BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

ĐẶNG THỊ NGUYỄN VIỆT

SỐ STIRLING VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành : PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP

Mã số : 60.46.40

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Người hướng dẫn khoa học : PGS . TSKH TRẦN QUỐC CHIẾN

Đà Nẵng - Năm 2012

Công trình được hoàn thành tại

ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

Người hướng dẫn khoa học: PGS . TSKH TRẦN QUỐC CHIẾN

Phản biện 1 :………………………………………………

Phản biện 2 :……………………………………………….

Luận văn được bảo vệ tại Hội đồng chấm Luận văn tốt nghiệp Thạc sĩ chuyên ngành Phương pháp Toán sơ cấp tại Đại học Đà Nẵng vào ngày 02.tháng …12.năm…2012…..

Có thể tìm hiểu luận văn tại :

- Trung tâm Thông tin - Học liệu , Đại học Đà Nẵng
- Thư viện trường Đại học sư phạm , Đại học Đà Nẵng

A. MỞ ĐẦU

1. LÝ DO CHỌN ĐỀ TÀI :

Năm 1730 , cuốn sách quan trọng nhất của James Sitirling (1692 – 1770) đã được xuất bản , “ *Methodus differentialis , sive Tractatus de Summatine et Interpolatione Serireum Infinitarum* ” . Trong cuốn sách này ông đã chỉ ra cách tăng nhanh độ hội tụ của một dãy số và các biến đổi nói chung của các dãy số này với mục đích tăng tốc độ hội tụ . Điều này thường kéo theo sự biến đổi của các giai thừa sang lũy thừa và ngược lại và ông ấy đã viết lên bảng để thực hiện ý định này . Những con số trong bảng được gọi là số Stirling . Có hai loại số Stirling là số Stirling loại một và số Stirling loại hai.

Trong luận văn này chúng ta chủ yếu nghiên cứu về số Stirling loại hai và các ứng dụng của nó vào các lĩnh vực khác nhau của toán học . Số Stirling loại hai đã xuất hiện trong nhiều bài toán tổ hợp và có ứng dụng trong lý thuyết thống kê.

2. MỤC ĐÍCH NGHIÊN CỨU

Trên cơ sở nghiên cứu đề tài , tôi muốn giới thiệu đến độc giả nguồn gốc và các ứng dụng của số Stirling . Từ đó, độc giả có thể hiểu hơn rõ hơn số Stirling , nắm bắt những ứng dụng của nó để có thể vận dụng vào các bài toán . Mục đích của luận văn này là nghiên cứu thêm các ứng dụng của số Stirling và áp dụng nó vào một số lĩnh vực khác của Toán học .

3. ĐỐI TƯỢNG VÀ PHẠM VI NGHIÊN CỨU

Đối tượng : Số Stirling loại 1 và số Stirling loại 2 và các ứng dụng của nó .

Phạm vi nghiên cứu : Để thực hiện đề tài này tôi sẽ tiến hành thu thập và nghiên cứu trên các bài báo toán học nổi tiếng , các cuốn sách đề cập đến số Stirling .

4. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

Nghiên cứu trực tiếp từ các tài liệu của giáo viên hướng dẫn , của các đồng nghiệp cũng như từ các học viên trong lớp .

5. Ý NGHĨA KHOA HỌC VÀ THỰC TIỄN CỦA ĐỀ TÀI :

Việc sử dụng số Stirling loại một , số Stirling loại một không dấu và số Stirling loại hai sẽ giải được một số bài toán tổ hợp và một số bài toán giải tích một cách đơn giản hơn .

6. CẤU TRÚC CỦA LUẬN VĂN

Luận văn được cấu trúc bởi 3 chương .

Chương 1 : Tổng quan về tổ hợp

Chương này tôi giới thiệu sơ lược về lịch sử tổ hợp và nêu ra các bài toán tổ hợp . Ngoài ra , còn giới thiệu các công cụ hỗ trợ có liên quan đến luận văn *Chương 2 : Số Stirling*

Chương này nêu đầy đủ một cách có hệ thống định nghĩa về số Stirling loại một , số Stirling loại một không dấu và số Stirling loại hai . Các định lý , tính chất , hàm sinh của các số Stirling và quan hệ giữa chúng .

Chương 3 : Ứng dụng của số Stirling

Chương này có 2 phần : phần 1 đưa ra các bài toán tổ hợp trong đó có ứng dụng số Stirling để giải và phần 2 là ứng dụng của số Stirling để giải các bài toán giải tích .

B. NỘI DUNG

Ngoài phần mở đầu và kết luận , luận văn gồm có 3 chương

CHƯƠNG 1. TỔNG QUAN VỀ TỔ HỢP

1.1 NHỮNG NGUYÊN LÍ ĐẾM CƠ BẢN

1.1.1 Nguyên lí cộng

Giả sử có k công việc $T_1, T_2, ..., T_k$. Các việc này có thể làm tương ứng bằng $n_1, n_2, ..., n_k$ cách và giả sử không có hai việc nào có thể làm đồng thời. Khi đó số cách làm một trong k việc đó là $n_1+n_2+ ... + n_k$.

Quy tắc cộng có thể phát biểu dưới dạng của ngôn ngữ tập hợp như sau: Nếu $A_1, A_2, ..., A_k$ là các tập hợp đôi một rời nhau, khi đó số phần tử của hợp các tập hợp này bằng tổng số các phần tử của các tập thành phần.

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k| = |A_1| + |A_2| + ... + |A_k|. \qquad (1.1a)$$

1.1.2 Nguyên lí nhân

Giả sử một nhiệm vụ nào đó được tách ra thành k việc $T_1, T_2, ..., T_k$. Nếu việc T_i có thể làm bằng n_i cách sau khi các việc $T_1, T_2, ... T_{i-1}$ đã được làm, khi đó có $n_1.n_2....n_k$ cách thi hành nhiệm vụ đã cho.

1.1.3 Nguyên lí bù trừ

Cho A_1, A_2 là hai tập hữu hạn, khi đó :

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|. \qquad (1.1b)$$

và bằng quy nạp, với k tập hữu hạn $A_1, A_2, ..., A_k$ ta có:

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k| = N_1 - N_2 + N_3 - ... + (-1)^{k-1}N_k \qquad (1.1d)$$

trong đó N_m ($1 \le m \le k$) là tổng phần tử của tất cả các giao m tập lấy từ k tập đã cho, nghĩa là :

$$N_m = \sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_m\le k} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_m}|$$

Định lý (Công thức Sieve) : Nếu A_1 , A_2 ,…, A_m là những tập con của một tập hữu hạn X . $\overline{A_i}$ là ký hiệu phần bù của A_i trong tập X với i = 1 , 2,…, m thì :

$$\left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\ldots\cap\overline{A_m}\right| = |X| - S_1 + S_2 - \ldots + (-1)^m S_m \qquad (1.1e)$$

Trong đó S_k là ký hiệu của tổng các lực lượng của tất cả những k- bộ giao nhau được tạo ra từ m tập hợp ở trên .

$$S_1 = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_m| \ ; \ S_2 = \sum_{\substack{i,j=\overline{1,m} \\ i\ne j}} |A_i \cap A_j|, \ \cdots$$

Định lý : Với kí hiệu giống định lí trên

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m| = S_1 - S_2 + \ldots + (-1)^{m-1} S_m$$

1.2 CÁC CẤU HÌNH TỔ HỢP CƠ BẢN

1.2.1 Hoán vị

Định nghĩa 1.2.1 : Một hoán vị của n phần tử khác nhau là một cách sắp xếp thứ tự các phần tử đó .

1.2.2 Hoán vị lặp

Định nghĩa 1.2.2 : Hoán vị lặp là hoán vị trong đó mỗi phần tử được ấn định một số lần lặp lại cho trước .

Từ đó , ta được số hoán vị của n phần tử trong đó có n_1 phần tử như nhau thuộc loại 1, n_2 phần tử như nhau thuộc loại 2, ..., và n_k phần tử như nhau thuộc loại k, bằng :

$$P(n,n_1,n_2,\ldots,n_k) = \frac{n!}{n_1!.n_2!....n_k!}.$$

1.2.3 Chỉnh hợp lặp

Định nghĩa 1.2.3 : Một chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử khác nhau là một bộ có thứ tự gồm k thành phần lấy từ n phần tử đã cho . Các thành phần có thể lặp lại .Như vậy số tất cả các chỉnh hợp chập k của n là : $AR(n,k) = n^k$

1.2.4 Chỉnh hợp không lặp

Định nghĩa 1.2.4 : Một chỉnh hợp không lặp chập k của n phần tử khác nhau là một bộ có thứ tự gồm k thành phần lấy từ n phần tử đã cho . Các thành phần không được lặp lại .

Số tất cả các chỉnh hợp không lặp của n phần tử :

$$A(n,k) = n(n-1)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

1.2.5 Tổ hợp

Định nghĩa 1.2.5 : Một tổ hợp chập k của n phần tử khác nhau là một bộ không kể thứ tụ gồm k thành phần khác nhau lấy từ n phần tử đã cho . Nói cách khác ta có thể coi một tổ hợp chập k của n phần tử khác nhau là một tập con có phần tử từ n phần tử đã cho .

Kí hiệu : C(n,k) là số tổ hợp chập k của n phần tử ta có :

$$C(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

1.2.6 Tổ hợp lặp

Định nghĩa 1.2.6 : Tổ hợp chập k từ n phần tử là một nhóm không phân biệt thứ tự gồm k phân tử trích từ n phần tử đã cho, trong đó các phần tử có thể lặp lại.

Giả sử X có n phần tử khác nhau . Khi đó số tổ hợp lặp chập k từ n phần tử của X , ký hiệu CR(n,k) là :

$$CR(n,k) = C(n+k-1, n-1) = C(n+k-1, k)$$

1.2.7 Nhị thức Newton :

Công thức nhị thức Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k) a^{n-k} b^k$$

Công thức *tam giác Pascal* : C(n,k) = C(n-1,k-1) + C(n-1,k)

1.2.8 Một số công cụ bổ sung :

Định lý l.1 (Khai triển lũy thừa của 1 hàm) : Cho hàm f khả vi vô hạn lần trên R . Khi đó :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots$$

Định nghĩa 1.2.7 (Ma trận chuyển cơ sở) Giả sử B = { e_1, e_2 , …, e_n} , B' = { e'_1, e'_2 , …, e'_n} là hai cơ sở của không gian vectơ V . Ma trận của hệ vectơ B' trong cơ sở B được gọi là ma trận chuyển từ cơ sở B sang cơ sở B' nếu : $e'_j = \sum_{i=1}^{n} t_{ij} e_i,\ j = \overline{1,n}$

thì P = [t_{ij}] là ma trận chuyển từ cơ sở B sang B' . (1.1f)

Định nghĩa 1.2.8 (Ma trận nghịch đảo) : Ma trận vuông A được gọi là khả nghịch nếu tồn tại ma trận cùng cấp B sao cho AB = BA = I , với I là ma trận đơn vị cùng cấp . Khi đó , B gọi là ma trận nghịch đảo của ma trận A , kí hiệu là A^{-1}. (1.1g)

CHƯƠNG 2

SỐ STIRLING

2.1 SỐ STIRLING LOẠI 1

2.1.1 Định nghĩa

Định nghĩa 2.1.1 : Cho n ∈ N , k ∈ N . Số Stirling loại một kí hiệu là s(n, k) được cho bởi công thức :

$$[x]_n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k) x^k \qquad (2.1a)$$

Với $[x]_n = x(x-1)(x-2)...(x-n+1)$ với $n \in N^*$

và $[x]_0 = 1$ với $n \in N^*$ và $[x]_0 = 1$ (2.1b)

Quy ước : s(n,0) = 0 với ∀ $n \in N^*$

s(0, k) = 0 với ∀ $k \in N^*$

s(n, k) = 0 nếu k >n và s(0,0) = 1

2.1.2 Các định lý

Định lí 2.1.1 : Cho n ∈ N , k ∈ N , ta có :

$$s(n+1, k) = s(n, k-1) - n\, s(n,k) \qquad (2.1c)$$

Ví dụ 2.1.2 : Cho n ∈ N . Chứng minh :

a) s(n,n) = 1
b) $s(n,1) = (-1)^{n-1}(n-1)!$ $\forall n \in N^*$
c) s(n,n-1) = - C(n,2)
d) $\sum_{k=0}^{n} s(n,k) = 0$

Từ công thức (2.1c) ta có bảng số Stirling loại 1 như sau :

Bảng 2.1 : Bảng số Stirling loại 1

n	s(n,0)	s(n,1)	s(n,2)	s(n,3)	s(n,4)	s(n,5)	s(n,6)	s(n,7)	s(n,8)
0	1								
1	0	1							
2	0	-1	1						
3	0	2	-3	1					
4	0	-6	11	- 6	1				
5	0	24	-50	35	-10	1			
6	0	-120	274	-225	85	-15	1		
7	0	720	-1764	1624	-735	175	-21	1	
8	0	-5040	13068	-13132	6769	-1960	322	-28	1

Định lý 2.1.2 : Đẳng thức về hàm sinh lũy thừa cho số Stirling loại 1 :

$$\sum_{n\geq k} s(n,k)\frac{y^n}{n!}=\frac{1}{k!}\left[\ln(1+y)\right]^k \qquad (2.1d)$$

2.2 SỐ STIRLING LOẠI MỘT KHÔNG DẤU

2.2.1 Các định nghĩa

Định nghĩa 2.2.1 : Giá trị tuyệt đối của s(n,k) được gọi là số Stirling loại 1 không dấu và được kí hiệu là s'(n,k) với s'(n,k) = | s(n,k)| .

Ngoài ra s'(n,k) còn tượng trưng cho số cách xếp n đồ vật vào k xích .Xích là một cách sắp xếp trên vòng tròn . Hai xích là giống nhau nếu có thể chặt xích ở vị trí nào đó và căng ra ta thu được 2 tập có thứ tự giống nhau . Với xích [A,B,C,D] ta có : [A,B,C,D] = [B,C,D,A] = [C,D,A,B] = [D,A,B,C] nhưng xích [A,B,C,D] lại khác với [A,B,D,C] hay [D,C,B,A]. Và ta có 11 cách chia 4 phần tử thành 2 xích là : [1,2,3][4] ; [1,2,4][3] ; [1,3,4][2] ; [234][1] ; [132][4];[142][3] ;[143][2];[234][1] ; [12][34]; [13][24];[14][23] .

Định nghĩa 2.2.2 : Cho $n \in N$, $k \in N$. Số Stirling loại một không dấu kí hiệu là s'(n, k) được cho bởi công thức :

$$[x]^n = \sum_{k=0}^{n} s'(n,k)\, x^k \qquad (2.2a)$$

Với $[x]^n = x(x+1)(x+2)...(x+n-1)$ với $n \in N^*$ và $[x]^0 = 1$ (2.2b)

Quy ước : $s'(n,0) = 0$ với $\forall\, n\in N^*$

$s'(0, k) = 0$ với $\forall\, k\in N^*$

$s'(n, k) = 0$ nếu $k > n$ và $s'(0,0) = 1$

2.2.2 Các tính chất :

Tính chất 2.2.1 :

a) $s'(n,1) = (n-1)!$ với $n \in N^*$

b) $s'(n,n) = 1$ với $n \in N$

c) $\sum_{k=0}^{n} s'(n,k) = n!$ với $n \in N$

Từ các công thức trên ta xây dựng tam giác của số Stirling loại 1 không dấu

Bảng 2.2 : Bảng số Stirling loại 1 không dấu

n	s'(n,0)	s'(n,1)	s'(n,2)	s'(n,3)	s'(n,4)	s'(n,5)	s'(n,6)	s'(n,7)	s'(n,8)
0	1								
1	0	1							
2	0	1	1						
3	0	2	3	1					
4	0	6	11	6	1				
5	0	24	50	35	10	1			
6	0	120	274	225	85	15	1		
7	0	720	1764	1624	735	175	21	1	
8	0	5040	13068	13132	6769	1960	322	28	1

Định nghĩa số Harmonic : Cho n ,r $\in$ N^*

Số Harmonic kí hiệu là : $H_n^{(r)}$ với $H_n^{(r)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^r}$

Tính chất 2.2.2 :

Quan hệ giữa số Stirling loại 1 không dấu và số Harmonic :

a) s'(n+1,2) = n!H_n

b) s'(n+1,3) = $\frac{n!}{2}\left[H_n^2-\left(1+\frac{1}{2^2}+....+\frac{1}{n^2}\right)\right]=\frac{n!}{2}\left[H_n^2-H_n^{(2)}\right]$

c) s'(n+1,4)= $\frac{n!}{6}\left[H_n^3-3H_nH_n^{(2)}+2H_n^{(3)}\right]$

Tính chất 2.2.3 : Các tính chất trên hàng, cột và đường chéo của bảng số Stirling loại 1 không dấu .

a) Cho n là số tự nhiên . Khi đó :

$$\sum_{j=0}^{n} j.s'(n,j)=s'(n+1,2) \qquad \forall n\in N^* \qquad (2.2d)$$

b) Cho n và c là các số nguyên không âm . Khi đó :

$$\sum_{j=0}^{n} C(j,c).s'(n,j)=s'(n+1,c+1) \qquad (2.2e)$$

c) Cho n và c là các số nguyên không âm . Khi đó :

$$s'(n+1,c+1) = \sum_{k=0}^{n}[n]_{n-k}.s'(k,c) \qquad \forall n,c\in N \qquad (2.2f)$$

d) Cho n và c là các số nguyên không âm . Khi đó :

$$s'(n+c+1,c) = \sum_{k=0}^{c}(n+k).s'(n+k,k) \qquad (2.2g)$$

2.3 SỐ STIRLING LOẠI 2

2.3.1 Định nghĩa

Định nghĩa 2.3.1 : Số phân hợp tập hợp n phần tử thành k khối không rỗng , gọi là số Stirling loại 2 , kí hiệu S(n,k) .

Nói cách khác , số Stirling loại 2 là số cách phân phối n quả bóng phân biệt vào k hộp giống nhau mà không có hộp nào rỗng .

2.3.2 Các định lý

Mệnh đề 1 : Số toàn ánh từ tập hợp n phần tử vào tập k phần tử bằng k!S(n,k)

Định lý 2.3.1 : Số Stirling loại 2 có thể tính trực tiếp qua công thức sau : $S(n,k)=\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i C(k,i)(k-i)^n$ (2.3a)

Định lí 2.3.2 : Cho n và k là số tự nhiên . Ta có :

$$S(n + 1 ,k) = S(n, k-1) + k S(n, k) \qquad (2.3b)$$

Định lý 2.3.3 : Cho n $\in$ N . Số Stirling loại 2 được cho bởi công thức : $x^n=\sum_{k=0}^{n}S(n,k)[x]_k$ (2.3c)

Với $[x]_k$ = x(x-1)(x-2)...(x-k+1) với k$\in$ N^* và $[x]_0$ =1

Quy ước : S(n,0) = 0 với $\forall$ n $\in$ N^*

S(0, k) = 0 với $\forall$ k $\in$ N^*

S(n, k) = 0 nếu k > n và S(0,0) = 1 .

Từ công thức (2.3b) ta xây dựng bảng sau bao gồm một số số Stirling loại 2 :

Bảng 2.3 : Bảng số Stirling loại 2

n	S(n,0)	S(n,1)	S(n,2)	S(n,3)	S(n,4)	S(n,5)	S(n,6)	S(n,7)	S(n,8)
0	1								
1	0	1							
2	0	1	1						
3	0	1	3	1					
4	0	1	7	6	1				
5	0	1	15	25	10	1			
6	0	1	31	90	65	15	1		
7	0	1	63	301	350	140	21	1	
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1

Định lý 2.3.4 : Đẳng thức về hàm sinh lũy thừa cho số Stirling loại 2 : $F_k(x)=\sum_{n=k}^{+\infty} S(n,k)\frac{x^n}{n!}=\frac{(e^x-1)^k}{k!}$, k = 0,1,2,…. , |x|<1

(2.3d)

Hệ quả : $S(n,k) = \frac{n!}{k!}\sum \frac{1}{r_1!r_2!...r_k!}$ với $r_i \in N^*$ và $r_1 + r_2 + r_k = n$

Định lý 2.3.5 : $f_k(x) = \sum_{n=k}^{\infty} S(n,k)x^n = \frac{x^k}{(1-x)(1-2x)...(1-kx)}$

với k = 1,2,…. , |x|<1 (2.3e)

Hệ quả : $S(n,k) = \sum_{c_1+c_2+...+c_k=n-k} 1^{c_1}2^{c_2}...k^{c_k}$ với $c_i \in N$

Định lý 2.3.6 : Với k ,n ∈ N ,ta có :

$$S(n+1,k+1) = \sum_{r=k}^{n} C(n,r)S(r,k) \quad (2.3f)$$

Định lý 2.3.7: Cho $n \ge 1$ và $1 \le k \le n$, ta có :

$$k^{n-k} \le S(n,k) \le C(n-1,k-1).k^{n-k} \quad (2.3g)$$

Định lý 2.3.8 : Với $n \in N^*$. Ta có :

a) $$[x+y]^n = \sum_{r=0}^{n} C(n,r)[x]^{n-r}[y]^r \quad (2.3h)$$

b) $$[x+y]_n = \sum_{r=0}^{n} C(n,r)[x]_{n-r}[y]_r \quad (2.3i)$$

Định lý 2.3.9 :

a) $$C(i+j,i)s(n,i+j)=\sum_k C(n,k)s(k,i)s(n-k,j) \quad (2.3j)$$

b) $$C(i+j,i)S(n,i+j)=\sum_k C(n,k)S(k,i)S(n-k,j) \quad (2.3k)$$

2.3.3 Các tính chất

Tính chất 2.3.1 : Cho n và c là các số nguyên không âm . Khi đó :

$$S(n+1,c+1) = \sum_{k=0}^{n} (c+1)^{n-k} S(k,c) \quad (2.3l)$$

Tính chất 2.3.2 : Cho n và c là các số nguyên không âm . Thì :

$$S(n+c+1,c) = \sum_{k=0}^{c} k.S(n+k,k) \quad (2.3m)$$

2.4 QUAN HỆ GIỮA SỐ STIRLING LOẠI 1 VÀ SỐ STIRLING LOẠI 2

Định lý 2.4.1 : Cho n , m là các số tự nhiên . Khi đó :

$$\sum_{k=n}^{m} S(m,k)s(k,n)=\delta_{mn}$$

Với $$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{khi } m = n \\ 0 & \text{khi } m \neq n \end{cases}$$

2.5 TÍNH CHIA HẾT CHO SỐ NGUYÊN TỐ CỦA SỐ STIRLING LOẠI 2

Định lý 2.5.1 : Nếu p là số nguyên tố thì p | S(p,k) với $2 \le k \le p - 1$. Hơn nữa , $p \nmid S(p,1)$ và $p \nmid S(p,p)$ (2.5a)

Định lý 2.5.2 : Nếu p là số nguyên tố thì p| S(p+1,k+1) với mọi $2 \le k \le p - 1$. Hơn nữa , $S(p+1,2) \equiv 1 \bmod p$ (2.5b)

Định lý 2.5. 3: Nếu p số nguyên tố thì p | S(p+j,k+j) với mọi $1 \le j \le p - 2$ và $2 \le k \le p - j$. Hơn nữa , $S(p+j, j+1) \equiv 1 \bmod p$ với mọi $2 \le j \le p - 2$. (2.5c)

CHƯƠNG 3
ỨNG DỤNG CỦA SỐ STIRLING

3.1 Ứng dụng giải một số bài toán tổ hợp

Bài toán 3.1.1 : Đếm số cách phân phối n vật phân biệt vào m hộp nếu thỏa mãn :

a) m hộp giống nhau và mỗi hộp phải có ít nhất một vật .
b) m hộp giống nhau và cho phép có hộp trống .

Các hộp đều phân biệt và mỗi hộp phải có ít nhất một vật

Bài toán 3.1.2 : Chứng minh rằng số cách đặt k quân xe trên 1 tam giác vuông cân có độ dài cạnh bên là m sao cho không có cuộc tấn công nào (nghĩa là 2 quân xe bất kỳ không cùng nằm trên 1 hàng hoặc 1 cột) là S(m+1, m+1- k) với $1 \le k \le m$.

Bài toán 3.1.3 : Chứng minh rằng số cách xếp n người vào k bàn tròn giống hệt nhau sao cho không có bàn nào trống chính là s’(n,k) với s’(n,k) là số Stirling loại 1 không dấu và $1 \le k \le n$

Áp dụng : Có 10 người và 4 cái bàn tròn giống hệt nhau . Hỏi có bao nhiêu cách xếp 10 người vào 4 bàn trên sao cho :

a) Có 1 bàn trống .
b) Có 2 bàn trống .

Bài toán 3.1.4 : Có bao nhiêu cách để phân tích số 7590 thành

a) Tích của 2 số tự nhiên lớn hơn 1.
b) Tích của ba số tự nhiên lớn hơn 1 .

3.2. Ứng dụng giải các bài toán giải tích :

Bài toán 3.2.1 : Chứng minh rằng với $n \in N$:

a) $S(n,n-1) = C(n,2)$ với $n \geq 2$.

b) $S(n,2) = 2^{n-1} - 1$ với $n \geq 2$.

c) $S(n,3) = \frac{1}{6}\left(3^n - 3.2^n + 3\right)$ với $n \geq 3$.

d) $S(n , n - 2) = C(n,3) + 3C(n,4)$ với $n \geq 2$.

e) $S(n,4) = \frac{1}{24}\left[4^n - 4.3^n + 6.2^n - 4\right]$

Bài toán 3.2.2 : Với $n \in N^*$. Chứng minh rằng :

a) $S(n+1,k) = \sum_{r=k-1}^{n} k^{n-r} S(r,k-1)$ (3.2a)

b) $S(n+1,k) = \sum_{r=k-1}^{n} r.S(n+r-k,r)$ với $k \leq n$ (3.2b)

Bài toán 3.2.3: Với $k \in N^*$, cho $Y_k(t) = \sum_{n=0}^{\infty} S(n,k)\frac{t^n}{n!}$. Chứng minh rằng : $Y_k(t) = e^{kt}\int_0^t e^{-km} Y_{k-1}(m)dm$ (3.2c)

Bài toán 3.2.4 : Cho $m \geq n$; $m , n \in N^*$ và $c = const$. Chứng minh rằng :

a) $\left(\frac{d}{dt}\right)^n \frac{(e^t + c)^m}{m!} = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)\frac{(e^t + c)^{m-k}}{(m-k)!} e^{kt}$ (3.2d)

b) $\frac{n^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{S(n,n-k)}{k!}$ (3.2e)

Bài toán 3.2.5 : Chứng minh rằng :

$$S(n,k) = \frac{w!}{(k)_w} \sum_{r=k-w}^{n-w} C(n,r)S(n-r,w)S(r,k-w) \text{ với } 0 \leq w \leq k$$

Với $(k)_w = (k-w+1)(k-w+2) \ldots k$ (3.2f)

Bài toán 3.2.6 : Đặt $\hat{D} \equiv xD \equiv x\frac{d}{dx}$. Cho hàm số :

$$f(n,x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^n x^i}{i!} \text{ với n là số tự nhiên}$$

Khi đó với $r , n \in N$ và $x \in R$. Ta có :

a) $\hat{D}^n e^x = e^x \sum_{r=1}^{n} S(n,r).x^r$ (3.2g)

b) $\hat{D}^n e^x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^n x^i}{i!}$ (3.2h)

c) $f(n,x) = e^x \sum_{r=1}^{n} S(n,r).x^r = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^n x^i}{i!}$ (3.2i)

3.3 Sử dụng phần mềm Maple để tính số Stirling :

3.3.1 Sử dụng phần mềm Maple để tính số Stirling loại 2 :

3.3.2 Sử dụng phần mềm Maple để tính số Stirling loại 1 :

KẾT LUẬN

Luận văn đã trình này một cách có hệ thống tổng quan về lý thuyết tổ hợp , do nội dung chính của luận văn ít liên quan đến các cấu hình tổ hợp nên tôi chỉ cho một số ví dụ , ngoài ra trong chương 1 tôi có trình bày một số khái niệm có mà tôi có sử dụng trong 2 chương còn lại .

Ở chương 2 , tôi đã đưa ra định nghĩa , các tính chất , các định lý , hàm sinh của các số Stirling và chứng minh một cách khá chi tiết các định lý trên . Phương pháp chủ yếu để chứng minh là phương pháp quy nạp .

Ở chương 3 , tôi đã nghiên cứu và đưa ra một số bài toán ứng dụng đa dạng cho những lý thuyết đã được trình bày ở chương 2 . Đặc biệt , trong chương này có đưa ra một số bài toán về phân hoạch tập hợp và chứng minh bài toán xếp vị trí cho n người vào k bàn tròn .

Kết quả của luận văn nhằm nâng cao chất lượng dạy và học toán tổ hợp nói riêng và toán rời rạc nói chung, nhằm phát triển tư duy toán học cho học sinh phổ thông và đặc biệt là học sinh chuyên toán có một tư liệu tham khảo bổ ích , bởi vì tổ hợp được xem là môn học khó cho học sinh ở cấp học này .

Cuối cùng , tôi xin được nêu lên một số vấn đề có thể mở rộng nghiên cứu tiếp theo về số Stirling trong tương lai đó là :

- Số poly – Stirling .
- Số q – stirling loại 2 .