BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

– – – – – – – – – – –

LÊ THỊ BÍCH TRÂM

VỀ TÍNH ỔN ĐỊNH CỦA CÁC PHƯƠNG TRÌNH HÀM CƠ BẢN

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 60.46.40

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

ĐÀ NẴNG - NĂM 2012

Công trình được hoàn thành tại
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

Người hướng dẫn khoa học: GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU

Phản biện 1: TS. Cao Văn Nuôi.

Phản biện 2: GS. TS. Lê Văn Thuyết.

Luận văn được bảo vệ trước Hội đồng chấm Luận văn tốt nghiệp thạc sĩ Toán học họp tại Đại học Đà Nẵng vào ngày 02 tháng 12 năm 2012.

Có thể tìm hiểu luận văn tại:
- Trung tâm Thông tin - Học liệu, Đại học Đà Nẵng
- Thư viện trường Đại học Sư Phạm, Đại học Đà Nẵng

Mở đầu

1. Lý do chọn đề tài

Lý thuyết về các phương trình hàm là một trong những lĩnh vực nghiên cứu quan trọng của Giải tích Toán học. Các nhà Toán học tiếp cận phương trình hàm với nhiều mục tiêu nghiên cứu khác nhau như nghiên cứu định tính (xác định một số đặc trưng cơ bản của hàm số) hoặc nghiên cứu định lượng (ước lượng số nghiệm, xác định dạng cụ thể của nghiệm), nghiên cứu nghiệm địa phương hay nghiên cứu nghiệm toàn cục. Và một trong những vấn đề mở đầu cho con đường nghiên cứu mới trong những thập niên gần đây là vấn đề về sự ổn định của phương trình hàm.

Quan điểm chung của vấn đề này xuất hiện khi các nhà khoa học đặt ra câu hỏi "Khi thay đổi "một ít" giả thiết của một định lý thì liệu có thể khẳng định những luận điểm còn lại của định lý vẫn còn đúng hoặc "xấp xỉ đúng" hay không?". Trong quá trình nghiên cứu về tính ổn định của phương trình hàm, câu hỏi này được mở rộng như sau "Nếu chúng ta thay thế một phương trình hàm đã cho bởi một bất phương trình hàm, khi đó liệu có thể khẳng định rằng những nghiệm của bất phương trình hàm này nằm gần với nghiệm của phương trình hàm ban đầu hay không?", và nhiều nghiên cứu của các nhà toán học cho thấy hầu như các phương trình hàm đều có tính ổn định.

Xuất phát từ nhu cầu nghiên cứu và tìm hiểu về vấn đề này tôi quyết định chọn đề tài "VỀ TÍNH ỔN ĐỊNH CỦA CÁC PHƯƠNG TRÌNH HÀM CƠ BẢN"

2. Mục đích nghiên cứu

Luận văn *"Về tính ổn định của các phương trình hàm cơ bản"* nhằm khảo sát về tính ổn định của các phương trình hàm cơ bản, cụ thể là các phương trình hàm chuyển tiếp các phép tính số học, phương trình hàm chuyển tiếp các đại lượng trung bình cơ bản, phương trình hàm dạng D'Alembert và một số phương trình hàm khác.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu của đề tài là các phương trình hàm cơ bản đó là các phương trình hàm chuyển tiếp các phép tính số học, phương trình hàm chuyển tiếp các đại lượng trung bình cơ bản, phương trình hàm dạng D'Alembert và một số phương trình hàm khác như phương trình sóng, phương trình đa thức, phương trình dạng toàn phương.

Nghiên cứu từ các tài liệu, giáo trình của GS.TSKH. Nguyễn Văn Mậu, các tài liệu bồi dưỡng học sinh giỏi, tủ sách chuyên toán, các bài báo khoa học viết về phương trình hàm, Tạp chí toán học và tuổi trẻ, các tài liệu nước ngoài nhằm đưa ra các tính chất về tính ổn định của các phương trình hàm nói trên.

4. Phương pháp nghiên cứu

Nghiên cứu từ các tài liệu, giáo trình của GS.TSKH. Nguyễn Văn Mậu và các tài liệu tiếng Anh, các trang Web ..., từ đó phân tích, đánh giá, tổng hợp, trao đổi với thầy hướng dẫn kết quả đang nghiên cứu.

5. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài

Tạo được một đề tài phù hợp cho việc giảng dạy, bồi dưỡng học sinh trung học phổ thông.

Đề tài đóng góp thiết thực cho việc dạy và học nâng cao về phương trình hàm, đem lại niềm đam mê sáng tạo từ những bài toán cơ bản nhất mà tôi đã nêu trong luận văn này.

Mong muốn đề tài sẽ là tài liệu bổ ích cho sinh viên ngành toán trong việc tìm hiểu về tính ổn định của các phương trình hàm cơ bản.

6. Cấu trúc của luận văn

Luận văn gồm phần mở đầu, kết luận, tài liệu tham khảo và 4 chương.

Chương 1. Trình bày về tính ổn định của các phương trình hàm chuyển tiếp các phép tính số học đó là phương trình hàm cộng tính, phương trình hàm nhân tính, các hàm logarit và các hàm lũy thừa.

Chương 2. Trình bày về tính ổn định của các phương trình hàm chuyển tiếp các đại lượng trung bình cơ bản như trung bình cộng vào trung bình cộng, trung bình cộng vào trung bình nhân, trung bình cộng vào trung bình điều hòa.

Chương 3. Trình bày về tính ổn định của các phương trình hàm dạng D'Alembert, đó là các phương trình hàm cosin, phương trình hàm sin, phương trình hàm dạng $f(x+y)+g(x-y)=h(x)\varphi(y)$.

Chương 4. Trình bày về tính ổn định của một số phương trình hàm khác như phương trình sóng, phương trình đa thức, phương trình dạng toàn phương.

Chương 1

Tính ổn định của các phương trình hàm chuyển tiếp các phép tính số học

Chương này sẽ trình bày về tính ổn định của các phương trình hàm cộng tính, phương trình hàm nhân tính, hàm logarit và hàm lũy thừa. Chi tiết liên quan có thể xem các tài liệu tham khảo tương ứng danh mục [1], [2], [3], [4], [8], [11].

1.1 Tính ổn định của phương trình hàm cộng tính

Trước hết ta nhắc lại phương trình hàm (Cauchy) cộng tính (A)

$$f(x+y) = f(x) + f(y). \tag{A}$$

Giả sử hàm $f : X \to Y$ thỏa mãn (A), với X và Y là hai không gian Banach. Khi đó f được gọi là hàm cộng tính.

Định lý 1.1 (Xem [11]). *Giả sử hàm $f : X \to Y$ thỏa mãn với mọi $\varepsilon > 0$, ta có*

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon,\ \forall x, y \in X. \tag{1.1}$$

Khi đó tồn tại giới hạn sau

$$A(x) = \lim_{n\to\infty} 2^{-n} f(2^n x) \tag{1.2}$$

với mỗi $x \in X$ và tồn tại duy nhất hàm cộng tính $A : X \to Y$ thỏa mãn

$$\|f(x) - A(x)\| \leq \varepsilon,\ \forall x \in X. \tag{1.3}$$

Chứng minh.
Thay $x = y$ vào (1.1) ta được

$$\| \left(\frac{1}{2}\right) f(2x) - f(x)\| \leq \left(\frac{1}{2}\right) \varepsilon. \tag{1.4}$$

Sử dụng phương pháp quy nạp, ta được

$$\|2^{-n} f(2^n x) - f(x)\| \leq (1 - 2^{-n})\varepsilon. \tag{1.5}$$

Thật vậy, trong (1.4) ta thay x bởi $2x$, ta được

$$\|\frac{1}{2}f(2^2x) - f(2x)\| \le \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Khi đó

$$\|[\frac{1}{2}f(2^2x) - 2f(x)] - [f(2x) - 2f(x)]\| = \|\frac{1}{2}f(2^2x) - f(2x)\| \le \frac{1}{2}\varepsilon$$

hay

$$\|\frac{1}{2^2}f(2^2x) - f(x)\| - \|\frac{1}{2}f(2x) - f(x)\| \le \frac{1}{2^2}\varepsilon,$$

nên

$$\|\frac{1}{2^2}f(2^2x) - f(x)\| \le \varepsilon\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}\right),$$

do đó

$$\|\frac{1}{2^n}f(2^nx) - f(x)\| \le \varepsilon\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) = \varepsilon\left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

Bây giờ ta sẽ chứng minh dãy $\{\frac{1}{2^n}f(2^nx)\}$ là dãy Cauchy với mỗi $x \in X$. Chọn $m > n$, khi đó

$$\begin{aligned}\|\frac{1}{2^n}f(2^nx) - \frac{1}{2^m}f(2^mx)\| &= \frac{1}{2^n}\|\frac{1}{2^{m-n}}f(2^{m-n}.2^nx) - f(2^nx)\| \\ &\le \frac{1}{2^n}\varepsilon\left(1 - \frac{1}{2^{m-n}}\right) = \varepsilon\left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^m}\right).\end{aligned}$$

do đó dãy $\left\{\frac{1}{2^n}f\left(2^nx\right)\right\}$ là dãy Cauchy với mỗi $x \in X$ và do Y là không gian Banach nên tồn tại $A : X \to Y$ sao cho $A\left(x\right) := \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(2^nx)}{2^n}$ với mỗi $x \in X$, hay

$$\left\|A\left(x\right) - \frac{1}{2^n}f\left(2^nx\right)\right\| \le \frac{1}{2^n}\varepsilon.$$

Tiếp theo ta cần chứng minh A là hàm cộng tính. Thay x, y bởi 2^nx và 2^ny trong (1.1) ta được

$$\left\|\frac{1}{2^n}f\left(2^n\left(x+y\right)\right) - \frac{1}{2^n}f\left(2^nx\right) - \frac{1}{2^n}f\left(2^ny\right)\right\| \le \frac{1}{2^n}\varepsilon$$

với mỗi $n \in \mathbb{Z}_+^*, x, y \in X$. Cho $n \to \infty$, ta được

$$\|A\left(x+y\right) - A\left(x\right) - A\left(y\right)\| \le \varepsilon.$$

Với mỗi $x \in X$, ta có

$$\begin{aligned}\|f(x) - A(x)\| &= \|[f(x) - \frac{1}{2^n}f(2^nx)] + [\frac{1}{2^n}f(2^nx) - A(x)]\| \\ &\le \|f(x) - \frac{1}{2^n}f(2^nx)\| + \|\frac{1}{2^n}f(2^nx) - A(x)]\| \\ &\le \varepsilon\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + \varepsilon\frac{1}{2^n} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Cuối cùng, ta cần chứng minh A duy nhất. Giả sử tồn tại một hàm cộng tính $A_1 : X \to Y$ thỏa mãn (1.3). Khi đó, với mỗi $x \in X$,

$$\begin{aligned}\|A(x) - A_1(x)\| &= \frac{1}{n}\|[A(nx) - f(nx)] + [A_1(nx) - f(nx)]\| \\ &\le \frac{2\varepsilon}{n} \quad \text{theo (1.3)}\end{aligned}$$

Vậy $A_1 = A$.

Định lý 1.2 (Xem [11])**.** *Với mỗi dãy số thực bất kỳ* (a_n) *thỏa mãn*

$$|a_{n+m} - a_n - a_m| < 1, \quad n, m \in \mathbb{Z}_+^*, \tag{1.6}$$

thì tồn tại giới hạn hữu hạn

$$A := \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$$

và

$$|a_n - nA| < 1, \quad n \in \mathbb{Z}_+^*.$$

Bài 1.1. Tìm cặp hàm $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình sau

$$f(x + y) = g(x) + g(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{1.7}$$

Hướng dẫn 1.1. Thay $y = 0$ vào (1.7), ta được

$$f(x) = g(x) + g(0), \ \forall x \in \mathbb{R},$$

hay $f(x) = g(x) + \alpha$, với $\alpha = g(0)$. Do đó $g(x) = f(x) - \alpha$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Thay vào phương trình (1.7), ta được

$$f(x + y) = f(x) + f(y) - 2\alpha \tag{1.8}$$

Đặt $f(x) = A(x) + 2\alpha$. Phương trình (1.8) trở thành

$$A(x + y) + 2\alpha = A(x) + 2\alpha + A(y) + 2\alpha - 2\alpha$$

hay

$$A(x + y) = A(x) + A(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Vậy A là một hàm cộng tính trên $\mathbb{R}$ nên

$$\begin{cases} f(x) = A(x) + 2\alpha \\ g(x) = A(x) + \alpha. \end{cases}$$

Tiếp theo ta xét tính ổn định nghiệm của phương trình (1.7).

Mệnh đề 1.1. Giả sử hàm $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$|f(x+y) - g(x) - g(y)| \leq \varepsilon \tag{1.9}$$

với ε là số dương tùy ý cho trước và với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Khi đó tồn tại duy nhất một hàm cộng tính $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho

$$\begin{cases} |f(x) - A(x) - f(0)| \leq 4\varepsilon \\ |g(x) - A(x) - g(0)| \leq 2\varepsilon \end{cases}$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Chứng minh. Thay $y = 0$ vào (1.9), ta được

$$|f(x) - g(x) - g(0)| \leq \varepsilon, \ \ \forall x \in \mathbb{R}, \tag{1.10}$$

suy ra

$$|f(0) - 2g(0)| \leq \varepsilon. \tag{1.11}$$

Sử dụng (1.10), ta được

$$|f(x+y) - g(x+y) - g(0)| \leq \varepsilon, \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1.12}$$

Ta có

$$|f(x+y) - g(x+y) - g(0)| = |f(x+y) - g(x) - g(y) - g(x+y) + g(x) + g(y) - g(0)|$$

nên kết hợp (1.9) và (1.12) thu được

$$\begin{aligned} |g(x+y) - g(x) - g(y) + g(0)| &\leq |f(x+y) - g(x+y) - g(0)| \\ &\quad + |f(x+y) - g(x) - g(y)| \\ &\leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

hay

$$|[g(x+y) - g(0)] - [g(x) - g(0)] - [g(y) - g(0)]| \leq 2\varepsilon, \tag{1.13}$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Đặt

$$G(x) = g(x) - g(0), \tag{1.14}$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Thế vào (1.13) ta được

$$|G(x+y) - G(x) - G(y)| \leq 2\varepsilon, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Theo định lý về tính ổn định của hàm cộng tính, tồn tại duy nhất một hàm cộng tính $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho

$$|G(x) - A(x)| \leq 2\varepsilon, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1.15}$$

Từ (1.14) và (1.15) ta được

$$|g(x) - A(x) - g(0)| \leq 2\varepsilon, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1.16}$$

Từ (1.10), (1.11) và (1.16) ta được

$$\begin{aligned}
&|f(x) - A(x) - f(0)| \\
&= |f(x) - g(x) - g(0) + g(x) - A(x) - g(0) + 2g(0) - f(0)| \\
&\leq |f(x) - g(x) - g(0)| + |g(x) - A(x) - g(0)| + |f(0) - 2g(0)| \\
&\leq \varepsilon + 2\varepsilon + \varepsilon \\
&= 4\varepsilon.
\end{aligned}$$

1.2 Tính ổn định của phương trình hàm nhân tính

Trong phần này nghiên cứu phương trình

$$f(xy) = f(x)f(y) \tag{M}$$

Giả sử hàm $f : X \to Y$ thỏa mãn (M), với X và Y là hai không gian Banach. Khi đó f được gọi là hàm nhân tính.

Định lý 1.3 (Xem [11]). *Giả sử $\delta > 0, S$ là một nửa nhóm và $f : S \to \mathbb{C}$ sao cho*

$$|f(xy) - f(x)f(y)| \leq \delta, \ \forall x, y \in S. \tag{1.17}$$

Khi đó

$$|f(x)| \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 4\delta}}{2} =: \varepsilon, \ \forall x \in S. \tag{1.18}$$

hoặc f là hàm nhân tính với mọi $x, y \in S$.

Chứng minh. Trong (1.18), ta có $\frac{1+\sqrt{1+4\delta}}{2} =: \varepsilon$ hay $\varepsilon^2 - \varepsilon = \delta$ và $\varepsilon > 1$. Giả sử (1.18) không xảy ra, tức là tồn tại $a \in S$ sao cho $|f(a)| > \varepsilon$, hay $|f(a)| = \varepsilon + \rho$, với $\rho > 0$ nào đó. Trong (1.17), chọn $x = y = a$, ta được

$$|f(a^2) - f(a)^2| \leq \delta \tag{1.19}$$

Khi đó

$$\begin{aligned}
|f(a^2)| &= |f(a)^2 - (f(a)^2 - f(a^2))| \\
&\geq |f(a)^2| - |f(a)^2 - f(a^2)| \\
&\geq |f(a)|^2 - \delta \qquad \text{theo (1.19)} \\
&= (\varepsilon + \rho)^2 - \delta \\
&= (\varepsilon + \rho) + (2\varepsilon - 1)\rho + \rho^2 \quad (\text{do } \ \varepsilon^2 - \varepsilon = \delta) \\
&> \varepsilon + 2\rho \quad (\text{do } \ \varepsilon > 1)
\end{aligned}$$

Bằng phép chứng minh quy nạp, ta có

$$|f(a^{2^n})| > \varepsilon + (n+1)\rho, \ \ \forall n = 1, 2, \dots .$$

Với mọi $x, y, z \in S$,

$$|f(xyz) - f(xy)f(z)| \leq \delta, \quad \text{và} \quad |f(xyz) - f(x)f(yz)| \leq \delta$$

Ta có

$$\begin{aligned} |f(xy)f(z) - f(x)f(yz)| &\leq |f(xyz) - f(xy)f(z)| + |f(xyz) - f(x)f(yz)| \\ &\leq 2\delta \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} |f(xy)f(z) - f(x)f(y)f(z)| &\leq |f(xy)f(z) - f(x)f(yz)| \\ &\quad + |f(x)f(yz) - f(x)f(y)f(z)| \\ &\leq 2\delta + |f(x)|\delta \end{aligned}$$

Suy ra

$$|f(xy) - f(x)f(y)|.|f(z)| \leq 2\delta + |f(x)|\delta.$$

Chọn $z = a^{2^n}$, ta được

$$|f(xy) - f(x)f(y)| \leq \frac{2\delta + |f(x)|\delta}{|f(a^{2^n})|}.$$

với mọi $x, y \in S$ và mọi $n = 1, 2, \dots$

Cho $n \to \infty$, ta được $f(xy) = f(x)f(y)$, $\forall x, y \in S$. Vậy f là một hàm nhân tính.

1.3 Tính ổn định của các hàm lôgarit

Trước hết ta nhắc lại hàm logarit (L)

$$f(xy) - f(x) - f(y) = 0, x, y > 0 \tag{L}$$

Giả sử hàm

$$f : \mathbb{R}_+ \to B$$

thỏa mãn (L), với B là không gian Banach. Khi đó f được gọi là hàm logarit.

Định lý 1.4 (Xem [8])**.** *Giả sử $f : \mathbb{R}_+ \to B, \varepsilon \geq 0$, và*

$$|f(xy) - f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \tag{1.20}$$

với mọi $x, y > 0$. Khi đó tồn tại duy nhất một hàm logarit $L : \mathbb{R}_+ \to B$ thỏa mãn

$$|f(x) - L(x)| \leq \varepsilon \tag{1.21}$$

với mọi $x > 0$.

Để chứng minh định lý này, ta dựa trên bổ đề sau

Bổ đề 1.1. (Xem [8]). Cho $\varepsilon, d > 0, k, s \in \mathbb{R}$, với $k \neq 0$ và $s \neq 0$. Giả sử rằng hàm $f : \mathbb{R}_+ \to B$ thỏa mãn

$$|f(xy) - f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \tag{1.22}$$

với mọi $x, y > 0$ và $x^k y^s \geq d$. Khi đó tồn tại duy nhất hàm logarit $L : \mathbb{R}_+ \to B$ thỏa mãn

$$|f(x) - L(x)| \leq 3\varepsilon \tag{1.23}$$

với mọi $x \in \mathbb{R}_+$.

Định lý 1.5. (Xem [8]). Cho $\varepsilon, d > 0$, $k, s, p, q, P, Q \in \mathbb{R}, k/p \neq s/q, pqPQ \neq 0$, giả sử rằng $f : \mathbb{R}_+ \to B$ thỏa mãn

$$|f(x^p y^q) - Pf(x) - Qf(y)| \leq \varepsilon \tag{1.24}$$

với mọi $x, y > 0$ và $x^k y^s \geq d$. Khi đó tồn tại duy nhất một hàm logarit $L : \mathbb{R}_+ \to B$ sao cho

$$|f(x) - L(x) - f(1)| \leq 4\varepsilon \tag{1.25}$$

với mọi $x \in \mathbb{R}_+$.

Hệ quả 1.1. Cho $\varepsilon > 0, d, k, s, p, q, P, Q \in \mathbb{R}$ với $\frac{k}{p} \neq \frac{s}{q}, pqPQ \neq 0$. Giả sử rằng $g : \mathbb{R} \to B$ thỏa mãn

$$|g(px + qy) - Pg(x) - Qg(y)| \leq \varepsilon \tag{1.28}$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$, với $kx + sy \geq d$. Khi đó tồn tại duy nhất hàm cộng tính $A : \mathbb{R} \to B$ sao cho

$$|g(x) - A(x) - g(0)| \leq 4\varepsilon \tag{1.29}$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Định lý 1.6 (Xem [8]). *Cho $\varepsilon, d > 0, k, s, p, q, P, Q \in \mathbb{R}$ với $k \neq 0$ hoặc $s \neq 0$. Giả sử rằng $f : \mathbb{R}_+ \to B$ thỏa mãn*

$$|f(x^p y^q) - Pf(x) - Qf(y)| \leq \varepsilon \tag{1.33}$$

với mọi $x, y > 0$ và với $x^k y^s \geq d$. Khi đó tồn tại duy nhất một hàm logarit $L : \mathbb{R}_+ \to B$ sao cho

$$|f(x) - L(x) - f(1)| \leq \frac{4\varepsilon}{|P|} \tag{1.34}$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$ nếu $s \neq 0$, và

$$|f(x) - L(x) - f(1)| \leq \frac{4\varepsilon}{|Q|} \tag{1.35}$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$ nếu $k \neq 0$.

Hệ quả 1.2. Cho $\varepsilon > 0, d, k, s \in \mathbb{R}$ với $k \neq 0$ hoặc $s \neq 0$. Giả sử rằng $g : \mathbb{R} \to B$ thỏa mãn

$$|g(px + qy) - Pg(x) - Qg(y)| \leq \varepsilon \tag{1.38}$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$, với $kx + sy \geq d$. Khi đó tồn tại duy nhất hàm cộng tính $A : \mathbb{R} \to B$ sao cho

$$|g(x) - A(x) - g(0)| \leq \frac{4\varepsilon}{|P|} \tag{1.39}$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$ nếu $s \neq 0$, và

$$|g(x) - A(x) - g(0)| \leq \frac{4\varepsilon}{|Q|} \tag{1.40}$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$ nếu $k \neq 0$.

1.4 Tính ổn định của các hàm lũy thừa

Giả sử $(S, +)$ là nửa nhóm giao hoán, E là không gian Banach phức, X là đại số phức với phần tử đơn vị là 1_X và $\mathbb{C}$ là trường số phức, cho $f : S \to X$ và $g : S \to \mathbb{C}$. Trong phần này ta xét hàm lũy thừa sau:

$$f(x + y) = g(x)f(y).$$

Định nghĩa 1.1 (Xem [4]). *Cho một hàm số $f : S \to \mathbb{C}$, khi đó ta định nghĩa tập hợp N_f như sau:*

$$N_f = \{a \in S : f(a) \in S \setminus \{0, 1\}; |f(a)| > 1\}.$$

Định nghĩa 1.2 (Xem [4]). *Cho hàm số $f : S \to X$, khi đó ta định nghĩa tập M_f như sau:*

$$M_f = \{a \in G : f(a) \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \times \{1_X\}\}.$$

Định nghĩa 1.3 (Xem [4]). *Xét hàm $Scf : M_f \to \mathbb{C}$ với $f(a) = Scf(a) \times 1_X, \forall a \in M_f$. Ta định nghĩa hàm số $\widetilde{M_f} = \{a \in M_f : |Scf(a)| > 1\}$.*

Ta có các định lý sau

Định lý 1.7 (Xem [4]). *Giả sử hai hàm số $f : S \to E, g : S \to \mathbb{C}$ thỏa mãn bất đẳng thức sau:*

$$|f(x + y) - g(x)f(y)| \leq \psi(x, y), \forall x, y \in S. \tag{1.41}$$

Nếu $N_g \neq \varnothing$ và $\psi(x, y + a) \leq \psi(x, y)$ với mọi $x, y \in S$ và $a \in N_g$, khi đó tồn tại duy nhất một hàm $T : S \to E$ mà

$$T(x + y) = g(x)T(y);$$

$$(g(x+y)-g(x)g(y))T(z)=0$$

và

$$|f(y)-T(y)| \leq \inf_{a\in N_g} \frac{\psi(a,y)}{|g(a)|-1}$$

với mọi $x, y, z \in S$.

Hệ quả 1.3. Cho $f : S \to \mathbb{C}$ thỏa mãn

$$|f(x+y)-f(x)f(y)| \leq \psi(x,y)$$

với mọi $x, y \in S$.
Nếu $\psi(x, y+a) \leq \psi(x,y)$ với mọi $x, y \in S$ và $a \in N_f$, khi đó f hoặc là bị chặn, hoặc f là hàm lũy thừa.

Hệ quả 1.4. Cho $f, g : S \to \mathbb{C}$, S có phần tử đơn vị, f là hàm khác không và thỏa mãn

$$|f(x+y)-g(x)f(y)| \leq \psi(x,y)$$

với mọi $x, y \in S$, Nếu $\psi(x, y+a) \leq \psi(x,y)$ với mọi $x, y \in S$ và $a \in N_g$, khi đó g hoặc là bị chặn, hoặc là hàm lũy thừa và

$$|f(x+y)-g(x)f(y)| \leq \psi(x,y)$$

với mọi $x \in G$.

Bài 1.2. Tìm tất cả các hàm $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình sau

$$f(x+y) = g(x) + h(y),\ \ \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{1.48}$$

Hướng dẫn 1.2. Thay $y = 0$ vào (1.48), ta được

$$f(x) = g(x) + h(0),\ \ \forall x \in \mathbb{R},$$

hay $f(x) = g(x) + \alpha$, với $\alpha = h(0)$. Do đó $g(x) = f(x) - \alpha$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Thay $x = 0$ vào (1.48), ta được $f(y) = h(x) + \beta$, với $\beta = g(0)$, hay $h(x) = f(x) - \beta$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình (1.48) trở thành

$$f(x+y) = f(x) + f(y) - \alpha - \beta,\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1.49}$$

Đặt $f(x) = A(x) + \alpha + \beta$ thay vào phương trình (1.49), ta được

$$A(x+y) + \alpha + \beta = A(x) + \alpha + \beta + A(y) + \alpha + \beta - \alpha - \beta$$

hay

$$A(x+y) = A(x) + A(y),\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Vậy A là một hàm cộng tính trên $\mathbb{R}$ nên

$$\begin{cases} f(x) = A(x) + \alpha + \beta \\ g(x) = A(x) + \beta \\ h(x) = A(x) + \alpha \end{cases}$$

Chương 2

Tính ổn định của các phương trình hàm chuyển tiếp các đại lượng trung bình cơ bản

Chương này sẽ trình bày về tính ổn định của các phương trình hàm chuyển tiếp đại lượng trung bình cộng vào trung bình cộng, trung bình cộng vào trung bình nhân và trung bình cộng vào trung bình điều hòa. Chi tiết liên quan có thể xem các tài liệu tham khảo tương ứng danh mục [1], [2], [3], [11].

2.1 Tính ổn định của phương trình hàm chuyển tiếp đại lượng trung bình cộng vào trung bình cộng

Xét bài toán sau:

Bài 2.1. Tìm hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình sau

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2},\ \ \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

Hướng dẫn 2.1. Thay $y = 0$ vào (2.1), ta được

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{f(x)+f(0)}{2},\ \ \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.2}$$

Khi đó áp dụng (2.1) và (2.2), ta được

$$\frac{f(x)+f(y)}{2} = f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x+y)+f(0)}{2}$$

hay

$$f(x) + f(y) = f(x+y) + f(0), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Đặt $A(x) = f(x) - f(0)$. Ta có $A(x) + A(y) = A(x+y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Vậy A là một hàm cộng tính trên $\mathbb{R}$ nên $f(x) = A(x) + \alpha$, trong đó $\alpha = f(0)$.

2.2 Tính ổn định của phương trình hàm chuyển tiếp đại lượng trung bình cộng vào trung bình nhân

Xét bài toán sau:

Bài 2.2. Tìm tất cả các hàm liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình sau

$$f(\frac{x+y}{2}) = \sqrt{f(x)f(y)}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{2.5}$$

Hướng dẫn 2.2. Từ phương trình (2.5), ta có $f(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Giả sử tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x_0) = 0$. Khi đó

$$f(\frac{x_0+y}{2}) = \sqrt{f(x_0)f(y)} = 0, \ \forall y \in \mathbb{R},$$

hay $f(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Xét $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó lấy logarit hai vế của phương trình (2.5), ta được

$$\ln f(\frac{x+y}{2}) = \frac{\ln f(x) + \ln f(y)}{2}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Đặt $g(x) = \ln f(x)$ ta có

$$g(\frac{x+y}{2}) = \frac{g(x)+g(y)}{2}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

hay g là một nghiệm của phương trình Jensen, tức là $g(x) = ax + b$. Suy ra nghiệm của phương trình (2.5) là $f(x) = e^{ax+b}$ với $a, b \in \mathbb{R}$.

2.3 Tính ổn định của phương trình hàm chuyển tiếp đại lượng trung bình cộng vào trung bình điều hòa

Xét bài toán sau:

Bài 2.3. Xác định các hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ liên tục và thỏa mãn điều kiện sau:

$$f(\frac{x+y}{2}) = \frac{2f(x)f(y)}{f(x)+f(y)}, \ \forall x, y \in \mathbb{R}^+. \tag{2.11}$$

Hướng dẫn 2.3. Trước tiên, ta biến đổi (3.28) như sau

$$f(\frac{x+y}{2}) = \frac{1}{\frac{\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{f(y)}}{2}}, \ \forall x, y \in \mathbb{R}^+ \tag{2.12}$$

hay

$$f(\frac{x+y}{2}) = \frac{2}{\frac{1}{f(x)} + \frac{1}{f(y)}}, \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}^+ \tag{2.13}$$

hay

$$\frac{1}{f(\frac{x+y}{2})} = \frac{\frac{1}{f(x)} + \frac{1}{f(y)}}{2}, \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}^+. \tag{2.14}$$

Đặt $g(x) = \frac{1}{f(x)}$; và $g(x)$ là hàm số dương liên tục trên $\mathbb{R}^+$. Vì vậy mà từ (2.14) ta suy ra

$$g(\frac{x+y}{2}) = \frac{g(x) + g(y)}{2}, \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$$

Hay g là nghiệm của phương trình Jensen, tức là $g(x) = ax + b$.
Vậy $f(x) = \frac{1}{ax+b}$ trong đó $a = 0, b > 0$ hoặc $a > 0, b \geq 0$.

Chương 3

Tính ổn định của các phương trình hàm dạng D'Alembert

Chương này sẽ trình bày về tính ổn định của phương trình hàm cosin, phương trình hàm sin và phương trình hàm có dạng $f(x+y)+g(x-y)=h(x)\varphi(y)$. Chi tiết liên quan có thể xem các tài liệu tham khảo tương ứng danh mục [1], [2], [5], [7], [11], [14].

3.1 Tính ổn định của phương trình hàm cosin

Trong phần này, ta xét phương trình hàm cosin. Cho G là một nhóm Aben, với $x, y \in G$, ta xét phương trình hàm cosin sau:

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y) \tag{3.1}$$

Định lý 3.1 (Xem [5]). *Cho G là một nhóm Aben cộng tính và f là một hàm có giá trị phức xác định trên G. Khi đó f thỏa mãn (3.1) với mọi $x, y \in G$ nếu và chỉ nếu tồn tại một hàm có giá trị phức xác định trên G sao cho*

$$f(x)=\{m(x)+m(-x)\}/2, \quad x \in G \tag{3.2}$$

và

$$m(x+y)=m(x)m(y), \quad \forall x, y \in G \tag{3.3}$$

Định lý 3.2 (Xem [5]). *Cho $\delta>0$, cho G là nhóm aben và f là một hàm có giá trị phức xác định trên G sao cho*

$$|f(x+y)+f(x-y)-2f(x)f(y)| \leq \delta, \tag{3.6}$$

với mọi $x, y \in G$. Khi đó hoặc là

$$|f(x)| \leq \frac{1+\sqrt{1+2\delta}}{2}, x \in G. \tag{3.7}$$

hoặc tồn tại một hàm phức m trên G sao cho

$$f(x) = \frac{\{m(x) + m(-x)\}}{2}, \forall x \in G \tag{3.8}$$

và

$$|m(x+y) - m(x)m(y)| \leq \frac{\delta}{2}, \forall x, y \in G. \tag{3.9}$$

Để chứng minh định lý này ta sử dụng các bổ đề sau

Bổ đề 3.1. *Với giả thiết của định lý* (3.2)*, khi đó* $|f(0)| \leq \varepsilon$ *với* $\varepsilon = (1 + \sqrt{1+2\delta})/2$.

Bổ đề 3.2. *Với giả thiết của định lý* (3.2) *thì* $|f(2x)| \geq 2\,|f(x)|^2 - \mu$ *với mọi* $x \in G$ *và* $\mu = \delta + \varepsilon$.

Bổ đề 3.3. *Với giả thiết như định lý* (3.2)*, nếu* $|f(x)| > \varepsilon$ *với mọi* $x \in G$*, khi đó* $|f(2^n x)| \to +\infty$ *khi* $n \to +\infty$.

3.2 Tính ổn định của phương trình hàm sin

Trong phần này ta xét phương trình hàm sin. Cho G là nhóm Aben, với $x, y \in G$*, ta xét phương trình hàm sin sau:*

$$f(x+y)f(x-y) = f(x)^2 - f(y)^2. \tag{3.13}$$

Định lý 3.3 (Xem [7])**.** *Với mọi hàm không bị chặn* $f : G \to \mathbb{C}$ *thỏa mãn bất đẳng thức sau*

$$\left|f(x+y)f(x-y) - f(x)^2 + f(y)^2\right| \leq \delta, \forall x, y \in G \tag{3.21}$$

thì đều là nghiệm của phương trình

$$f(x+y)f(x-y) = f(x)^2 - f(y)^2.$$

Để chứng minh được định lý, ta dựa vào các bổ đề sau:

Bổ đề 3.4. (Xem [7].) Cho f là một hàm lấy giá trị phức xác định trên G sao cho thỏa mãn bất đẳng thức sau

$$\left|f(x+y)f(x-y) - f(x)^2 + f(y)^2\right| \leq \delta \tag{3.15}$$

với mọi $x, y \in G$ và với mọi số thực $\delta > 0$ thì

$$f(0) = 0 \tag{3.16}$$

Bổ đề 3.5. (Xem [7].) Với mọi $x, y \in G$, bất đẳng thức sau thỏa mãn

$$|f(x+y) + f(x-y) - 2f(x)g(y)| \leq \delta. \tag{3.19}$$

Bổ đề 3.6. (Xem [7].) Phương trình sau đây thỏa mãn với mọi $x, y \in G$:

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)g(y). \tag{3.20}$$

3.3 Tính ổn định của phương trình hàm D'Alembert

Trong phần này ta xét phương trình

$$f(x+y)+g(x-y)=h(x)\varphi(y). \tag{3.27}$$

Định lý 3.4 (Xem [14]). *Cho G là một nhóm, cho $f,g,h,\varphi : G\to\mathbb{C}$ là những hàm sao cho hàm*

$$(x,y)\to f(x+y)+g(x-y)-h(x)\varphi(y)$$

bị chặn, Khi đó, tồn tại một hàm mũ $E : G\to\mathbb{C}$, một hàm cộng tính $A : G\to\mathbb{C}$, những hàm bị chặn $a,b,c : G\to\mathbb{C}$ và những hằng số $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ sao cho những điều sau là tương đương:

1. *f,g,h,φ bị chặn;*
2. *f,g bị chặn, $h=0$, φ tùy ý;*
3. *f,g bị chặn, h tùy ý, $\varphi=0$;*
4. *f bị chặn, $g=\alpha\beta E+b, h=\alpha E,\varphi=\beta E^{-1}$;*
5. *$f=\alpha\beta E+a$, g bị chặn, $h=\alpha E,\varphi=\beta E$;*
6. *$f=\frac{1}{2}\alpha A+a, g=-\frac{1}{2}\alpha A+b, h=\alpha,\varphi=A+c$;*
7. *$f=\frac{1}{2}\beta A+a, g=\frac{1}{2}\beta A+b, h=A+c,\varphi=\beta$;*
8. *$f=\frac{1}{4}\alpha\beta A^2+\frac{1}{2}(\alpha\delta+\beta\gamma)A+a, g=-\frac{1}{4}\alpha\beta A^2+\frac{1}{2}(\alpha\delta-\beta\gamma)A+b, h=\alpha A+\gamma,\varphi=\beta A+\delta$;*
9. *$f=\frac{1}{2}(\alpha\gamma+\beta\delta)E_e+\frac{1}{2}(\alpha\delta+\beta\gamma)E_o+a, h=\alpha E_e+\beta E_o$,*
   $g=\frac{1}{2}(\alpha\gamma-\beta\delta)E_e-\frac{1}{2}(\alpha\delta-\beta\gamma)E_o+b,\varphi=\gamma E_e+\delta E_o$,

Ở đây, E_e và E_o tương ứng là phần chẵn và phần lẻ của E.

Bài 3.1. Tìm tất cả các hàm liên tục $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình sau

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\sqrt{g(x)h(y)},\quad \forall x,y\in\mathbb{R} \tag{3.28}$$

Hướng dẫn 3.1. a) Trường hợp 1: $g(0)=0$

Thay $x=0,y=2t$ vào phương trình (3.28), ta có $f(t)=\sqrt{g(0)h(2t)}=0,\quad \forall t\in\mathbb{R}$. Thay vào phương trình (3.28) ta được

$$g(x)h(y)=0,\ \ \forall x,y\in\mathbb{R},$$

Do đó

$$\left[\begin{array}{l} g\left(x\right)\equiv 0,\ \ h\left(x\right) \text{là hàm liên tục tùy ý trên} \in \mathbb{R} \\ h\left(x\right)\equiv 0,\ \ g\left(x\right) \text{là hàm liên tục tùy ý trên} \in \mathbb{R}\ \ \text{với } g(0)=0. \end{array}\right.$$

b) Trường hợp 2: $h(0) = 0$

Thay $y = 0, x = 2t$ vào phương trình (3.28), ta có $f(t) = \sqrt{g(2t)h(0)} = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$. Thay vào phương trình (3.28) ta được

$$g(x)h(y) = 0,\ \ \forall x, y \in \mathbb{R},$$

Do đó

$$\left[\begin{array}{l} g\left(x\right)\equiv 0,\ \ h\left(x\right) \text{là hàm liên tục tùy ý trên} \in \mathbb{R}\ \ \text{với } h(0)=0 \\ h\left(x\right)\equiv 0,\ \ g\left(x\right) \text{là hàm liên tục tùy ý trên} \in \mathbb{R}. \end{array}\right.$$

c) Trường hợp 3: $g(0) \neq 0, h(0) \neq 0$

Thay $x = 0, y = 0$ vào phương trình (3.28), ta có $f(0) = \sqrt{g(0)h(0)} = 0$. Suy ra

$$\begin{cases} f(0) > 0 \\ g(0)h(0) > 0 \end{cases}$$

Kết hợp với (1.1), ta có $f(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Lần lượt thay $y = 0$ và $x = 0$ vào phương trình (3.28), ta có

$$f(\frac{x}{2}) = \sqrt{g(x)h(0)}$$

$$f(\frac{y}{2}) = \sqrt{g(0)h(y)}$$

hay

$$g(x) = \frac{f^2(x)}{h(0)},\quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{3.29}$$

$$h(y) = \frac{f^2(y)}{h(0)},\quad \forall y \in \mathbb{R}. \tag{3.30}$$

Thay $g(x), h(y)$ ở (3.29) và (3.30) vào (3.28), ta được

$$f(\frac{x+y}{2}) = \sqrt{g(x)h(y)} = \sqrt{\frac{f^2\left(\frac{x}{2}\right)}{h(0)} \cdot \frac{f^2\left(\frac{y}{2}\right)}{g(0)}} = \frac{f\left(\frac{x}{2}\right) f\left(\frac{y}{2}\right)}{\sqrt{g(0)h(0)}.}$$

Đặt $F(u) = \frac{f(u)}{\sqrt{g(0)h(0)}} > 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}$. Do đó

$$F(u+v) = F(u)F(v),\quad \forall u, v \in \mathbb{R}$$

hay $F(u) = a^u$ với $a > 0$ và $f(x) = ba^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$ với $a > 0, b \neq 0$.

Kết luận

$$\begin{cases} f(x) \equiv 0 \\ g(x \equiv 0 \\ h(x) \text{là hàm liên tục tùy ý trên} \in \mathbb{R} \text{ với } h(0) = 0; \end{cases}$$

hoặc

$$\begin{cases} f(x) \equiv 0 \\ g(x) \text{là hàm liên tục tùy ý trên} \in \mathbb{R} \text{ với } g(0) = 0 \\ h(x) \equiv 0; \end{cases}$$

hoặc

$$\begin{cases} f(x) = ba^x, \ \ \forall x \in \mathbb{R} \\ g(x) = b_1 a^{2x}, \ \ \forall x \in \mathbb{R} \\ h(x) = b_2 a^{2x}, \ \ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

trong đó b_1, b_2 tùy ý sao cho $b_1 b_2 = b$.

Chương 4

Tính ổn định của một số phương trình hàm khác

Chương này sẽ trình bày về tính ổn định của phương trình sóng, phương trình đa thức và phương trình dạng toàn phương. Chi tiết liên quan có thể xem các tài liệu tham khảo tương ứng danh mục [1], [2], [6], [9], [10], [11], [12], [14].

4.1 Tính ổn định của phương trình sóng

Trước hết ta tìm hiểu về phương trình sóng. Giả sử $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sao cho

$$f(x+h,y) + f(x-h,y) - f(x,y+h) - f(x,y-h) = 0 \tag{4.1}$$

Định lý 4.1 (Xem [6]). *Giả sử $(G,+)$ là nhóm Aben, X là không gian Banach, với $\delta > 0$ và $f : G \times G \to X$ sao cho*

$$|f(x+h,y+h) - f(x+h,y) - f(x,y+h) + f(x,y)| \leqslant \delta \tag{4.2}$$

với mọi $x, y, h \in G$.
Khi đó tồn tại những hàm $\alpha, \beta : G \to X$ và $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ là hàm song cộng tính và phản đối xứng sao cho

$$|f(x,y) - [\alpha(x) + \beta(y) + A(x,y)]| \leqslant 20\delta, \forall x, y \in G.$$

Hệ quả 4.1. Giả sử $(G,+)$ là một nhóm Aben, X là một không gian Banach, $\delta > 0$ và $f : G \times G \to X$ sao cho

$$|f(x+h,y) + f(x-h,y) - f(x,y+h) - f(x,y-h)| \le \delta, \forall x, y, h \in G. \tag{4.30}$$

Khi đó tồn tại những hàm $a, b : G \to X$ và $B : G \times G \to X$ sao cho B là song cộng tính, phản đối xứng và

$$|f(x,y) - [a(x+y) + b(x-y) + B(x,y)]| \le 20\delta$$

với mọi $x, y \in G$.

Định lý 4.2 (Xem [6]). *Giả sử* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *đo được Lebesgue trên* $\mathbb{R}^2$, $\delta \geq 0$ *và thỏa mãn*

$$|f(x+h, y+h) - f(x+h, y) - f(x, y+h) + f(x, y)| \geq \delta, \forall x, y, h \in \mathbb{R}.$$

Khi đó tồn tại những hàm $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *đo được Lebesgue sao cho*

$$|f(x, y) - \{\varphi(x) + \psi(y)\}| \leq 60\delta, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Hệ quả 4.2. Giả sử $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ đo được Lebesgue trên $\mathbb{R}^2$, $\delta > 0$ và thỏa mãn

$$|f(x+h, y+h) - f(x+h, y) - f(x, y+h) + f(x, y)| \leq \delta, \forall x, y, h \in \mathbb{R}.$$

Giả sử tồn tại $x_0, y_0 \in G$ sao cho $x \to f(x, y_0)$ và $y \to f(x_0, y)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Khi đó, tồn tại những hàm $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục sao cho

$$|f(x, y) - \{a(x) + b(y)\}| \leq 180\delta, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

4.2 Tính ổn định của phương trình đa thức

Ta đã biết phương trình đa thức có dạng

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0. \tag{4.34}$$

Trước hết, ta xét tính ổn định của phương trình đa thức

$$x^n + \alpha x + \beta = 0 \tag{4.35}$$

với $x \in [-1, 1]$, ta có định nghĩa sau

Định nghĩa 4.1 (Xem [12]). *Phương trình* (4.35) *gọi là ổn định nếu tồn tại một hằng số* $K > 0$, *với mỗi* $\varepsilon > 0, y \in [-1, 1]$, *nếu*

$$|y^n + \alpha y + \beta| \leq \varepsilon,$$

khi đó tồn tại một vài $z \in [-1, 1]$ *thỏa mãn*

$$z^n + \alpha z + \beta = 0$$

sao cho $|y - z| < K\varepsilon$.

Định lý 4.3 (Xem [12]). *Nếu* $|\alpha| > n, |\beta| < |\alpha| - 1$, *và* $y \in [-1, 1]$ *thỏa mãn bất đẳng thức sau*

$$|y^n + \alpha y + \beta| \leq \varepsilon, \tag{4.36}$$

Khi đó tồn tại một nghiệm $v \in [-1, 1]$ *của* (4.35) *sao cho*

$$|y - v| \leq K\varepsilon, \tag{4.37}$$

với $K > 0$ *là một hằng số.*

Định nghĩa 4.2 (Xem [12]). *Phương trình (4.34) gọi là ổn định nếu tồn tại một hằng số $K > 0$, với mỗi $\varepsilon > 0, y \in [-1, 1]$, nếu*

$$\left|a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\right| \leq \varepsilon, \tag{4.38}$$

khi đó tồn tại một vài $z \in [-1, 1]$ thỏa mãn

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

sao cho $|y - z| \leq K\varepsilon$.

Định lý 4.4 (Xem [12]). *Cho phương trình $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$. Nếu*

$$|a_0| < |a_1| - (|a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n|), \tag{4.39}$$

$$|a_1| > 2\,|a_2| + 3\,|a_3| + \cdots + (n-1)\,|a_{n-1}| + n\,|a_n| \tag{4.40}$$

Khi đó phương trình này tồn tại đúng một nghiệm $v \in [-1, 1]$.

Định lý 4.5 (Xem [12]). *Nếu những điều kiện của định lý (4.4) đúng và hơn nữa $y \in [-1, 1]$ thỏa mãn bất đẳng thức*

$$\left|a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \cdots + a_1 y + a_0\right| \leq \varepsilon, \tag{4.45}$$

Khi đó phương trình (4.34) ổn định.

4.3 Tính ổn định của phương trình dạng toàn phương

Trước hết ta định nghĩa phương trình dạng toàn phương.
Hàm bậc hai $f(x) = cx^2$ thỏa mãn phương trình hàm

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) + 2f(y) \tag{4.47}$$

và vì thế mà phương trình (4.47) được gọi là phương trình hàm dạng toàn phương.

Định lý 4.6 (Xem [9]). *Cho G là nhóm Aben, X là không gian Banach và hàm $f : G \to X$, nếu hàm toàn phương*

$$(x, y) \to f(x + y) - f(x - y) - 2f(x) - 2f(y)$$

bị chặn, với $x, y \in G$. Khi đó tồn tại một hàm toàn phương $q : G \to X$ với $f - q$ bị chặn, để với mỗi $\delta > 0$, nếu

$$|f(x + y) - f(x - y) - 2f(x) - 2f(y)| \leq \delta, \;\; x, y \in G \tag{4.48}$$

thì sẽ tồn tại một ánh xạ toàn phương duy nhất $q : G \to X$ để

$$|f(x) - q(x)| \leq \frac{\delta}{2}, \forall x \in G. \tag{4.49}$$

Ngoài ra, hàm q được cho bởi

$$q(x) = \lim_{x\to\infty} \left|\frac{f(2^n x)}{4^n}\right|, \forall x \in G. \tag{4.50}$$

Bổ đề 4.1. (Xem [9].) Giả sử rằng $f : X \to Y$ thỏa mãn bất đẳng thức

$$|f(x+y) + f(x-y) - 2f(x) - 2f(y)| \le \varphi(x,y), \forall x, y \in X. \tag{4.52}$$

Khi đó với mọi $x \in X$ và $n \in \mathbb{N}$, ta có

$$|f(2^n x) - 4^n f(x)| \le \sum_{k=0}^{n-1} 4^k \frac{1}{2}\varphi(0,0) + \sum_{k=0}^{n-1} 4^k \varphi(2^{n-1-k}x, 2^{n-1-k}x). \tag{4.53}$$

Bổ đề 4.2. (Xem [9].) Giả sử $f : X \to Y$ thỏa mãn bất đẳng thức

$$|f(x+y+z) + f(x-y) + f(y-z) + f(z-x) - 3f(x) - 3f(y) - 3f(z)| \le \delta \tag{4.56}$$

với mọi $x, y, z \in X$ và $\delta \ge 0$. Khi đó với $x \in X$ và $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|f(3^n x) - 3^{2n} f(x)\right| \le \frac{8}{5}\delta \sum_{k=1}^{n} 3^{2(k-1)}. \tag{4.57}$$

Kết luận

Luận văn trình bày hệ thống các kiến thức "Về tính ổn định của các phương trình hàm cơ bản", mà cụ thể:

- Trình bày lại một số khái niệm về phương trình hàm các hàm cộng tính, nhân tính, hàm logarit và hàm lũy thừa, thông qua đó đã khảo sát được tính ổn định của các phương trình hàm này.
- Tiếp theo, đã xét được mối quan hệ giữa các đại lượng trung bình (trung bình cộng, trung bình nhân, trung bình điều hòa) thông qua việc tìm hiểu tính ổn định của các phương trình hàm chuyển tiếp giữa các đại lượng trung bình tương ứng.
- Trình bày khái niệm và khảo sát tính ổn định của các phương trình hàm dạng D'Alembert (phương trình hàm cosin, phương trình hàm sin và phương trình hàm có dạng $f(x+y)+g(x-y)=h(x)\varphi(y)$).
- Qua đó cũng đã xét thêm được tính ổn định của các phương trình hàm khác như phương trình sóng, phương trình đa thức và phương trình toàn phương.
- Hơn nữa, luận văn đã tập hợp được một số dạng bài tập tiêu biểu có thể gặp trong việc bồi dưỡng học sinh giỏi, các chuyên đề nâng cao về phương trình hàm.

Tác giả mong muốn luận văn sẽ phục vụ thiết thực cho việc giảng dạy về phương trình hàm trong nhà trường, ở hiện tại cũng như trong tương lai.