BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

HUỲNH THỊ THÚY PHƯỢNG

ỨNG DỤNG PHẦN MỀM MATHEMATICA CHO LỜI GIẢI CỦA BÀI TOÁN TRUYỀN NHIỆT

CHUYÊN NGÀNH: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
MÃ SỐ: 60.46.40

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Đà Nẵng – Năm 2012

Công trình đã được hoàn thành tại
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

Người hướng dẫn khoa học: TS. LÊ HẢI TRUNG

Phản biện 1: TS. LÊ HOÀNG TRÍ

Phản biện 2: PGS.TS. TRẦN ĐẠO DÕNG

Luận văn đã được bảo vệ tại Hội đồng chấm Luận văn tốt nghiệp Thạc sĩ Khoa học họp tại Đại học Đà Nẵng vào ngày 01 tháng 12 năm 2012

Có thể tìm luận văn tại:

- Trung tâm Thông tin-Học liệu, Đại học Đà Nẵng
- Thư viện trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Bài toán truyền nhiệt là một bộ phận cấu thành nên Lý thuyết phương trình đạo hàm riêng, là mô hình diễn tả các quá trình truyền nhiệt và tiêu tán nhiệt trong không gian (mà ta lựa chọn là đẳng hướng). Với sự phát triển mạnh mẽ của công nghệ thông tin thì việc ứng dụng một phần mềm toán học cho bài toán truyền nhiệt là một công việc ý nghĩa và rất tự nhiên.

Với mong muốn mang lại một sự thú vị cũng như một công cụ và phương thức lựa chọn cho bản thân và các đối tượng có sự quan tâm đến bài toán truyền nhiệt nên tác giả đã lựa chọn đề tài "ỨNG DỤNG PHẦN MỀM MATHEMATICA CHO LỜI GIẢI CỦA BÀI TOÁN TRUYỀN NHIỆT" cho luận văn thạc sĩ của mình.

2. Mục đích nghiên cứu

Nghiên cứu và sử dụng phần mềm Mathematica để tìm ra lời giải cho bài toán truyền nhiệt.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Nghiên cứu và sử dụng phần mềm Mathematica để tìm ra lời giải cho bài toán truyền nhiệt.

Đối tượng nghiên cứu: Phương trình truyền nhiệt, phần mềm Mathematica.

Phạm vi nghiên cứu: Xem xét và tìm ra lời giải của phương trình truyền nhiệt trong không gian một chiều, hai chiều và ba chiều trong lớp hàm hữu hạn.

4. Phương pháp nghiên cứu

Mô tả nghiệm của bài toán truyền nhiệt bằng công thức Poisson dưới dạng tổng của thế vị nhiệt thể tích và thế vị nhiệt bề mặt, từ đó ta nhận được nghiệm của bài toán.

Các kiến thức được sử dụng trong luận văn thuộc các lĩnh vực: Lý thuyết phương trình đạo hàm riêng, Giải tích, Phương trình vi phân,...

5. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài

Đề tài có giá trị về mặt lý thuyết. Có thể sử dụng đề tài như là tài liệu tham khảo đối với sinh viên ngành Toán và các đối tượng quan tâm đến bài toán truyền nhiệt.

6. Cấu trúc của luận văn

Ngoài phần mở đầu, kết luận, tài liệu tham khảo, luận văn gồm 3 chương:

Chương 1 Trình bày một số khái niệm, định nghĩa, định lý và chứng minh sự tồn tại và duy nhất nghiệm của phương trình truyền nhiệt đồng thời giới thiệu phương pháp tìm nghiệm của phương trình truyền nhiệt bằng công thức Poisson.

Chương 2 Giới thiệu tổng quan về phần mềm Mathematica và các tính năng cụ thể được sử dụng phổ biến trong chương 3.

Chương 3 Ứng dụng của phần mềm Mathematica trong việc tìm nghiệm của phương trình truyền nhiệt bằng cách lập các câu lệnh và hàm thực hiện cho công thức Poisson.

CHƯƠNG 1

BÀI TOÁN TRUYỀN NHIỆT

1.1 Phương trình khuếch tán

Các quá trình phân bổ nhiệt độ hoặc khuếch tán hạt trong môi trường được mô tả bằng phương trình khuếch tán sau đây:

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \mathbf{div}(p\mathbf{grad}u) - qu + F(x,t), \tag{1.1}$$

ở đây các toán tử **div** và **grad**u được xác định bởi:

$$\mathbf{div}(p\mathbf{grad}u) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(p\frac{\partial u}{\partial x_i}).$$

Ta cần đi xây dựng phương trình truyền nhiệt. Kí hiệu $u(x,t)$ là nhiệt độ của môi trường tại điểm x vào thời điểm t (x là một điểm trong không gian với số chiều hữu hạn tùy ý).Ta mặc định môi trường đã cho là đẳng hướng và kí hiệu $\rho(x), c(x)$ và $k(x)$ lần lượt là mật độ, nhiệt dung riêng, và hệ số dẫn nhiệt tại điểm x. $F(x,t)$ là cường độ của nguồn nhiệt tại điểm x vào thời điểm t. Ta coi lượng nhiệt cân bằng trong một thể tích V bất kì sau khoảng thời gian $(t, t+\triangle t)$. Kí hiệu S là biên của V và n là hướng truyền nhiệt đối với S. Theo định luật Furier qua mặt S vào V sẽ có lượng nhiệt truyền vào:

$$Q_1 = \int_S k\frac{\partial u}{\partial n}dS\Delta t = \int_S (k\mathbf{grad}u, n)dS\Delta t. \tag{1.2}$$

theo công thức Gauss-Ostragradxki:

$$Q_1 = \int_V div(k\mathbf{grad}u)dx\Delta t. \tag{1.3}$$

Khi đó lượng nhiệt sinh ra trong V là:

$$Q_2 = \int_V F(x,t)dx\Delta t. \tag{1.4}$$

Khi đó nhiệt độ trong V sau khoảng thời gian $(t, t+\Delta t)$ là:

$$u(x, t+\Delta t) - u(x,t) \simeq \frac{\partial u}{\partial t}\Delta t.$$

Khi đó nhiệt độ cần thiết để cho vật V thay đổi nhiệt độ là:

$$Q_3 = \int_V c\rho\frac{\partial u}{\partial t}dx\Delta t. \tag{1.5}$$

Nhưng $Q_3 = Q_1 + Q_2$, vì thế:

$$\int_V [\mathbf{div}(k\mathbf{grad}u) + F - c\rho\frac{\partial u}{\partial t}dx\Delta t] = 0.$$

Do V có thể lấy tùy ý nên ta nhận được phương trình truyền nhiệt:

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \mathbf{div}(k\mathbf{grad}u) + F(x,t). \tag{1.6}$$

nếu môi trường là thuần nhất thì c, ρ, k là các hằng số. Khi đó (1.6) viết được dưới dạng:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\Delta u + f, \tag{1.7}$$

với $a^2 = \dfrac{k}{c\rho}, f = \dfrac{F}{c\rho}, \Delta u = \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$. Khi đó phương trình (1.7) được gọi là phương trình truyền nhiệt.

1.2 Bài toán Cauchy cho phương trình truyền nhiệt

Bài toán Cauchy cho phương trình truyền nhiệt nằm ở việc xác định hàm $u(t) \in C^2((-\infty, +\infty) \otimes (0, \infty))$, thỏa mãn phương trình:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \tag{1.8}$$

với điều kiện đầu:

$$u\mid_{t=0} = u_0(x). \tag{1.9}$$

1.3 Giá trị max và min nghiệm của phương trình thuần nhất

Định lý 1.1. *Nếu hàm $u(x,t)$ thỏa mãn phương trình truyền nhiệt thuần nhất*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \tag{1.10}$$

trong miền $G_{l,T} = (-l,l) \otimes (0,T)$ và liên tục trong $\overline{G}_{l,T} = [-l,l] \otimes [0,T]$, thì nó nhận giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên phần biên $S_{l,T}$ được cấu thành từ đoạn $[-l,l]$ trên trục Ox và đoạn $\{x = -l, 0 \le t \le T\} \cup \{x = l, 0 \le t \le T\}$.

1.4 Định lý duy nhất nghiệm cho phương trình thuần nhất

Định lý 1.2. *Nghiệm của bài toán đầu trong lớp hàm hữu hạn với $-\infty < x < \infty$ và $t > 0$ là duy nhất.*

1.5 Công thức Poisson

Nghiệm của bài toán truyền nhiệt sau đây:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \tag{1.11}$$

với điều kiện

$$u(x,t)\mid_{t=0} = u_0(x). \tag{1.12}$$

tìm được bằng công thức Poisson như sau:

$$u(x,t) = \int\limits_0^t [\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y,\tau)e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)}}dy]d\tau + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}}u_0(y)dy. \tag{1.13}$$

Ta đưa vào kí hiệu sau đây:

$$G(a,x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}},$$

khi đó công thức (1.13) trong trường hợp (không gian) một chiều được viết dưới dạng:

$$u(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(a, x-y, t-s) f(y,s) dy ds + \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(a, x-y, t) u_0(y) dy. \tag{1.14}$$

Công thức (1.14) được dùng trong trường hợp n chiều (không gian n chiều) có dạng:

$$u(x_1, x_2, ..., x_n, t) =$$

$$= \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} ... \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_n(a, x-y, t-s) f(y_1, y_2, ..., y_n, s) dy_1 dy_2 ... dy_n ds +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} ... \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_n(a, x-y, t-s) u_0(y_1, y_2, ..., y_n, s) dy_1 dy_2 ... dy_n,$$

trong đó,

$$G_n(a, x-y, t-s) = G_n(a, x_1-y_1, t-s) G_n(a, x_2-y_2, t-s) ... G_n(a, x_n-y_n, t-s).$$

CHƯƠNG 2

MỘT VÀI NÉT SƠ BỘ VỀ PHẦN MỀM MATHEMATICA

2.1 Giới thiệu sơ bộ về Mathematica

Mathematica là ngôn ngữ tích hợp đầy đủ nhất các tính toán kĩ thuật. Là dạng ngôn ngữ dựa trên nguyên lý xử lý các dữ liệu đặc trưng.

Nhờ khả năng mô hình hóa và mô phỏng, Mathematica không chỉ được ứng dụng trong các lĩnh vực vật lý, kỹ thuật và toán mà còn được mở rộng ứng dụng trong lĩnh vực phức tạp khác.

Phiên bản 8.0 là phiên bản mới nhất hiện nay.

2.2 Giao diện tương tác của Mathematica

Mathematica đưa ra một giao diện rất thân thiện với người sử dụng được đặt tên là bản ghi (notebook - thường được gọi tắt là nb).

2.3 Các tính năng của Mathematica

Khả năng tính toán bằng số.

Khả năng tính toán với biến tượng trưng.

Khả năng đồ họa hai chiều và ba chiều.

2.4 Một số hàm thông dụng trong Mathematica

Trong Mathematica	Biểu thức toán
$Sqrt[x]$	$\sqrt{x}$
$Log[x]$	$ln(x)$
$Sin[x]$	$sin(x)$
$Cos[x]$	$cos(x)$
$Tan[x]$	$tan(x)$
$Log[a, b]$	$\log_a b$
$Arcsin[x]$	$arcsin(x)$
$Exp[x]$	e^x
$Factoria[n], n!$	$n!$
$Mod[n, m]$	Số dư của $\frac{n}{m}$
$FactorInteger$	Phân tích ra thừa số nguyên tố của n
$Abs[x]$	Giá trị tuyệt đối của x
x^y	x^y
$x^{1/n}$	$\sqrt[n]{x}$
$x * y$ hoặc xy	x nhân y
$Sinh[x]$	Hàm Hype sin
$Cosh[x]$	Hàm Hype cos
$Tanh[x]$	Hàm Hype $tang$
Pi	số π
$Limit[f(x), x \rightarrow x_0]$	Tính giới hạn
Sum[biểu thức, $\{i, i_{min}, i_{max}\}$]	Tính tổng
$D[f(x), x]$	Tính đạo hàm
$Intergrate[f(x), x]$	Tính nguyên hàm
$Intergrate[f(x), \{x, a, b\}]$	Tính tích phân xác định
$Solve[f(x) == 0, x]$	Giải phương trình
$Solve[\{f_1 == 0, f_2 == 0\}, \{x, y\}]$	Giải hệ phương trình
$Simplify[f(x), x]$	Đơn giản biểu thức
$Plot[f(x), \{x, a, b\}]$	Vẽ đồ thị

Ngoài ra Mathematica còn có tính năng khai báo hàm số mới .

CHƯƠNG 3

SỬ DỤNG PHẦN MỀM MATHEMATICA TÌM NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN TRUYỀN NHIỆT

3.1 Nghiệm của phương trình truyền nhiệt trong $\mathbb{R}^1$

3.1.1 Thiết lập các hàm và câu lệnh trong $\mathbb{R}^1$

- Định nghĩa hàm G

$$G[a,x,t]$$
$$\frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}}{2a\sqrt{\pi}\sqrt{t}}$$

- Các hàm tính thế vị nhiệt bề mặt

$$\text{V1a}[a\_,u\_] := \text{Simplify}[\int_{-\infty}^{\infty} G[a,x-y,t]*u[y]\,dy,\ t>0\ \&\&\ x\in \text{Reals}]$$

$$\text{V1a'}[a\_,u\_] := \text{Simplify}[\int_{-\infty}^{\infty} G[a,y,t]*u[y]\,dy,\ t>0\ \&\&\ x\in \text{Reals}]$$

- Các hàm tính thế vị nhiệt thể tích

$$\text{V2a}[a\_,f\_] := \text{Simplify}[\int_{-\infty}^{\infty} G[a,x-y,t-s]*f[y,s]\,dy,\ 0<s<t$$

$$\&\& \ x \in \text{Reals}]$$

$$\text{V2a'}[a\_, f\_] := \text{Simplify}[\int_{-\infty}^{\infty} G[a, y, s] * f[x-y, t-s] \, dy, \ 0 < s < t$$

$$\&\& \ x \in \text{Reals}]$$

$$\text{V2b}[a\_, f\_] := \text{Simplify}[\int_{-\infty}^{\infty} G[a, x-y, s] * f[y, t-s] \, dy, \ 0 < s < t$$

$$\&\& \ x \in \text{Reals}]$$

$$\text{V2c}[a\_, f\_] := \text{Simplify}[\int_{-\infty}^{\infty} G[a, y, t-s] * f[x-y, s] \, dy, \ 0 < s < t$$

$$\&\& \ x \in \text{Reals}]$$

- Lệnh gán để tìm thế vị nhiệt thể tích

$$\text{Inp1}[V\_] := \text{Simplify}[\int_{0}^{t} V dS, t > 0 \ \&\& \ x \in \text{Reals}]$$

$$\text{V3a}[a\_, f\_] := \text{Inp1}[\text{V2a}[a, f]]$$

$$\text{V3c}[a\_, f\_] := \text{Inp1}[\text{V2c}[a, f]]$$

$$\text{V3b}[a\_, f\_] := \text{Inp1}[\text{V2b}[a, f]]$$

$$\text{V3a'}[a\_, f\_] := \text{Inp1}[\text{V2a'}[a, f]]$$

- Hàm kiểm tra tính chính xác nghiệm đã tìm

$\text{k1} := \text{Simplify}[(D[\#4, t] - \#1^2 * (D[\#4, x1, x1] + D[\#4, x2, x2] +$

$+D[\#4, x3, x3]) - \#2), x1 \in \text{Reals}; x2 \in \text{Reals}; x3 \in \text{Reals}]\&$

$\text{k0} := \text{Simplify}[(\text{Limit}, \#4, t \to 0, \text{Direction} \to -1] - \#3), x1 \in$ Reals;

$; x2 \in \text{Reals}]; x3 \in \text{Reals}]\&$

$\text{k} := \{\text{k1}[\#1, \#2, \#3, \#4], \text{k0}[\#1, \#2, \#3, \#4]\}\&;$

3.1.2 Áp dụng để giải các bài toán Cauchy trong $\mathbb{R}^1$

Ví dụ 3.1. Tìm nghiệm của bài toán sau đây:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{-t}\cos x; u\mid_{t=0} = \cos x.$$

Nhập các giá trị ban đầu f11, u11, a11:

f11$[x_, t_] := \exp[-t] * \cos x;$

u11$[x_] := \cos x;$

a11 := 1;

Tính thế vị nhiệt bề mặt bằng cách gán giá trị a11, u11 cho hàm V1a':

V11$[x_, t_] :=$ V1a'[a11, u11]

$e^{-4t}\cos x$

Tính thế vị nhiệt thể tích bằng cách gán giá trị a11, f11 cho hàm V3c:

V11'$[x\_, t\_] :=$ V3c[a11, f11]

$\frac{1}{3}e^{-4t}(-1 + e^{3t})\cos x$

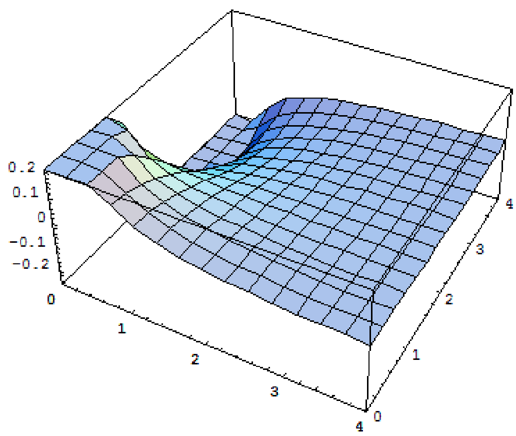
Tổng thế vị nhiệt bề mặt và thế vị nhiệt thể tích là nghiệm của bài toán:

$e^{-4t}\cos x + \frac{1}{3}e^{-4t}(-1 + e^{3t})\cos x$

Kiểm tra tính chính xác nghiệm của bài toán:

k[a11,f11$[x1, t]$, a11$[x1]$, V$[x1, t]$]

$\{0, 0\}$



Hình 3.1: Đồ thị của hàm $e^{-4t}\cos x + \frac{1}{3}e^{-4t}(-1 + e^{3t})\cos x$.

3.2 Nghiệm của phương trình truyền nhiệt trong $\mathbb{R}^2$

3.2.1 Thiết lập các hàm và câu lệnh trong $\mathbb{R}^2$

- Định nghĩa hàm G

$$G[a, x, t]$$
$$\frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}}{2a\sqrt{\pi}\sqrt{t}}$$

- Các hàm tính thế vị nhiệt bề mặt

$$\text{V11a}[a\_, u\_] := \text{Simplify}[\text{Integrate}[\ G[a, x1-y1, t]*G[a, x2-y2, t]*$$
$$*u[y1, y2], \{y1, -\infty, \infty\}, \{y2, -\infty, \infty\}], t > 0]$$

$$\text{V11b}[a\_, u\_] := \text{Simplify}[\text{Integrate}[\ G[a, x1-y1, t]*G[a, y2, t]*$$
$$*u[y1, x2-y2], \{y1, -\infty, \infty\}, \{y2, -\infty, \infty\}], t > 0]$$

$$\text{V11c}[a\_, u\_] := \text{Simplify}[\text{Integrate}[\ G[a, y1, t]*G[a, x2-y2, t]*$$
$$*u[x1-y1, y2], \{y1, -\infty, \infty\}, \{y2, -\infty, \infty\}], t > 0]$$

$$\text{V11d}[a\_, u\_] := \text{Simplify}[\text{Integrate}[\ G[a, y1, t]*G[a, y2, t]*$$
$$*u[x1-y1, x2-y2], \{y1, -\infty, \infty\}, \{y2, -\infty, \infty\}], t > 0]$$

- Các hàm tính thế vị nhiệt thể tích

$\text{V22a}[a\_, f\_] :=$
$:= \text{Simplify}[\text{Integrate}[\ G[a, x1-y1, t-s]*G[a, x2-y2, t-s]*$

$$*f[y1, y2, s], \{y1, -\infty, \infty\}, \{y2, -\infty, \infty\}], 0 < s < t]$$

$\text{V22b}[a\_, f\_] := \text{Simplify}[\text{Integrate}[\ G[a, x1-y1, s]*G[a, x2-y2, s]*$

$$*f[y1, y2, t-s], \{y1, -\infty, \infty\}, \{y2, -\infty, \infty\}], 0 < s < t]$$

$\mathrm{V22c}[a\_, f\_] := \mathrm{Simplify}[\mathrm{Integrate}[\ G[a, x1-y1, t-s]*G[a, y2, t-s]*$

$$*f[y1, x2-y2, t-s], \{y1, -\infty, \infty\}, \{y2, -\infty, \infty\}], 0 < s < t]$$

$\mathrm{V22d}[a\_, f\_] := \mathrm{Simplify}[\mathrm{Integrate}[\ G[a, x1-y1, s]*G[a, y2, s]*$

$$*f[y1, x2-y2, t-s], \{y1, -\infty, \infty\}, \{y2, -\infty, \infty\}], 0 < s < t]$$

$\mathrm{V22e}[a\_, f\_] := \mathrm{Simplify}[\mathrm{Integrate}[\ G[a, y1, t-s]*G[a, x2-y2, s]*$

$$*f[x1-y1, y2, s], \{y1, -\infty, \infty\}, \{y2, -\infty, \infty\}], 0 < s < t]$$

$\mathrm{V22f}[a\_, f\_] := \mathrm{Simplify}[\mathrm{Integrate}[\ G[a, y1, s]*G[a, x2-y2, s]*$

$$*f[x1-y1, y2, t-s], \{y1, -\infty, \infty\}, \{y2, -\infty, \infty\}], 0 < s < t]$$

$\mathrm{V22g}[a\_, f\_] := \mathrm{Simplify}[\mathrm{Integrate}[\ G[a, y1, t-s]*G[a, y2, t-s]*$

$$*f[x1-y1, x2-y2, s], \{y1, -\infty, \infty\}, \{y2, -\infty, \infty\}], 0 < s < t]$$

$\mathrm{V22h}[a\_, f\_] := \mathrm{Simplify}[\mathrm{Integrate}[\ G[a, y1, t-s]*G[a, y2, s]*$

$$*f[x1-y1, x2-y2, t-s], \{y1, -\infty, \infty\}, \{y2, -\infty, \infty\}], 0 < s < t]$$

- Lệnh gán để tìm thế vị nhiệt thể tích

$$\mathrm{Inp2}[V\_] := \mathrm{Simplify}[\mathrm{Integrate}[V, \{s, 0, t\}], t > 0]$$

$$\mathrm{V33a}[a\_, f\_] := \mathrm{Inp2}[\mathrm{V22a}[a, f]]; \mathrm{V33e}[a\_, f\_] := \mathrm{Inp2}[\mathrm{V22e}[a, f]];$$
$$\mathrm{V33b}[a\_, f\_] := \mathrm{Inp2}[\mathrm{V22b}[a, f]]; \mathrm{V33f}[a\_, f\_] := \mathrm{Inp2}[\mathrm{V22f}[a, f]];$$
$$\mathrm{V33c}[a\_, f\_] := \mathrm{Inp2}[\mathrm{V22c}[a, f]]; \mathrm{V33g}[a\_, f\_] := \mathrm{Inp2}[\mathrm{V22g}[a, f]];$$
$$\mathrm{V33d}[a\_, f\_] := \mathrm{Inp2}[\mathrm{V22d}[a, f]]; \mathrm{V33h}[a\_, f\_] := \mathrm{Inp2}[\mathrm{V22h}[a, f]];$$

- Hàm kiểm tra tính chính xác nghiệm đã tìm
  $\mathrm{k1} := \mathrm{Simplify}[(D[\#4, t] - \#1^2 * (D[\#4, x1, x1] + D[\#4, x2, x2]+$

$$+D[\#4, x3, x3]) - \#2), x1 \in \mathrm{Reals}; x2 \in \mathrm{Reals}; x3 \in \mathrm{Reals}]\&;$$

k0 := Simplify[(Limit, #4, t → 0, Direction → −1] − #3), $x1$ ∈ Reals;

; $x2$ ∈ Reals]; $x3$ ∈ Reals]&;

k := {k1[#1, #2, #3, #4], k0[#1, #2, #3, #4]}&;

Ví dụ 3.2. Tìm nghiệm của bài toán sau đây

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 4\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = e^{-t};$$
$$u\,|_{t=0} = \cos x \sin y.$$

Nhập các giá trị ban đầu f21, u21, a21:

f21[$x1\_, x2\_, t\_$] := Exp[$-t$];

u21[$x1\_, x2\_$] := $Cos[x1] * Sin[x2]$;

a21 := 2;

Tính thế vị nhiệt bề mặt bằng cách gán giá trị a21, u21, f21 cho một trong các hàm V11a, V11b,V11c, V11d:

V11a[a21, u21]

$$-\frac{1}{4}ie^{-8t-i(x1+x2)}(1+e^{2ix1})(-1+e^{2ix2})$$

V11b[a21, u21]

$$\frac{1}{2}ie^{-8t-ix1}(1+e^{2ix1})Sin[x2]$$

V11c[a21, u21]

$$-\frac{1}{2}ie^{-8t-ix2}(-1+e^{2ix2})Cos[x1]$$

V11d[a21, u21]

$$e^{-8t}Cos[x1]Sin[x2]$$

Ta chọn thế vị nhiệt bề mặt là V11d vì đây là kết quả gọn nhất, do đó:

V21'[$x1\_, x2\_, t\_$] := $e^{-8t}Cos[x1]Sin[x2]$;

Tính thế vị nhiệt thể tích bằng cách gán giá trị f21, u21, f21 cho một trong hai hàm V33a hoặc V33h ta nhận được kết quả:

V33a[a21, f21]

$$1 - e^{-t}$$

V33h[a21, f21]

$$1 - e^{-t}$$

Ta có được kết quả của thế vị nhiệt thể tích:

V21"[$x1\_, x2\_, t\_$] := $1 - e^{-t}$

Tổng thế vị nhiệt bề mặt và thế vị nhiệt thể tích là nghiệm của bài toán:

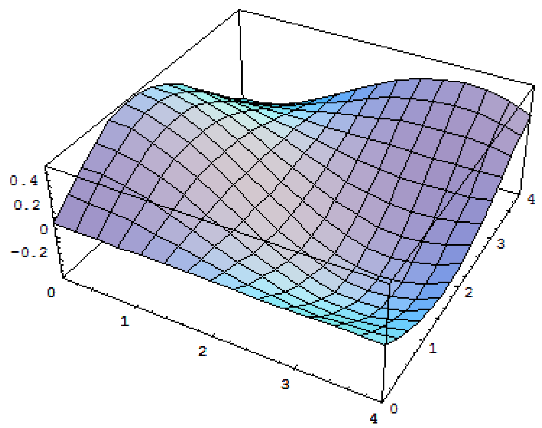
V21[$x1\_, x2\_, t\_$] := (V21'[$x1, x2, t$]+V21"[$x1, x2, t$])/.$\{x1 \to x, x2 \to y\}$

$1 - e^{-t} + e^{-8t}Cos[x1]Sin[x2]$

Kiểm tra tính chính xác nghiệm của bài toán:

k[a21,f21[$x1, x2, t$], u21[$x1, x2$], V21[$x1, x2, t$]]

$\{0, 0\}$



Hình 3.2: Đồ thị của hàm $1 - e^{-t} + e^{-8t}Cos[x1]Sin[x2]$.

3.3 Nghiệm của phương trình truyền nhiệt trong $\mathbb{R}^3$

3.3.1 Thiết lập các hàm và câu lệnh trong $\mathbb{R}^3$

- Định nghĩa hàm G

$$G[a, x, t]$$

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}}{2a\sqrt{\pi}\sqrt{t}}$$

- Các hàm tính thế vị nhiệt bề mặt
  V111a[$a\_, u\_$] :=
  := Simplify[Integrate[$G[a, x1 - y1, t] * G[a, x2 - y2, t] * G[a, x3 - y3, t]*$

  $*u[y1, y2, y3], \{y1, -\infty, \infty\}, \{y2, -\infty, \infty\}, \{y3, -\infty, \infty\}], t > 0]$

  V111b[$a\_, u\_$] :=
  := Simplify[Integrate[$G[a, x1 - y1, t] * G[a, x2 - y2, t] * G[a, y3, t]*$

  $*u[y1, y2, x3 - y3], \{y1, -\infty, \infty\}, \{y2, -\infty, \infty\}, \{y3, -\infty, \infty\}], t > 0]$

  V111c[$a\_, u\_$] :=
  := Simplify[Integrate[$G[a, x1 - y1, t] * G[a, y2, t] * G[a, x3 - y3, t]*$

  $*u[y1, x2 - y2, y3], \{y1, -\infty, \infty\}, \{y2, -\infty, \infty\}, \{y3, -\infty, \infty\}], t > 0]$

  V111d[$a\_, u\_$] :=
  := Simplify[Integrate[$G[a, x1 - y1, t] * G[a, y2, t] * G[a, y3, t]*$

  $*u[y1, x2 - y2, x3 - y3], \{y1, -\infty, \infty\}, \{y2, -\infty, \infty\}, \{y3, -\infty, \infty\}],$

  $, t > 0]$

V111e$[a_, u_]$:=
:= Simplify[Integrate[$G[a, y1, t] * G[a, x2 - y2, t] * G[a, x3 - y3, t] *$

$* u[x1 -$
$y1, y2, y3], \{y1, -\infty, \infty\}, \{y2, -\infty, \infty\}, \{y3, -\infty, \infty\}], t > 0]$

V111f$[a_, u_]$:=
:= Simplify[Integrate[$G[a, y1, t] * G[a, x2 - y2, t] * G[a, y3, t] *$

$* u[x1 - y1, y2, x3 -$
$y3], \{y1, -\infty, \infty\}, \{y2, -\infty, \infty\}, \{y3, -\infty, \infty\}],$

$, t > 0]$

V111g$[a_, u_]$:=
:= Simplify[Integrate[$G[a, y1, t] * G[a, y2, t] * G[a, x3 - y3, t] *$

$* u[x1 - y1, x2 - y2, x3 - y3], \{y1, -\infty, \infty\}, \{y2, -\infty, \infty\},$

$, \{y3, -\infty, \infty\}], t > 0]$

V111h$[a_, u_]$:=
:= Simplify[Integrate[$G[a, x1, t] * G[a, y2, t] * G[a, y3, t] *$

$* u[x1 - y1, x2 - y2, x3 - y3], \{y1, -\infty, \infty\}, \{y2, -\infty, \infty\},$

$, \{y3, -\infty, \infty\}], t > 0]$

- Các hàm tính thế vị nhiệt thể tích

V222a$[a_, f_]$:=
:= Simplify[Integrate[$G[a, x1 - y1, t - s] * G[a, x2 - y2, t - s] *$

$* G[a, x3 - y3, t - s] * f[y1, y2, y3, s], \{y1, -\infty, \infty\}, \{y2, -\infty, \infty\},$

$, \{y3, -\infty, \infty\}], 0 < s < t]$

$$\mathrm{V222b}[a\_, f\_] :=$$
$$:= \mathrm{Simplify}[\mathrm{Integrate}[\ G[a, x1 - y1, t - s] * G[a, x2 - y2, s]*$$
$$*G[a, x3 - y3, s] * f[y1, y2, y3, t - s], \{y1, -\infty, \infty\}, \{y2, -\infty, \infty\},$$
$$, \{y3, -\infty, \infty\}], 0 < s < t]$$

$$\mathrm{V222c}[a\_, f\_] :=$$
$$:= \mathrm{Simplify}[\mathrm{Integrate}[\ G[a, x1 - y1, t - s] * G[a, x2 - y2, t - s]*$$
$$*G[a, y3, t - s] * f[y1, y2, x3 - y3, s], \{y1, -\infty, \infty\}, \{y2, -\infty, \infty\},$$
$$, \{y3, -\infty, \infty\}], 0 < s < t]$$

$$\mathrm{V222d}[a\_, f\_] :=$$
$$:= \mathrm{Simplify}[\mathrm{Integrate}[\ G[a, x1 - y1, s] * G[a, x2 - y2, s]*$$
$$*G[a, y3, t - s] * f[y1, y2, x3 - y3, t - s], \{y1, -\infty, \infty\}, \{y2, -\infty, \infty\},$$
$$, \{y3, -\infty, \infty\}], 0 < s < t]$$

$$\mathrm{V222e}[a\_, f\_] :=$$
$$:= \mathrm{Simplify}[\mathrm{Integrate}[\ G[a, x1 - y1, t - s] * G[a, y2, t - s]*$$
$$*G[a, x3 - y3, t - s] * f[y1, x2 - y2, y3, s], \{y1, -\infty, \infty\}, \{y2, -\infty, \infty\},$$
$$, \{y3, -\infty, \infty\}], 0 < s < t]$$

$$\mathrm{V222f}[a\_, f\_] :=$$
$$:= \mathrm{Simplify}[\mathrm{Integrate}[\ G[a, x1 - y1, s] * G[a, y2, s]*$$
$$*G[a, x3 - y3, s] * f[y1, x2 - y2, y3, t - s], \{y1, -\infty, \infty\}, \{y2, -\infty, \infty\},$$
$$, \{y3, -\infty, \infty\}], 0 < s < t]$$

$$V222g[a\_, f\_] :=$$
$$:= \mathrm{Simplify}[\mathrm{Integrate}[\ G[a, x1 - y1, t - s] * G[a, y2, t - s]*$$
$$*G[a, y3, t - s] * f[y1, x2 - y2, y3, s], \{y1, -\infty, \infty\}, \{y2, -\infty, \infty\},$$
$$, \{y3, -\infty, \infty\}], 0 < s < t]$$

$$V222h[a\_, f\_] :=$$
$$:= \mathrm{Simplify}[\mathrm{Integrate}[\ G[a, x1 - y1, t - s] * G[a, y2, t - s]*$$
$$*G[a, y3, t - s] * f[y1, x2 - y2, x3 - y3, t - s], \{y1, -\infty, \infty\}, \{y2, -\infty, \infty\},$$
$$, \{y3, -\infty, \infty\}], 0 < s < t]$$

$$V222i[a\_, f\_] :=$$
$$:= \mathrm{Simplify}[\mathrm{Integrate}[\ G[a, y1, t - s] * G[a, x2 - y2, t - s]*$$
$$*G[a, x3 - y3, t - s] * f[x1 - y1, y2, y3, s], \{y1, -\infty, \infty\}, \{y2, -\infty, \infty\},$$
$$, \{y3, -\infty, \infty\}], 0 < s < t]$$

$$V222j[a\_, f\_] :=$$
$$:= \mathrm{Simplify}[\mathrm{Integrate}[\ G[a, y1, t - s] * G[a, x2 - y2, t - s]*$$
$$*G[a, x3 - y3, t - s] * f[x1 - y1, y2, y3, t - s], \{y1, -\infty, \infty\}, \{y2, -\infty, \infty\},$$
$$, \{y3, -\infty, \infty\}], 0 < s < t]$$

$$V222k[a\_, f\_] :=$$
$$:= \mathrm{Simplify}[\mathrm{Integrate}[\ G[a, y1, t - s] * G[a, x2 - y2, t - s]*$$
$$*G[a, y3, t - s] * f[x1 - y1, y2, x3 - y3, s], \{y1, -\infty, \infty\}, \{y2, -\infty, \infty\},$$

$$, \{y3, -\infty, \infty\}], 0 < s < t]$$

V222l$[a_-, f_-] :=$
$:=$ Simplify[Integrate[$G[a, y1, s] * G[a, x2 - y2, s]*$

$$*G[a, y3, s] * f[x1 - y1, y2, x3 - y3, t - s], \{y1, -\infty, \infty\}, \{y2, -\infty, \infty\},$$

$$, \{y3, -\infty, \infty\}], 0 < s < t]$$

V222m$[a_-, f_-] :=$
$:=$ Simplify[Integrate[$G[a, y1, t - s] * G[a, y2, t - s]*$

$$*G[a, x3 - y3, t - s] * f[x1 - y1, x2 - y2, y3, s], \{y1, -\infty, \infty\},$$

$$, \{y2, -\infty, \infty\}, \{y3, -\infty, \infty\}], 0 < s < t]$$

V222n$[a_-, f_-] :=$
$:=$ Simplify[Integrate[$G[a, y1, s] * G[a, y2, s] * G[a, x3 - y3, s]*$

$$*f[x1 - y1, x2 - y2, y3, t - s], \{y1, -\infty, \infty\}, \{y2, -\infty, \infty\},$$

$$, \{y3, -\infty, \infty\}], 0 < s < t]$$

V222o$[a_-, f_-] :=$
$:=$ Simplify[Integrate[$G[a, y1, t - s] * G[a, xy2, t - s] * G[a, y3, s]*$

$$*f[x1 - y1, x1 - y2, x3 - y3, t - s], \{y1, -\infty, \infty\}, \{y2, -\infty, \infty\},$$

$$, \{y3, -\infty, \infty\}], 0 < s < t]$$

V222p$[a_-, f_-] :=$
$:=$ Simplify[Integrate[$G[a, y1, s] * G[a, y2, s] * G[a, y3, s]*$

$$*f[x1 - y1, x2 - y2, x3 - y3, t - s], \{y1, -\infty, \infty\}, \{y2, -\infty, \infty\},$$

$$, \{y3, -\infty, \infty\}], 0 < s < t]$$

- Lệnh gán để tìm thế vị nhiệt thể tích

$$\text{Inp3}[V\_] := \text{Simplify}[\text{Integrate}[V, \{s, 0, t\}], t > 0]$$

$\text{V333a}[a\_, f\_] := \text{Inp3}[\text{V222a}[a, f]]; \text{V333i}[a\_, f\_] := \text{Inp3}[\text{V222i}[a, f]];$

$\text{V333b}[a\_, f\_] := \text{Inp3}[\text{V222b}[a, f]]; \text{V333j}[a\_, f\_] := \text{Inp3}[\text{V222j}[a, f]];$

$\text{V333c}[a\_, f\_] := \text{Inp3}[\text{V222c}[a, f]]; \text{V333k}[a\_, f\_] := \text{Inp3}[\text{V222k}[a, f]];$

$\text{V333d}[a\_, f\_] := \text{Inp3}[\text{V222d}[a, f]]; \text{V333l}[a\_, f\_] := \text{Inp3}[\text{V222l}[a, f]];$

$\text{V333e}[a\_, f\_] := \text{Inp3}[\text{V222e}[a, f]]; \text{V333m}[a\_, f\_] := \text{Inp3}[\text{V222m}[a, f]];$

$\text{V333f}[a\_, f\_] := \text{Inp3}[\text{V222f}[a, f]]; \text{V333n}[a\_, f\_] := \text{Inp3}[\text{V222n}[a, f]];$

$\text{V333g}[a\_, f\_] := \text{Inp3}[\text{V222g}[a, f]]; \text{V333o}[a\_, f\_] := \text{Inp3}[\text{V222o}[a, f]];$

$\text{V333h}[a\_, f\_] := \text{Inp3}[\text{V222h}[a, f]]; \text{V333p}[a\_, f\_] := \text{Inp3}[\text{V222p}[a, f]];$

- Hàm kiểm tra tính chính xác nghiệm đã tìm

$\text{k1} := \text{Simplify}[(D[\#4, t] - \#1^2 * (D[\#4, x1, x1] + D[\#4, x2, x2]+$

$$+D[\#4, x3, x3]) - \#2), x1 \in \text{Reals}; x2 \in \text{Reals}; x3 \in \text{Reals}]\&;$$

$\text{k0} := \text{FullSimplify}[(\text{Limit}, \#4, t \to 0, \text{Direction} \to -1] - \#3),$

$$, x1 \in \text{Reals}; x2 \in \text{Reals}]; x3 \in \text{Reals}]\&;$$

$\text{k} := \{\text{k1}[\#1, \#2, \#3, \#4], \text{k0}[\#1, \#2, \#3, \#4]\}\&;$

3.3.2 Áp dụng để giải các bài toán Cauchy trong $\mathbb{R}^3$

Ví dụ 3.3. Tìm nghiệm của bài toán sau đây

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}) = e^{-t}\cos(x - y);$$
$$u\mid_{t=0} = e^{-(x+2z)^2}.$$

Nhập các giá trị ban đầu f31, u31, a31:

$\text{f31}[x1\_, x2\_, x3\_, t\_] := \text{Exp}[-t] * Cos[x1 - x2];$

u31[$x1_-, x2_-, x3_-$] := Exp[$(-x1 + 2 * x3)$]^2;
a31 := 1;

Tính thế vị nhiệt bề mặt bằng cách gán giá trị a31, u31, f31 cho một trong các hàm tính thế vị nhiệt bề mặt:

V111a[a31, u31]

$$\frac{e^{-\frac{(x1+2x3)^2}{1+20t}}}{\sqrt{1+20t}}$$

V111f[a31, u31]

$$\frac{e^{-\frac{(x1+2x3)^2}{1+20t}}}{\sqrt{1+20t}}$$

V111g[a31, u31]

$$\frac{e^{-\frac{(x1+2x3)^2}{1+20t}}}{\sqrt{1+20t}}$$

Do các kết quả đều giống nhau nên có thế vị nhiệt bề mặt:

V31'[$x1_-, x2_-, x3_-, t_-$] := $\frac{e^{-\frac{(x1+2x3)^2}{1+20t}}}{\sqrt{1+20t}}$;

Tính thế vị nhiệt thể tích bằng cách gán giá trị f31, u31, f31 cho một trong các hàm tính thế vi nhiệt thể tích:

V333a[a31, f31]

$$\frac{1}{2}e^{-2t-i(x1+x2)}(-1+e^t)(e^{2ix1}+e^{2ix2})$$

V333h[a31, f31]

$$\frac{1}{2}e^{-2t-i(x1+x2)}(-1+e^t)(e^{2ix1}+e^{2ix2})$$

Ta chọn kết quả của thế vị nhiệt thể tích:

V31"[$x1_-, x2_-, t_-$] := $\frac{1}{2}e^{-2t-i(x1+x2)}(-1+e^t)(e^{2ix1}+e^{2ix2})$

Tổng thế vị nhiệt bề mặt và thế vị nhiệt thể tích là nghiệm của bài toán:

$$\mathrm{V31}[x1\_, x2\_, x3\_, t\_] := (\mathrm{V31'}[x1, x2, x3, t] + \mathrm{V31''}[x1, x2, x3, t])/.$$

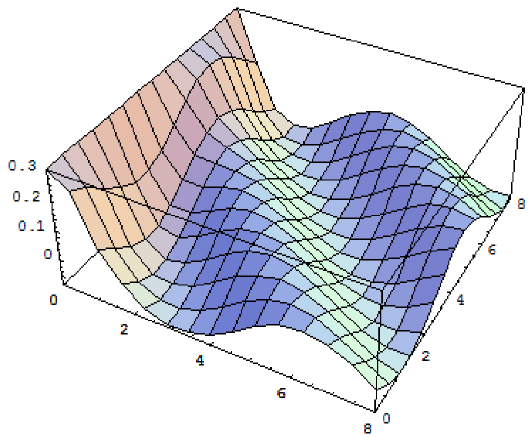
$$\{x1 \to x, x2 \to y, x3 \to z\}$$

$$\frac{1}{2}e^{-2t-i(x+y)}(-1+e^{t})(e^{2ix}+e^{2iy})+\frac{e^{-\frac{(x+2y)^2}{1+20t}}}{\sqrt{1+20t}}$$

Kiểm tra tính chính xác nghiệm của bài toán:

k[a31,f31[$x1, x2, x3, t$], u31[$x1, x2, x3$], V31[$x1, x2, x3, t$]]

$\{0, 0\}$



Hình 3.3: Đồ thị của hàm $\frac{1}{2}e^{-2t-i(x+y)}(-1+e^{t})(e^{2ix}+e^{2iy})+\frac{e^{-\frac{(x+2y)^2}{1+20t}}}{\sqrt{1+20t}}$.

KẾT LUẬN

Trong luận văn, tác giả đã tập trung nghiên cứu và nhận được một số kết quả sau đây:

1. Hệ thống lại một số kiến thức căn bản về phương trình truyền nhiệt.

2. Chứng minh một số định lý một cách xúc tích, dễ hiểu.

3. Thiết lập các hàm thực hiện trong phần mềm Mathematica để tìm nghiệm của bài toán truyền nhiệt thông qua công thức Poisson trong các trường hợp $n = 1, n = 2, n = 3$.

4. Xây dựng một hệ thống các ví dụ minh họa cho bài toán truyền nhiệt trong Mathematica.

5. Sử dụng phần mềm Mathematica để mô tả dáng điệu đồ thị các nghiệm nhận được trong các ví dụ.

6. Công bố được 02 bài báo có liên quan trực tiếp đến nội dung của luận văn tại Tap chí Khoa học công nghệ (xem [4], [5] tại mục Tài liệu tham khảo).