [-1;1]$ và $|T'_n(x)| \leq n^2, \forall x \in [-1;1]$.
Xét các hàm số

$$shx = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), chx = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

Khi đó với $|x| > 1$ thì

$$T_n(x) = ch(nt), U_n(x) = \frac{sh(nt)}{sht}$$

trong đó $x = cht$

Bài toán 1.10. Chứng minh rằng

$$U_n(x) = xU_{n-1}(x) + T_{n-1}(x), \forall x \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 1.11. Chứng minh rằng với $m, n \in \mathbb{N}; n \geq m$ và $x \in \mathbb{R}$ thì

$$T_{n+m}(x) + T_{n-m}(x) = 2T_n(x)T_m(x).$$

Bài toán 1.12. Chứng minh rằng

$$T_m(T_n(x)) = T_{mn}(x), \forall x \in \mathbb{R}; m, n \in \mathbb{N}$$

CHƯƠNG 2
BẤT ĐẲNG THỨC TRONG LỚP ĐA THỨC LƯỢNG GIÁC

2.1 MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC ĐẠI SỐ CƠ BẢN

Định lý 2.1 (Bất đẳng thức AM - GM)**.** Giả sử $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các số không âm. Khi đó

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots + x_n} \tag{2.1}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$

Định lý 2.2 (Jensen)**.** Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên $I(a, b)$, trong đó $I(a, b)$ được ngầm hiểu là một trong số các tập $[a, b], [a, b)$, $(a, b], (a, b)$. Khi đó điều kiện cần và đủ để hàm số $f(x)$ lồi trên $I(a, b)$ là

$$f(\frac{x_1 + x_2}{2}) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}, \forall x_1, x_2 \in I(a, b) \tag{2.2}$$

Định lý 2.3 (Bất đẳng thức Chebyshev)**.** Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm đơn điệu tăng và (x_k) là một dãy đơn điệu tăng:

$$x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n.$$

Khi đó mọi bộ trọng (p_j):

$$p_j \geq 0, j = 1, 2, \ldots, n; p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1,$$

ta đều có

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k)\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} p_k g(x_k)\Big) \leq \Big(\sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k) g(x_k)\Big) \tag{2.3}$$

2.2 MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC CỦA CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

Trong phần này đề cập đến một số bất đẳng thức liên quan đến hàm số lượng giác. Các phương pháp giải thường là đạo hàm hàm số, sử dụng các bất đẳng thức cơ bản, biến đổi lượng giác. Ta xét một số ví dụ sau

Ví dụ 2.1. Chứng minh rằng với mọi $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, ta đều có

$$\frac{2}{\pi} \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1.$$

Ví dụ 2.2. Chứng minh rằng với mọi $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, ta đều có

$$\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Ví dụ 2.3. Cho $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 > \cos x.$$

Ví dụ 2.4. Chứng minh rằng

$$2^{|\sin x|} + 2^{|\cos x|} \geq 3, \forall x \in \mathbb{R}$$

Ví dụ 2.5. Xác định số dương a sao cho

$$a^{\cos 2x} \geq 2\cos^2 x, \forall x \in \mathbb{R}$$

Ví dụ 2.6. Cho a, b là hai số thực thỏa mãn

$$\cos a + \cos b + \cos a \cos b \geq 0$$

Chứng minh rằng $\cos a + \cos b \geq 0$

Ví dụ 2.7. Với n là một số tự nhiên và $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2(n+1)}\right)$ .Chứng minh rằng

$$(1-\cos^n x)(1+\cos^n x) < \tan nx \sin x$$

Ví dụ 2.8. Chứng minh rằng

$$(n+1)\cos\frac{\pi}{n+1} - n\cos\frac{\pi}{n} > 1, \text{với mọi } n \geq 2$$

2.3 MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC LIÊN QUAN ĐẾN ĐA THỨC LƯỢNG GIÁC

Tương tự như phần 2.2, trong phần này ta xét các bất đẳng thức mà hàm số lượng giác là một đa thức lượng giác.

Ví dụ 2.9. Chứng minh rằng tập giá trị của mọi đa thức lượng giác bậc n ($n \geq 1$), không chứa số hạng tự do (tức là $a_0 = 0$)

$$A_n(x) = a_1\cos x + b_1\sin x + \ldots + a_n\cos nx + b_n\sin nx \text{ với } a_n^2 + b_n^2 > 0$$

chứa cả giá trị dương và giá trị âm

Hệ quả 2.1. Tập giá trị của mọi đa thức lượng giác bậc n (n $\geq$ 1) dạng

$$A_n(x) = a_0 + a_1\cos x + b_1\sin x + \ldots + a_n\cos nx + b_n\sin nx (a_n^2 + b_n^2 > 0)$$

chứa cả giá trị lớn hơn a_0 và nhỏ hơn a_0

Hệ quả 2.2. Mọi đa thức lượng giác bậc n (n $\geq$ 1), không chứa số hạng tự do

$$A_n(x) = a_1\cos x + b_1\sin x + \ldots + a_n\cos nx + b_n\sin nx$$

luôn có ít nhất một nghiệm thực.

Ví dụ 2.10. Cho đa thức

$$f_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k coskx + b_k sinkx)$$

trong đó các số thực $a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $f_n(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}, a_k^2 + b_k^2 = 1, (k \in \{1, 2, \ldots, n\})$
Chứng minh rằng

$$\frac{f_n(x) - n}{a_0} \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

Ví dụ 2.11. Cho đa thức lượng giác

$$f(x) = b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \ldots + b_n \sin nx$$

thỏa mãn điều kiện

$$|f(x)| \leq |\sin x|, \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}, b_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n$$

Chứng minh rằng

$$|b_1 + 2b_2 + 3b_3 + \ldots + nb_n| \leq 1$$

Ví dụ 2.12. Cho các số thực a, b, c, d. Chứng minh rằng nếu với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta đều có

$$a \cos x + b \sin x + c \cos 2x + d \sin 2x \leq \sqrt{c^2 + d^2}$$

thì $a = b = 0$

Ví dụ 2.13. Cho các số thực a, b, A, B. Xét đa thức lượng giác

$$f(x) = 1 - a \cos x - b \sin x - A \cos 2x - B \sin 2x$$

Chứng minh rằng nếu $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thì $a^2 + b^2 \leq 2$ và $A^2 + B^2 \leq 1$

Nhận xét 2.1. Ví dụ trên là trường hợp đặc biệt của định lí về đa thức lượng giác nhận giá trị không âm.
Nếu $f(x) = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thì $a_i^2 + b_i^2 \leq$ 2,
$\forall i = \overline{1, n-1}$ còn $a_n^2 + b_n^2 \leq 1$

Ví dụ 2.14. Cho đa thức lượng giác

$$f(x) = 1 + a\cos x + b\cos 2x + \cos 3x$$

Chứng minh rằng nếu $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thì $a = b = 0$

Ví dụ 2.15. Tồn tại hay không đa thức

$$P_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \in \mathbb{R}[x]$$

và thỏa mãn $|P_n(x)| \leq 2, \;\; \forall x \in [-2, 2]$.

CHƯƠNG 3
MỘT SỐ ÁP DỤNG TRONG ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH

3.1 CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Bài toán 3.1. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$$

biết rằng $x \in (0; \frac{\pi}{2})$

Bài toán 3.2. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \sqrt{\sin x} + \sqrt[3]{\cos x} \text{ với mọi } x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

Bài toán 3.3. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = 3\sin^2 x + 4\sin x\cos x - 5\cos^2 x + 2$$

Bài toán 3.4. Xét tất cả các dãy số

$$0 = x_0 \leq x_1 < \ldots < x_{1999} = 2\pi.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M = \sum_{i=0}^{1998} |\cos(x_i) - \cos(x_{i+1})|$$

Bài toán 3.5. Cho hàm số $f(x) = \sin x$. Xét tất cả các dãy số (x_i) sao cho $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_9 = 10\pi$. Xác định giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M = \sum_{i=0}^{8} |f(x_i) - f(x_{i+1})|$$

Bài toán 3.6. Cho hàm số $f(x) = \sin 2x + \cos 2x$. Xét tất cả các dãy số

$$0 = x_0 \leq x_1 < \ldots < x_{10} \leq 2\pi.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M = \sum_{i=0}^{9} |f(x_i) - f(x_{i+1})|$$

- **Lượng giác hóa bài toán đại số**

Khi giải các bài toán với hàm nhiều ẩn ở dạng " *Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số* $u = f(x, y)$ *biết* $x^2+y^2 = 1$", ta có thể chuyển về bài toán lượng giác thì cách giải sẽ đơn giản và dễ dàng hơn. Quá trình đó được gọi là "lượng giác hóa" bài toán. Lúc đó ta lựa chọn việc đặt $x = \cos t, y = \sin t, t \in [0, 2\pi)$. Sau đây là một số ví dụ

Ví dụ 3.1. Cho $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$A = x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x}.$$

Ví dụ 3.2. Trong các nghiệm (x, y) của bất phương trình

$$x^2 + y^2(x + y) \geq 1.$$

Hãy tìm các nghiệm sao cho $(x + y)$ đạt giá trị lớn nhất.

Ví dụ 3.3. (Đề tuyển sinh ĐH, CĐ khối B, năm 2008). Cho x, y là hai số thực thỏa mãn $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{2(x^2 + 6xy)}{1 + 2xy + 2y^2}$$

Ví dụ 3.4. (Đại học ngoại thương Hà Nội 1995) Cho $x, y > 0$ với $x + y \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$E = \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{xy} + 4xy$$

Ví dụ 3.5. Tìm a, b để hàm số

$$y = \frac{ax+b}{x^2+1}$$

nhận giá trị lớn nhất bằng 4 và giá trị nhỏ nhất bằng - 1

3.2 CỰC TRỊ TRONG LỚP ĐA THỨC LƯỢNG GIÁC

Bài toán 3.7. Cho các số thực a, b. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

$$y = a\sin x + b\cos x$$

Bài toán 3.8. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = 1 + \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos 3x$$

Bài toán 3.9. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = -\cos 3x + 2\cos 2x + \cos x$$

Bài toán 3.10. (Định lí Fejér)
Chứng minh rằng với mọi $x \in [0; \pi]$ và với mọi số nguyên dương n ta đều có

$$\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \ldots + \frac{1}{n}\sin nx \geq 0$$

Bài toán 3.11. Chứng minh rằng với mọi $x \in \mathbb{R}$ và với mọi số tự nhiên n, ta có

$$1 + \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x + \ldots + \frac{1}{n}\cos nx \geq 0$$

Bài toán 3.12. Xét dãy số thực $\{x_n\}(n = 1, 2, \ldots, 2004)$ thỏa mãn điều kiện

$$\frac{\pi}{6} \leq x_1, x_2, \ldots, x_{2004} \leq \frac{\pi}{2}$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$y = (\sin x_1 + \sin x_2 + \ldots + \sin x_{2004})(\frac{1}{\sin x_1} + \frac{1}{\sin x_2} + \ldots + \frac{1}{\sin x_{2004}})$$

3.3 MỘT SỐ DẠNG TOÁN VỀ XẤP XỈ VÀ ƯỚC LƯỢNG ĐA THỨC

- **Ước lượng đa thức**

Bài toán ước lượng đa thức gồm nhiều dạng toán nhau như ước lượng miền giá trị của đa thức trên một tập cho trước, ước lượng các hệ số của đa thức, ước lượng các nghiệm của đa thức, ước lượng các giá trị của đạo hàm, ...Ta sẽ xét một số bài toán dạng này. Ngoài ra trong mục này ta sẽ đưa ra một cách chứng minh của định lí Berstein - Markov mô tả mối quan hệ giữa đa thức với đạo hàm của nó.

Bài toán 3.13. Cho đa thức $P_{n-1}(x)$ bậc $\leq n-1$ có hệ số cao nhất a_0, thỏa mãn điều kiện

$$\sqrt{1-x^2}|P_{n-1}(x) \leq 1, \forall x \in [-1;1]$$

Chứng minh rằng

$$|P_{n-1}(x)| \leq n, \forall x \in [-1;1]$$

Bài toán 3.14. Cho đa thức lượng giác

$$P(t) = a_1 \sin t + a_2 \sin 2t + \ldots + a_t \sin nt$$

thỏa mãn điều kiện

$$|P(t)| \leq 1, \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{\ldots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \ldots\}$$

Chứng minh rằng

$$\left|\frac{P(t)}{\sin t}\right| \leq 1, \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{\ldots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \ldots\}$$

Bài toán 3.15. Cho đa thức lượng giác

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n}(a_j \cos jx + b_j \sin jx)$$

thỏa mãn điều kiện $|P(x)| \leq 1$, với mọi $x \in \mathbb{R}$
Chứng minh rằng $|P'(x)| \leq n$, với mọi $x \in \mathbb{R}$

Bài toán 3.16. (Định lí Berstein - Markov).
Cho đa thức

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

thỏa mãn điều kiện $|P_n(x)| \leq 1, \forall x \in [-1; 1]$. Chứng minh rằng khi đó

$$|P'_n(x)| \leq n^2, \forall x \in [-1; 1]$$

Bài toán 3.17. (Đề thi Olympic Toán Sinh viên toàn quốc năm 1994)
Cho n số nguyên dương $a_k, b_k \in \mathbb{R}, (k = 0, 1, \ldots, n)$. Chứng minh rằng phương trình

$$x + \sum_{k=1}^{n}(a_k \sin kx + b_k \cos kx) = 0$$

có nghiệm trong khoảng $(-\pi, \pi)$

Bổ đề 3.1. (Định lí Roll) Cho $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ là một hàm số liên tục trên khoảng đóng $[a; b]$ và khả vi trên khoảng mở $(a; b)$ với $a < b$. Khi đó tồn tại một giá trị $c \in (a, b)$ sao cho

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

- **Xấp xỉ hàm số bởi đa thức**

Trong số các hàm số một biến thực thì đa thức được coi là hàm số đơn giản nhất về nhiều phương diện, nhất là về mặt tính toán. Một vấn đề được ta quan tâm hơn cả là bài toán xấp xỉ một hàm số cho trước bởi một đa thức, đặc biệt là tìm điều kiện (cần và đủ) để một hàm số cho trước có thể xấp xỉ được bởi một đa thức.

Ta xét một số bài toán sau

Bài toán 3.18. Cho $a, a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số thực. Tồn tại hay không tồn tại một đa thức

$$P_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

thỏa mãn điều kiện

$$|P_n(x)| \leq a, \forall x \in [-a; a]$$

Bài toán 3.19. Tìm đa thức $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, với $a_0 \neq 0$ thỏa mãn điều kiện

$$(1 - x^2)[P'(x)]^2 = n^2[1 - P^2(x)], \forall x \in \mathbb{R}$$

trong đó $P'(x)$ là đạo hàm của $P(x)$

Bài toán 3.20. Cho $c_j \in \mathbb{C}, j = 0, 1, \ldots, n, c_0 \neq 0, c_n \neq 0, z = e^{it}, t \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng nếu

$$h(z) = c_0 + c_1z + c_2z^2 + \ldots + c_nz^n$$

thì $|h(z)|^2$ là một đa thức lượng giác bậc n theo t.

Bài toán 3.21. Chứng minh rằng hàm số

$$f(x) = \sin^{2p} x \text{ (p là số tự nhiên)}$$

là một đa thức lượng giác theo *cosin*

KẾT LUẬN

Luận văn được trình bày theo hướng hệ thống hóa các kiến thức liên quan đến một số bất đẳng thức của các hàm số lượng giác cơ bản và đa thức lượng giác, trên cơ sở đó khai thác sâu hơn về một số bài toán cực trị trong lớp đa thức lượng giác và các áp dụng trong đại số và giải tích.

Trong chương một, tác giả trình bày một số kiến thức cơ sở về hàm số lượng giác và đa thức lượng giác có dạng

$$L_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k coskx + b_k sinkx)$$

trong đó

$$a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R}(k \in \{1, 2, \ldots, n\}; |a_n| + |b_n| \neq 0(n \in \mathbb{N}^*)$$

Trong chương hai, tác giả trình bày các kiến thức về một số bất đẳng thức cơ bản, bất đẳng thức của các hàm số lượng giác cơ bản, bất đẳng thức liên quan đến đa thức lượng giác.

Chương ba là chương quan trọng nhất, trình bày một số bài toán cực trị trong hàm số lượng giác, lượng giác hóa một số bài toán đại số, bài toán cực trị liên quan đến đa thức lượng giác và ứng dụng trong ước lượng đa thức, xấp xỉ đa thức.