BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

TRẦN THỊ SEN

CÁC Ý TƯỞNG GIẢI TÍCH HÀM GẮN KẾT HAI LĨNH VỰC "THỰC VÀ PHỨC" TRONG GIẢI TÍCH

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Đà Nẵng – Năm 2012

Công trình được hoàn thành tại

ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

Người hướng dẫn khoa học: TS. NGUYỄN DUY THÁI SƠN

Phản biện 1:

Phản biện 2:

Luận văn sẽ được bảo vệ tại Hội đồng chấm luận văn tốt nghiệp Thạc sĩ khoa học họp tại Đại học Đà Nẵng vào ngày 01-02 tháng 12 năm 2012.

* Có thể tìm hiểu luận văn tại:
- Trung tâm Thông tin – Học liệu, Đại học Đà Nẵng
- Thư viện trường Đại học Sư phạm , Đại học Đà Nẵng

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Ở hầu hết các trường đại học, giáo trình "Hàm biến phức" (có thể hiểu là "Giải tích phức") được sắp sau giáo trình "Giải tích thực" và thường tồn tại tương đối độc lập. Mở đầu cho quyển sách "Giải tích thực và phức" [1] của mình (xuất bản năm 1966), W. Rudin nhận xét: theo truyền thống, Giải tích thực dành nhiều thời lượng cho tích phân Lebesgue và các kiểu hội tụ khác nhau chủ yếu là trên các hàm *không liên tục*, trong khi Giải tích phức chỉ nghiên cứu các hàm *rất trơn* (đặc biệt là các hàm chỉnh hình). Trong luận văn này, chúng tôi cố gắng làm nổi bật mối quan hệ tương hỗ giữa hai lĩnh vực đó trong Giải tích, dựa trên các ý tưởng cơ bản của Giải tích hàm. Cụ thể hơn, qua luận văn này, ta sẽ thấy: Định lý biểu diễn Riesz và định lý Hahn-Banach cho phép "dự báo" công thức tích phân Poisson. Chúng gắn kết nhau trong phép chứng minh của định lý Runge, mà từ đó một phiên bản "đồng điều" của định lý Cauchy có thể được dẫn ra.

2. Mục đích và nhiệm vụ nghiên cứu

Tôi mong muốn tìm kiếm được nhiều tài liệu từ các nguồn khác nhau, nghiên cứu kỹ càng các tài liệu đó, cố gắng lĩnh hội đầy đủ các kiến thức về định lý biểu diễn Riesz và các độ đo Borel dương, định lý Hahn-Banach và một số kỹ thuật trên các không gian Banach để có thể trình bày lại các kiến thức đó trong luận văn này theo một thể khép kín.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

3.1 Đối tượng nghiên cứu: Giải tích thực và phức

3.2 Phạm vi nghiên cứu: Sự gắn kết giữa Giải tích thực và Giải tích phức qua các ý tưởng trong Giải tích hàm

4. Phương pháp nghiên cứu

Cơ bản sử dụng phương pháp nghiên cứu tài liệu (sách, báo và các tài liệu trên internet có liên quan đến đề tài của luận văn) để thu thập thông tin nhằm tìm hiểu định lý biểu diễn Riesz và các độ đo Borel dương, định lý Hahn-Banach và một số kỹ thuật trên các không gian Banach, nghiên cứu và vận dụng chúng trong việc làm nổi bật mối quan hệ tương hỗ giữa hai lĩnh vực Giải tích thực và Giải tích phức, phục vụ cho yêu cầu của đề tài.

5. Giả thuyết khoa học

Xây dựng một tập tài liệu có tính hệ thống, khép kín về một số vấn đề của các hàm chỉnh hình; qua đó, làm nổi bật mối quan hệ gắn bó giữa hai lĩnh vực Giải tích thực và Giải tích phức của Giải tích toán học

6. Cấu trúc luận văn

Dự kiến cấu trúc của luận văn gồm: Dự kiến cấu trúc của luận văn gồm 3 chương: Chương 1 trình bày một số vấn đề của Giải tích hàm. Chương 2 trình bày hàm chỉnh hình, hàm điều hoà. Chương 3 trình bày tính xấp xỉ bởi các hàm hữu tỉ.

Chương 1

MỘT SỐ VẤN ĐỀ CỦA GIẢI TÍCH HÀM

1.1. Không gian vectơ

1.1.1. Định nghĩa

1.1.2.Tích phân được xem như một hàm tuyến tính

1.1.3. Định nghĩa không gian Tôpô

1.1.4. Các định nghĩa

1.1.5. Định lý

Giả sử K là compact và F đóng, trong một không gian tôpô X. Nếu $F \subset K$, thì F là compact.

1.1.6. Định lý

1.1.7. Định lý

Nếu $\{K_\alpha\}$ là một họ các tập con compact của một không gian *Hausdorff* và nếu $\bigcap_\alpha K_\alpha = \varnothing$, thì tồn tại một họ con hữu hạn của $\{K_\alpha\}$ cũng có giao rỗng.

1.1.8. Định lý

Giả sử U mở trong một không gian Hausdorff compact địa phương X, $K \subset U$ và K là compact. Khi đó tồn tại một tập mở V có bao đóng compact mà $K \subset V \subset \overline{V} \subset U$.

1.1.9. Định nghĩa

1.1.10. Định nghĩa

Giá của một hàm phức f trên một không gian tôpô X là bao đóng của tập

$$\{x : f(x) \neq 0\}.$$

Họ tất cả các hàm phức liên tục trên X có giá compact sẽ được ký hiệu bởi $C_c(X)$.

1.1.11. Định lý

1.1.13. Bổ đề của Urysohn

1.1.14. Định lý

1.2. Định lý biểu diễn Riesz

Cho X là một không gian Hausdorff compact địa phương, và cho Λ là một phiếm hàm tuyến tính dương trên $C_c(X)$. Khi đó tồn tại một $\sigma-$đại số $\mathfrak{M}$ trong X chứa tất cả các tập Borel trong X, và tồn tại duy nhất một độ đo dương μ trên $\mathfrak{M}$ biểu diễn Λ theo nghĩa :

(a) $\quad \Lambda f = \int_X f d\mu$

với mỗi $f \in C_c(X)$. Độ đo μ còn có các tính chất:

(b) $\quad \mu(K) < \infty$ với mỗi tập compact $K \subset X$

(c) Với mỗi $E \in \mathfrak{M}$, ta có

$$\mu(E) = \inf\{\mu(V) : E \subset V, V \text{ mở }\}.$$

(d) Hệ thức

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E, K \text{ compact}\}$$

đúng với mỗi tập mở E, và với mỗi $E \in \mathfrak{M}$ mà $\mu(E) < \infty$.

(e) Nếu $E \varepsilon \mathfrak{M}$, $A \subset E$ và $\mu(E) = 0$, thì $A \varepsilon \mathfrak{M}$.

1.3. Không gian Banach

1.3.1. Định nghĩa

1.3.2. Định nghĩa

1.3.3. Định lý

1.4. Các hệ quả của định lý Baire

1.4.1. Định lý

Nếu X là một không gian metric đầy đủ, thì giao của mỗi họ đếm được các tập con mở và trù mật của X cũng trù mật trong X.

Đặc biệt (ngoại trừ trường hợp tầm thường $X = \varnothing$), giao nói trên là không rỗng.

1.4.2. Nhận xét

1..4.3. Định lý Banach – Steinhauss

Giả sử *X* là một không gian Banach, *Y* là một không gian tuyến tính định chuẩn, và $\{\Lambda_\alpha\}$ là một họ các phép biến đổi tuyến tính bị chặn từ *X* vào *Y*, trong đó α biến thiên trên một tập chỉ số A . Khi đó hoặc là tồn tại $M < \infty$ sao cho

(1) $$\|\Lambda_\alpha\| \le M$$

với mọi $\alpha \in A$, hoặc là

(2) $$\sup_{\alpha\in A}\|\Lambda_\alpha x\| = \infty$$

với mọi *x* thuộc vào một tập G_δ trù mật nào đó trong *X*.

Trong thuật ngữ hình học, hoặc là có một hình cầu *B* trong *Y* (với bán kính *M* và tâm 0) sao cho mỗi Λ_α ánh xạ hình cầu đơn vị của *X* vào *B*, hoặc là tồn tại $x \in X$ sao cho không một hình cầu nào trong *Y* có thể chứa $\Lambda_\alpha x$ với mọi α (trong trường hợp sau, có cả thảy một tập G_δ trù mật các phần tử *x* như thế). Định lý Banach – Steinhaus còn được gọi là nguyên lý bị chặn đều.

1.4.4. Định lý ánh xạ mở

Cho *U* và *V* là các hình cầu đơn vị mở của các không gian Banach *X* và *Y*. Với mỗi phép biến đổi tuyến tính bị chặn Λ từ X lên trên Y có tương ứng một $\delta > 0$ sao cho

(1) $$\Lambda(U) \supset \delta V$$

chú ý giả thiết 'lên' của Λ. Ở đây, δV ký hiệu tập $\{\delta y : y \in V\}$, nghĩa là tập mọi $y \in Y$ với $\|y\| < \delta$.

Từ (1) và tính tuyến tính của Λ suy ra rằng ảnh của mỗi hình cầu mở trong *X*, với tâm x_0, thì chứa một hình cầu mở trong *Y* với tâm Λx_0. Do đó ảnh của mỗi tập mở thì mở. Điều này giải thích tên của định lý.

Một cách phát biểu khác của (1) là: Với mỗi y mà $\|y\| < \delta$ có tương ứng một *x* với $\|x\| < 1$ sao cho $\Lambda x = y$.

1.5. Định lý Hahn – Banach

1.5.1. Định lý

Nếu *M* là một không gian con của một không gian tuyến tính định chuẩn *X* và nếu *f* là một phiếm hàm tuyến tính bị chặn trên *M*, thì *f* có thể mở rộng được thành một phiếm hàm tuyến tính bị chặn *F* trên *X* sao cho $\|F\| = \|f\|$.

Chú ý: *M* không nhất thiết phải đóng.

Trước khi chứng minh, ta cần có vài chú thích:

Thứ nhất, ta nói một hàm *F* là một mở rộng của hàm *f* nếu miền xác định của *F* chứa miền (xác định) của *f* và $F(x) = f(x)$ với mọi *x* nằm trong miền (xác định) của *f* .

Thứ hai, các chuẩn $\|F\|$ và $\|f\|$ được tính tương đối trong các miền xác định của *F* và *f* ; cụ thể là,

$$\|f\| = \sup\left\{\frac{|f(x)|}{\|x\|} : 0 \ne x \in M\right\}, \quad \|F\| = \sup\left\{\frac{|F(x)|}{\|x\|} : 0 \ne x \in X\right\}.$$

Chú thích thứ ba liên quan tới trường các số vô hướng. Cho tới bây giờ mọi khẳng định đều được trình bày cho các số vô hướng phức, nhưng trường phức cũng có thể được thay thế bởi trường thực mà không cần thay đổi gì trong các mệnh đề (hoặc trong chứng minh). Định lý Hahn – Banach đúng trong cả hai trường hợp mặc dù về bản chất nó có vẻ là một định lý 'thực'. Trường hợp phức chưa được chứng minh khi Banach viết cuốn sách kinh điển 'các toán tử tuyến tính' chắc là do trong các công trình của mình ông chỉ xét trường hợp số vô hướng thực. Rõ ràng mỗi không gian vectơ phức cũng là một không gian vectơ thực. Một hàm phức φ trên một không gian vectơ phức *V* là một phiếm hàm tuyến tính phức nếu

(1) $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ và $\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x)$

với mọi x và $y \in V$ và mọi α phức. Một hàm giá trị thực φ trên một không gian vectơ *V* phức (hoặc thực) là một phiếm hàm tuyến tính thực nếu (1) đúng với mọi số thực α.

Nếu *u* là phần thực của một phiếm hàm tuyến tính - phức *f*, nghĩa là, nếu $u(x)$ là phần thực của số phức *f(x)* với mọi $x \in V$, dễ thấy rằng *u* là một phiếm hàm tuyến tính thực. Các quan hệ dưới đây giữa *f* và *u* là đúng:

1.5.2. Mệnh đề

1.5.3. Chứng minh định lý 1.5.1

Trước tiên ta giả sử X là một không gian tuyến tính định chuẩn thực, và do đó f là một phiếm hàm tuyến tính - thực bị chặn trên M. Nếu $\|f\|=0$, thì mở rộng cần tìm thì $F = 0$. Bỏ qua trường hợp này, không mất tính tổng quát, giả sử $\|f\|=1$.

Chọn $x_0 \in X, x_0 \notin M$, và gọi M_1 là không gian vectơ sinh bởi M và x_0. Khi đó M_1 gồm tất cả cả vectơ có dạng $x+\lambda x_0$, với $x\in M$ và λ là một số vô hướng thực. Nếu chúng ta định nghĩa $f_1(x+\lambda x_0)=f(x)+\lambda\alpha$, với α là một số thực không đổi bất kỳ, dễ dàng kiểm tra rằng f_1 là một phiếm hàm tuyến tính mở rộng của f lên M_1. Vấn đề là chọn α sao cho phiếm hàm mở rộng vẫn có chuẩn bằng 1. Điều này có được nếu như

(1) $$|f(x)+\lambda\alpha| \le \|x+\lambda x_0\| \qquad (x \in M, \lambda \text{ thực}).$$

Thay x bởi $-\lambda x$ và chia hai vế của (1) bởi $|\lambda|$. Điều cần đạt được trở thành

(2) $$|f(x)-\alpha| \le \|x-x_0\| \quad (x\in M),$$

nghĩa là, $A_x \le \alpha \le B_x$ cho mọi $x\in M$, trong đó

(3) $$A_x = f(x)-\|x-x_0\| \qquad \text{và} \qquad B_x = f(x)+\|x-x_0\|.$$

α như thế thì tồn tại nếu và chỉ nếu tất cả các đoạn $[A_x, B_x]$ có một điểm chung, nghĩa là, nếu và chỉ nếu

(4) $$A_x \le B_y$$

với mọi x và $y\in M$. Nhưng

(5) $$f(x)-f(y)=f(x-y)\le\|x-y\|\le\|x-x_0\|+\|y-x_0\|,$$

và vì vậy (4) được suy ra từ (3).

Chúng ta đã chứng minh được sự tồn tại một mở rộng f_1 bảo toàn chuẩn của f lên M_1.

Gọi $\wp$ là họ các cặp có thứ tự (M', f'), trong đó M' là một không gian con của X chứa M và f' là một phiếm hàm tuyến tính-thực mở rộng của f lên M', với $\|f'\|=1$. Hãy sắp thứ tự bộ phận họ $\wp$ bằng cách xem rằng $(M', f')\le(M'', f'')$ khi và chỉ khi $M'\subset M''$ và $f''(x)=f'(x)$ với mọi $x\in M'$. Các tiên đề sắp thứ tự bộ nhận được thoả mãn một cách hiển nhiên và $\wp$ thì không rỗng vì nó chứa (M, f), và vì vậy định lý tối đại Hausdorff khẳng định sự tồn tại của một họ con tối đại Ω được sắp thứ tự toàn phần của $\wp$.

Gọi Φ là họ tất cả các M' sao cho $(M', f')\in\Omega$. Khi đó Φ được sắp toàn phần theo quan hệ bởi tập bao hàm, do đó hợp $\tilde{M}$ của tất cả các phần tử của Φ là một không gian con của X. Nếu $x\in\tilde{M}$, thì $x\in M'$ với $M'\in\Phi$ nào đó; và ta định nghĩa $F(x)=f'(x)$, trong đó f' là hàm có mặt trong cặp $(M', f')\in\Omega$. Thứ tự bộ phận trong Ω cho thấy việc chọn $M'\in\Omega$ nào để định nghĩa $F(x)$ là không quan trọng chỉ cần M' chứa x.

Dễ dàng kiểm tra rằng F là một phiếm hàm tuyến tính trên $\tilde{M}$, với $\|F\|=1$. Nếu $\tilde{M}$ là một không gian con thực sự của X, thì phần đầu của chứng minh sẽ cho ta một mở rộng hơn nữa của F, và điều này là mâu thuẫn với tính tối đại của Ω. Do đó $\tilde{M}=X$, và phép chứng minh được hoàn tất cho trường hợp của các số vô hướng thực.

Bây giờ, nếu f là một phiếm hàm tuyến tính - phức trên không gian con M của không gian tuyến tính định chuẩn phức X, lấy u là phần thực của f, sử dụng định lý Hahn-Banach thực để thác triển u thành một phiếm hàm tuyến tính - thực U trên X, với $\|U\|=\|u\|$, và định nghĩa

(6) $$F(x)=U(x)-iU(ix) \quad (x\in X).$$

Theo mệnh đề 1.5.2, F là một mở rộng tuyến tính phức của f, và

$$\|F\|=\|U\|=\|u\|=\|f\|.$$

Điều này kết thúc phép chứng minh.

1.5.4. Định lý

Cho *M* là một không gian con tuyến tính của một không gian tuyến tính định chuẩn *X*, và cho $x_0 \in X$. Khi đó x_0 nằm trong bao đóng $\tilde{M}$ của *M* nếu và chỉ nếu không tồn tại phiếm hàm tuyến tính bị chặn f nào trên *X* sao cho $f(x)=0$ với mọi $x \in M$ với mọi $x \in M$ nhưng $f(x_0) \neq 0$.

1.5.5. Định lý

Nếu *X* là một không gian tuyến tính định chuẩn và nếu $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$, thì có một phiếm hàm tuyến tính bị chặn *f* trên *X*, có chuẩn bằng 1, sao cho $f(x_0) = \|x_0\|$.

Chương 2

HÀM CHỈNH HÌNH – HÀM ĐIỀU HOÀ

2.1. Đạo hàm phức

2.1.1. Định nghĩa

2.1.2. Định nghĩa

2.1.3. Chú ý

2.1.4. Các ví dụ

2.1.6. Định lý

Nếu *f* biểu diễn được dưới dạng chuỗi luỹ thừa trong Ω, thì $f \in H(\Omega)$ và f'cũng biểu diễn được dưới dạng chuỗi luỹ thừa trong Ω. Thật vậy, nếu

(1) $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

với $z \in D(a;r)$, thì với những z này ta cũng có

(2) $$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1}.$$

2.1.7. Định lý

Giả sử μ là một độ đo phức trên một không gian độ đo X, φ là một hàm độ đo phức trên X, Ω là một tập mở trong mặt phẳng mà không giao $\varphi(X)$, và

(1) $$f(z) = \int_X \frac{d\mu(\xi)}{\varphi(\xi) - z} \quad (z \in \Omega).$$

Khi đó f biểu diễn được bởi chuỗi luỹ thừa trong Ω.

2.2. Tích phân trên các đường

2.2.1. Định nghĩa

Nếu *X* là một không gian tôpô, một đường cong trong *X* là một ánh xạ γ liên tục từ một đoạn compact $[\alpha, \beta] \subset R^1$ vào *X*; ở đây $\alpha < \beta$. Chúng ta gọi $[\alpha, \beta]$ là đoạn tham số của γ và ký hiệu miền giá trị của γ bởi γ^*. Do đó γ là một ánh xạ, và γ^* là tập tất cả các điểm $\gamma(t)$, với $\alpha \le t \le \beta$.

2.2.2. Các trường hợp đặc biệt

2.2.3. Định lý

Cho γ là một đường đi đóng , cho Ω là phần bù của γ^*(quan hệ với mặt phẳng), và định nghĩa

(1) $$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z} \quad (z \in \Omega).$$

Khi đó Ind_γ là một hàm giá trị - nguyên trên Ω mà hằng số trong mỗi thành phần của Ω và là 0 trong thành phần không bị chặn của Ω.

2.2.4. Định lý

2.3. Định lý Cauhy

2.3.1. Định lý

Giả sử $F \in H(\Omega)$ và F' thì liên tục trong Ω. Khi đó

$$\int_\gamma F'(z)\,dz = 0$$

với mỗi đường đi đóng γ trong Ω.

2.3.2. Định lý Cauchy cho một tam giác

Giả sử Δ là một tam giác đóng trong một tập phẳng mở Ω, $p \in \Omega$, f thì liên tục trên Ω, và $f \in H(\Omega - \{p\})$. Khi đó

(1) $$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0.$$

Cho định nghĩa của $\partial\Delta$ chúng ta tham khảo 2.2.2(c). Chúng ta sẽ xem sau đó mà giả thiết của chúng ta kéo theo $f \in H(\Omega)$, nghĩa là, điểm ngoại lệ *p* thì không thật sự ngoại lệ. Tuy nhiên, công thức trên của định lý sẽ hữu ích trong chứng minh của công thức Cauchy.

2.3.3. Định lý Cauchy trong một tập lồi

Giả sử Ω là một tập mở lồi, $p \in \Omega$, f thì liên tục trên Ω và $f \in H(\Omega - \{p\})$. Khi đó

(1) $$\int_{\gamma} f(z)\,dz = 0$$

với mỗi đường đi đóng γ trong Ω.

2.3.4. Công thức Cauchy trong một tập lồi

Giả sử γ là một đường đi đóng trong một tập mở lồi Ω và $f \in H(\Omega)$. Nếu $z \in \Omega$ và $z \notin \gamma^*$, khi đó

(1) $$f(z)\cdot Ind_{\gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi.$$

Trường hợp quan tâm nhất dĩ nhiên, $Ind_{\gamma}(z) = 1$.

2.3.5. Định lý

Cho mỗi tập mở Ω trong phẳng, mỗi $f \in H(\Omega)$ thì biểu diễn bởi chuỗi luỹ thừa trong Ω.

2.3.6. Định lý Morera

Giả sử f là một hàm phức liên tục trong một tập mở sao cho:

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$$

với mỗi tam giác đóng $\Delta \subset \Omega$. Khi đó $f \in H(\Omega)$.

2.4. Biểu diễn chuỗi luỹ thừa

2.4.1. Định lý

2.4.2. Định nghĩa

Nếu $a \in \Omega$ và $f \in H(\Omega - \{a\})$, thì f có một điểm kỳ dị cô lập ở điểm *a*. Nếu f có thể được định nghĩa ở *a* mà các hàm được mở rộng là chỉnh hình trong Ω, điểm kỳ dị được nói đến thì bỏ được.

2.4.3. Định lý

Giả sử $f \in H(\Omega - \{a\})$ và f thì bị chặn trong $D'(a;r)$, với $r > 0$ nào đó. Khi đó *f* có một điểm kỳ dị bỏ được ở *a*.

Lại gọi $$D'(a;r) = \{z : 0 < |z-a| < r\}.$$

2.4.4. Định lý

Nếu $a \in \Omega$ và $f \in H(\Omega - \{a\})$, thì một trong ba trường hợp dưới đây phải xảy ra :

(a) f có một điểm kỳ dị bỏ được ở *a*.

(b) Có các số phức $c_1, ..., c_m$, trong đó *m* là một số nguyên dương và $c_m \neq 0$, sao cho

$$f(z) - \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z-a)^k}$$

có một điểm kỳ dị bỏ được ở *a*.

(c) Nếu $r > 0$ và $D(a;r) \subset \Omega$, thì $f(D'(a;r))$ trù mật trong mặt phẳng.

Trong trường hợp (b), f có một cực điểm của bậc *m* ở *a*. Hàm

$$\sum_{k=1}^{m} c_k (z-a)^{-k},$$

một đa thức trong $(z-a)^{-1}$, được gọi phần chính của *f* ở *a*. Rõ ràng, trong trường hợp này $|f(z)| \to \infty$ khi $z \to a$.

Trong trường hợp (c), f có một điểm kỳ dị cốt yếu ở a. Một mệnh đề tương đương với (c) là với mỗi số phức ω có tương ứng một dãy $\{z_n\}$ sao cho $z_n \to a$ và $f(z_n) \to \omega$ khi $n \to \infty$.

2.4.5. Định lý

Nếu

(1) $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad (z \in D(a;R))$$

và nếu $0 < r < R$, thì

(2) $$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left| f\left(a + re^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta.$$

2.4.6. *Định lý Liouville*

2.4.7. Định lý mođun cực đại

Giả sử Ω là một miền, $f \in H(\Omega)$ và $a \in \Omega$. Khi đó hoặc f là hàm hằng trong Ω hoặc mỗi lân cận của một bao hàm một điểm b sao cho $|f(a)| < |f(b)|$.

Cách nói khác, hoặc f là hằng hoặc $|f|$ không có cực bộ cực đại ở bất kỳ điểm nào của Ω.

2.4.8. Định lý ước lượng Cauchy

Nếu $f \in H(D(a;R))$ và $|f(z)| \le M$ với mọi $z \in D(a;R)$, thì

(1) $$\left| f^{(n)}(a)\right| \le \frac{n!M}{R^n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

2.4.9. Định nghĩa

2.4.10. Định lý

2.5. Định lý ánh xạ mở

2.5.1. Định nghĩa

Giả sử $a \in \Omega$, $f \in H(\Omega - \{a\})$, và f có một cực điểm ở a, với phần chính

(1) $$Q(z) = \sum_{k=1}^{m} c_k (z-a)^{-k},$$

vì được định nghĩa trong định lý 2.4.4. Chúng ta gọi số c_1 phần còn lại của f ở a :

(2) $$c_1 = \mathrm{Res}(f; a).$$

2.5.2. Định lý

2.5.3. Định lý

Giả sử $f \in H(\Omega)$ và f có một không điểm của bậc m ở một điểm $a \in \Omega$. Khi đó f'/f có một cực điểm đơn giản ở a, và

(1) $$\mathrm{Res}\left(\frac{f'}{f}; a\right) = m.$$

Nếu f có một cực điểm của bậc m ở a, và $f \in H(\Omega - \{a\})$, thì

(2) $$\mathrm{Res}\left(\frac{f'}{f}; a\right) = -m.$$

2.5.4. Định lý

2.5.5. Định lý ánh xạ mở

Giả sử Ω là một miền, $f \in H(\Omega)$, f không là hằng số, $z_0 \in \Omega$ và $\omega_0 = f(z_0)$. Đặt m là bậc của không điểm mà hàm $f - \omega_0$ có ở z_0.

Khi đó tồn tại các tập mở V và W sao cho $z_0 \in V \subset \Omega, W = f(V)$ và mỗi $\omega \in W - \{\omega_0\}$ có chính xác m các điểm riêng biệt $z \in V$ mà $f(z) = \omega$.

Suy ra, mỗi $\omega_0 \in f(\Omega)$ là một điểm trong của $f(\Omega)$, do đó $f(\Omega)$ thì mở.

2.5.6. Nhận xét

2.5.7. Định lý

2.5.8. Định lý

2.5.9. Định lý Rouché

2.5.10. Một ứng dụng

2.6. Phương trình Cauchy-Riemann

2.6.1. Toán tử ∂ và $\bar{\partial}$

2.6.2. Định lý

2.7. Tích phân Poisson và cách tiếp cận trừu tượng

2.7.1. Nhân Poisson

Nhân Poisson được định nghĩa là hàm

(1) $$P_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{int} \quad (0 \le r < 1,\ t\text{: thực}).$$

Ta có thể xem $P_r(t)$ như là một hàm của hai biến *r* và *t* hoặc như một họ các hàm của *t*, được đánh chỉ số bởi *r*.

Nếu $z = re^{i\theta}$ $(0 \le r < 1,\ \theta$: thực), thì người ta tính được:

(2) $$P_r(\theta - t) = \mathrm{Re}\left[\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right] = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}.$$

Từ (1) ta có

(3) $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)\,dt = 1 \quad (0 \le r < 1).$$

Từ (2) suy ra $P_r(t) > 0, P_r(t) = P_r(-t)$, và

(4) $$P_r(t) < P_r(\delta) \quad (0 < \delta < |t| \le \pi),$$

và

(5) $$\lim_{r\to 1} P_r(\delta) = 0 \quad (0 < \delta \le \pi).$$

2.7.2. Ký hiệu

2.7.3. Tích phân Poisson

Nếu $f \in L^1(T)$ và

(1) $$F(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)\, f(t)\,dt,$$

hàm *F* được định nghĩa trong *U* gọi là tích phân Poisson của *f*; chúng ta sẽ viết tắt quan hệ (1) đến

(2) $$F = P|f|.$$

Tích phân Poisson $F = P[d\mu]$ của một độ đo Borel phức μ trên *T* được định nghĩa tương tự bởi

(3) $$F(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)\,d\mu(t).$$

Nếu chúng ta kết hợp với mỗi $f \in L^1(T)$ tích phân vô hạn của nó $\mu(E) = \int_E f(t)\,dt$, ta thấy hàm *F* của dạng (1) dạng một lớp con của chúng được định nghĩa bởi (3).

Nếu μ là thực, công thức 2.7.1(2) chứng tỏ rằng $P[d\mu]$ là phần thực của

(4) $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,d\mu(t) \quad (z = re^{i\theta};\ z \in U).$$

Nhưng (4) định nghĩa một hàm chỉnh hình trong *U* theo định lý 2.1.7. Do đó, $P[d\mu]$ là hàm điều hoà. Từ tổ hợp tuyến tính (với hệ số hằng) của các hàm điều hoà thì điều hoà, chúng ta chứng tỏ điều dưới đây :

2.7.4. Định lý

2.7.5. Lemma

Giả sử μ là một đô đo Borel thực trên T, cố định θ, đặt

(1) $$J(\theta; s) = \{e^{it} : \theta - s < t < \theta + s\},$$

mà $J(\theta;s)$ là cung đường tròn mở của độ dài 2s với tâm ở $e^{i\theta}$, và giả thiết có tồn tại một $\delta, 0 < \delta < \pi$, và một số thực A mà

(2) $$\mu(J(\theta;s)) < 2sA \qquad \text{nếu } 0 < s < \delta.$$

Nếu $F = P[d\mu]$, những điều kiện này kéo theo

(3) $$F(re^{i\theta}) < A + \frac{1}{2\pi} P_r(\delta)\|\mu\| \quad (0 \le r < 1),$$

mà $\|\mu\| = |\mu|(T)$ là tổng biến phân của μ.

2.7.6. Định lý

2.7.7. Định lý

Giả sử $f \in C(T), F = P[f]$, và

(1) $$u\left(re^{i\theta}\right)=\begin{cases} f\left(e^{i\theta}\right) & r=1, \\ F\left(re^{i\theta}\right) & 0\le r<1. \end{cases}$$

Khi đó u là một hàm liên tục trên đơn vị đóng $\bar{U}$.

2.7.8. Định lý

2.7.9. Định lý Harnack

Cho $\{u_n\}$ là một dãy các hàm điều hoà trong một miền Ω.

(a) Nếu $u_n \to u$ đều trên các tập con compact của Ω, thì u điều hoà trong Ω.

(b) Nếu $u_1 \le u_2 \le u_3 \le \ldots$, thì hoặc $\{u_n\}$ hội tụ đều trên các tập con compact của Ω, hoặc $u_n(z) \to \infty$ với mỗi $z \in \Omega$.

2.8. Các hàm điều hoà dương

2.8.1 Nhận xét

2.8.2. Định lý

2.8.4. Định lý

2.8.5. Định lý

Chương 3
Xấp xỉ bởi các hàm hữu tỉ

3.1. Chuẩn bị

3.1.1. Mặt cầu Riemann

3.1.2. Các hàm hữu tỉ

3.1.3 Định lý

Mỗi tập mở Ω trong mặt phẳng phức là hợp của một dãy $\{K_n\}$, $n=1,2,3,\ldots$, của các tập compact mà

(a) K_n nằm trong phần trong của K_{n+1} với mọi $n=1,2,3,\ldots$

(b) Mỗi tập con compact của Ω thì nằm trong K_n nào đó.

(c) Mỗi thành phần của S^2-K_n chứa một thành phần của $S^2-\Omega$ với mọi $n=1,2,3,\ldots$

3.1.4. Định lý

Giả sử a và b là các số phức, $b\neq 0$ và γ là đường đi bao gồm các đoạn có hướng

(1) $$\left[a+i^n b, a+i^{n+1}b\right] \quad (n=0,1,2,3).$$

Khi đó

(2) $$\mathrm{Ind}_\gamma(z)=1$$

với mỗi z nằm trong phần trong của hình vuông với các đỉnh là $a+i^n b \quad (n=0,1,2,3)$.

3.1.5. Định lý

Nếu K là tập con compact của một hình phẳng mở Ω, thì tồn tại các đoạn thẳng định hướng $\gamma_1,\ldots,\gamma_n$ trong $\Omega-K$ sao cho công thức Cauchy

(1) $$f(z)=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_j}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi$$

đúng cho mỗi $f\in H(\Omega)$ và mỗi $z\in K$.

3.2. Định lý Runge

3.2.1. Định lý

Giả sử K là một tập compact trong mặt phẳng và $\{\alpha_j\}$ là một tập được tạo thành bằng cách lấy một điểm trong mỗi thành phần của S^2-K. Nếu Ω là mở, $\Omega\supset K$, $f\in H(\Omega)$, *và* $\varepsilon>0$, thì tồn tại một hàm hữu tỷ R mà tất cả các cực điểm của nó thì nằm trong tập $\{\alpha_j\}$ nói trên sao cho

(1) $$\left|f(z)-R(z)\right|<\varepsilon \qquad \text{với mỗi } z\in K.$$

Chứng minh

Xét không gian Banach $C(K)$ mà các phần tử của nó là các hàm phức liên tục trên K, với chuẩn supremum. Gọi M là không gian con của $C(K)$ bao gồm các thu hẹp trên K của các hàm hữu tỉ có tất cả các cực điểm trong $\{\alpha_j\}$. Định lý khẳng định rằng f nằm trong bao đóng của M. Điều này thì tương đương với khẳng định rằng mỗi phiếm hàm tuyến tính bị chặn trên $C(K)$ mà triệt tiêu trên M thì cũng triệt tiêu tại f, và do đó định lý biểu diễn Riesz chứng tỏ rằng chúng ta cần phải chứng minh khẳng định dưới đây:

Nếu μ là một độ đo Borel phức trên K sao cho

(2) $$\int_K R d\mu = 0$$

với mọi hàm hữu tỉ R với các cực điểm chỉ nằm trong tập $\{\alpha_j\}$, và nếu $f \in H(\Omega)$, thì

(3) $$\int_K f\, d\mu = 0.$$

Vì thế chúng ta hãy giả thiết rằng μ thoả mãn (2). Định nghĩa

(4) $$h(z) = \int_K \frac{d\mu(\xi)}{\xi - z} \quad \left(z \in S^2 - K\right).$$

Theo định lý 2.1.7 (với $X = K, \varphi(\xi) = \xi$), $h \in H\left(S^2 - K\right)$.

Gọi V_j là thành phần của $S^2 - K$ có chứa α_j, và giả sử $D(a_j; r) \subset V_j$. Nếu $\alpha_j \neq \infty$ và nếu z là cố định trong $D(\alpha_j; r)$, thì

(5) $$\frac{1}{\xi - z} = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{(z - \alpha_j)^n}{(\xi - \alpha_j)^{n+1}}$$

đều theo $\xi \in K$. Mỗi hàm trong vế phải của (5) thì thoả (2). Do đó $h(z) = 0$ với mọi $z \in D(\alpha_j; r)$. Điều này kéo theo: $h(z) = 0$ với mọi $z \in V_j$ định lý duy nhất 2.4.1.

Nếu $\alpha_j = \infty$, (5) được thay thế bởi

(6) $$\frac{1}{\xi - z} = -\lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} z^{-n-1} \xi^n \quad \left(\xi \in K, |z| > r\right),$$

và ta cũng có $h(z) = 0$ trong $D(\infty; r)$, và do đó cả trong V_j. Vậy từ (2) ta đã chứng minh được

(7) $$h(z) = 0 \quad \left(z \in S^2 - K\right).$$

Bây giờ chọn các đoạn thẳng định hướng $\gamma_1, ..., \gamma_n$ trong $\Omega - K$, như trong định lý 3.1.5 và lấy tích phân theo μ biểu diễn tích phân Cauchy này của f với μ. Một ứng dụng của định lý Fubini, kết hợp với (7), cho ta

$$\int_K f\, d\mu = \int_K d\mu(\xi) \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_i} \frac{f(\omega)}{\omega - \xi} d\omega \right]$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_i} f(\omega) \left[\int_K \frac{d\mu(\xi)}{\omega - \xi} \right] d\omega$$

$$= -\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_i} f(\omega) h(\omega)\, d\omega = 0.$$

Đẳng thức cuối cùng dựa trên sự kiện mỗi γ_i là một đoạn trong $S^2 - K$, mà trên đó h triệt tiêu.

Do đó (3) đúng và phép chứng minh được hoàn tất.

3.2.2. Định lý

3.2.3. Nhận xét

3.2.4. Định lý

3.3. Định lý Cauchy

3.3.1. Định lý

Giả sử Ω là một hình phẳng mở, và $f \in H(\Omega)$.

(a) Nếu γ là một đường đi đóng trong Ω sao cho

(1) $\quad \mathrm{Ind}_\gamma(\alpha) = 0 \quad$ với mỗi $\alpha \in S^2 - \Omega$,

thì

(2) $\quad \int_\gamma f(z)\, dz = 0$.

(b) Nếu γ_0 và γ_1 là các đường đi đóng trong Ω sao cho

(3) $\quad \mathrm{Ind}_{\gamma_0}(\alpha) = \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(\alpha) \quad$ với mỗi $\alpha \in S^2 - \Omega$,

thì

(4) $\quad \int_{\gamma_0} f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz.$

(c) Nếu $S^2 - \Omega$ là liên thông, thì (1) đúng với mỗi đường đi đóng γ trong Ω; do đó (2) cũng đúng.

Chứng minh

Theo định lý 2.5.2, (a) và (b) đúng, cho mọi hàm hữu tỉ không có cực điểm nằm trong Ω; như chúng ta đã thấy ở trên, trường hợp tổng quát được suy ra từ định lý 3.2.4. Đối với (c), $\mathrm{Ind}_\gamma(\alpha) = 0$ với mỗi α trong các thành phần không bị chặn của phần bù của γ^*, và nếu $S^2 - \Omega$ là liên thông, thì $S^2 - \Omega$ nằm trong thành phần nói trên. Điều này hoàn tất phép chứng minh.

Phần (b) chỉ ra cho chúng ta các điều kiện để có thể thay thế tích phân trên một đường đi này bởi tích phân trên một đường đi khác mà không làm thay đổi giá trị của tích phân. Nếu Ω lồi, thì $S^2 - \Omega$ là liên thông. Do đó (a) là một sự suy rộng của định lý 2.3.3.

3.3.2. Định nghĩa

Một hàm f được gọi là một hàm phân hình trong tập mở Ω nếu có một tập $A \subset \Omega$ sao cho

(a) A không có điểm giới hạn trong Ω.

(b) $f \in H(\Omega - A)$.

(c) f có cực điểm tại mỗi điểm của *A*.

3.3.3. Định lý

3.3.4. Phép đồng điều và phép đồng luân

3.3.5. Định lý

Giả sử γ_0 và γ_1 là các đường đi đóng trong Ω. Nếu các đường này là Ω-đồng luân, thì chúng cũng Ω-đồng điều. Nếu γ_0 là đồng luân với 0 trong Ω, thì γ_0 cũng Ω-đồng điều với 0.

Chứng minh

Rõ ràng là chỉ cần chứng minh khẳng định đầu tiên. Vì thế, giả sử γ_0 *và* γ_1 là Ω-đồng luân, với đoạn tham số $[0,1]$; gọi *h* là một ánh xạ từ I^2 đến Ω với các tính chất

được liệt kê trong 3.3.4(1), và gọi $\{\gamma_s\}$ tương ứng là họ một tham số các đường cong đóng trong Ω, với $0 \le s \le 1$.

Hiện nay, có một chút trục trặc nảy sinh từ chỗ chúng ta chỉ mới định nghĩa chỉ số cho các đường đi đóng, chứ chưa hề định nghĩa cho các đường cong đóng. Ta có thể vượt qua trục trặc này theo hai cách. Một là sẽ chứng minh rằng nếu γ_0 *và* γ_1 khả vi và nếu có một ánh xạ liên tục h với các tính chất cần có thì cũng có một ánh xạ khả vi h với cùng các tính chất đó và vì vậy γ_s sinh ra quả thực là các đường đi. Một cách khác là định nghĩa chỉ số cho tất cả các đường cong đóng theo cách như sau: Cho Γ là một đường cong đóng với đoạn tham số $[0, 2\pi]$ và giả sử $\alpha \notin \Gamma^*$. Có thể xảy ra đều Γ trên $[0, 2\pi]$ bởi các đa thức lượng giác Γ_n. Khi *n* và *m* là đủ lớn, ta có thể áp dụng định lý 2.5.8 cho $\Gamma_n - \alpha$ và $\Gamma_m - \alpha$ để có $Ind_{\Gamma_n}(\alpha) = Ind_{\Gamma_m}(\alpha)$. Giá trị chung này sẽ được định nghĩa cho $Ind_\Gamma(\alpha)$. Dễ dàng thấy rằng kết quả thu được không phụ thuộc vào sự cách chọn họ $\{\Gamma_n\}$, và dễ thấy định lý 2.5.8 cũng đúng cho các đường cong đóng chứ không phải chỉ đúng cho các đường đi đóng.

Trong mọi trường hợp tính liên tục đều của ánh xạ *h* từ I^2 vào Ω kéo theo rằng $\mathrm{Ind}_{\gamma_s}(\alpha)$ là một hàm liên tục của *s* trên $[0,1]$ với mỗi $\alpha \in S^2 - \Omega$. Mỗi hàm giá trị nguyên liên tục thì phải là hằng số trên $[0,1]$. Do đó γ_0 *và* γ_1 là Ω-đồng điều.

3.3.6. Ví dụ

3.4. Các miền đơn liên

3.4.1. Định nghĩa

Một miền phẳng Ω được gọi là đơn liên nếu mỗi đường cong đóng trong Ω là đồng luân với 0 trong Ω.

3.4.2. Định lý

Với một miền phẳng Ω, mỗi một trong tám điều kiện dưới đây kéo theo tất cả các điều kiện còn lại:

(a) Ω là đồng phôi với đĩa tròn đơn vị mở *U*.

(b) Ω là đơn liên.

(c) $S^2 - \Omega$ là liên thông.

(d) $\text{Ind}_{\gamma}(\alpha) = 0$ với mỗi đường đi đóng γ trong Ω và với mỗi $\alpha \in S^2 - \Omega$.

(e) Với mỗi $f \in H(\Omega)$ và với mỗi đường đi đóng γ trong Ω,

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

(f) Với mỗi $f \in H(\Omega)$ có tương ứng một $F \in H(\Omega)$ sao cho $F' = f$.

(g) Nếu $f \in H(\Omega)$ và f không có không điểm trong Ω, thì tồn tại $g \in H(\Omega)$ sao cho $f = \exp(g)$.

(h) Nếu $f \in H(\Omega)$ và f không có không điểm trong Ω, thì tồn tại $\varphi \in H$ sao cho $f = \varphi^2$.

Khẳng định ở (g) nói rằng f có một 'loga chỉnh hình' g trong Ω; còn (h) nói rằng f có một 'căn bậc hai giải tích' φ trong Ω; và (e) nói rằng định lý Cauchy đúng cho mỗi đường đi đóng trong một miền đơn liên.

3.4.3. Định lý

KẾT LUẬN

Qua một thời gian tìm hiểu, nghiên cứu về Giải tích hàm gắn kết hai lĩnh vực "Thực và phức" trong giải tích, luận văn đã hoàn thành và đạt được những kết quả sau:

1. Trình bày một cách hệ thống các khái niệm, định nghĩa về các không gian vectơ, không gian tôpô, không gian Banach.

2. Trình bày các định lý: định lý biểu diễn Riesz, định lý Baire, định lý Hahn-Banach, định lý Cauchy, định lý Runge.

3. Trình bày về mối quan hệ tương hỗ giữa hai lĩnh vực thực và phức trong Giải tích cụ thể: Định lý biểu diễn Riesz và định lý Hahn-Banach cho phép "dự báo" công thức Poisson. Chúng gắn kết nhau trong phép chứng minh của định lý Runge, mà từ đó một phiên bản "đồng điều" của định lý Cauchy được dẫn ra.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] L.V. Ahlfors, *Complex Analysis*, 2d ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1996.

[2] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear Operators*, Interscience Publishers, Inc., New York, 1958.

[3] P. R. Halmos, *Measure Theory*, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N.J., 1950.

[3] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill Book Company, 1966.