BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

TRẦN THỊ TỐ NHƯ

CÁC TOÁN TỬ TÍCH PHÂN DẠNG FOURIER HỮU HẠN VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp

Mã số: 60.46.40

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Giáo viên hướng dẫn: TS. LÊ HOÀNG TRÍ

Đà Nẵng, Năm 2012

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài.

Nhiều vấn đề của vật lý, kỹ thuật và môi trường thường đưa đến việc giải phương trình vi phân, phương trình đạo hàm riêng hay phương trình tích phân. Do đó, tìm cách giải các phương trình đó luôn được nhiều nhà toán học quan tâm. Một số lý thuyết toán học đã được xây dựng nhằm tiếp cận và đưa ra lời giải các phương trình kể trên. Trong số đó, lý thuyết tích chập của các phép biến đổi tích phân, và áp dụng giải các phương trình vi tích phân và phương trình đạo hàm riêng được nhiều toán học nghiên cứu.

Có nhiều hướng tiếp cận dựa trên nhiều lý thuyết toán học khác nhau trong việc giải quyết các vấn đề trên như: chỉ ra điều kiện tồn tại và duy nhất nghiệm, sự ổn định nghiệm, giải tìm nghiệm đúng, nghiệm gần đúng, nghiệm suy rộng. Vai trò đặc biệt quan trọng trong lý thuyết này phải kể đến phép biến đổi tích phân Fourier, Fourier sine, Fourier cosine, Hartley, tiếp theo là phép biến đổi Laplace, phép biến đổi Mellin...trong đó đáng chú ý là phép biến đổi Fourier rất hữu dụng trong việc giải phương trình đạo hàm riêng, phương trình tích phân.

Các phép biến đổi tích phân cosine, sine, Fourier-cosine, Fourier-sine, Fourier và phép biến đổi tích phân Hartley gọi là các phép biến đổi tích phân dạng Fourier. Trong số này, các phép biến đổi tích phân Hartley có một số ưu điểm vượt trội: Khi tính toán số với hàm nhận giá trị thực thì phép biến đổi tích phân Hartley nhanh hơn các phép biến đổi tích phân Fourier vì biến đổi Hartley của một hàm nhận giá trị thực là một hàm nhận giá trị thực, trong khi biến đổi Fourier của một hàm nhận giá trị thực có thể là một hàm nhận giá trị phức. So với phép biến đổi tích phân cosine và tích phân sine thì các phép biến đổi tích phân Hartley khả nghịch trong khi các phép biến đổi tích phân cosine và tích phân sine lại không khả nghịch. Hay so với phép biến đổi tích phân cosine và tích phân sine thì các phép biến đổi tích phân Hartley có các tích chập trong khi tích chập của phép biến đổi tích phân Fourier- cosine và Fourier- sine lại không có. Vì lý do đó mà luận văn chọn nghiên cứu những tính chất toán tử và xây dựng tích chập của các phép biến đổi tích phân dạng Fourier và sử dụng chúng để giải quyết một số phương trình vi tích phân hay phương trình đạo hàm riêng.

2. Mục đích nghiên cứu.

Xây dựng tích chập của toán tử tích phân kiểu Fourier hữu hạn. Ứng dụng giải các phương trình vi tích phân.

3. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn.

Đề tài có ý nghĩa về mặt lý thuyết, hy vọng tạo được một tài liệu tham khảo tốt cho những người tìm hiểu về lý thuyết tích chập của phép biến đổi tích phân.

Toán tử $T_{a,b} = a\mathcal{F}_c + b\mathcal{F}_s, (a, b) \in \mathbb{C}$ là một mở rộng của các toán tử tích phân đã biết như: $\mathcal{F}_c = T_{1,0}$; $\mathcal{F}_s = T_{0,1}$; $\mathcal{F} = T_{1,i}$. Ta đã biết phép biến đổi tích phân $\mathcal{F}_s$; $\mathcal{F}_c$; $\mathcal{F}$ có tầm quan trọng nhất định trong toán ứng dụng, điện tử và cơ học. Trên cơ sở đó tôi cũng hy vọng vào tiềm năng ứng dụng của toán tử tích phân $T_{a,b}$.

4. Cấu trúc của luận văn.

Ngoài phần mở đầu và kết luận, luận văn gồm 2 chương

- Chương 1 của luận văn trình bày tóm tắt khái niệm, định lý liên quan đến toán tử Fourier và các tích chập của toán tử Fourier

- Chương 2 của luận văn tập trung trình bày ứng dụng của toán tử Fourier và tích chập của toán tử Fourier vào việc tìm nghiệm của phương trình đạo hàm riêng và phương trình tích phân.

Tác giả mong muốn luận văn sẽ phục vụ thiết thực cho việc nghiên cứu về lý thuyết tích chập của các toán tử tích phân kiểu Fourier trong nhà trường, ở hiện tại cũng như trong tương lai.

Chương 1

TOÁN TỬ TÍCH PHÂN DẠNG FOURIER

1.1 Kiến thức chuẩn bị

1.1.1 Toán tử tích phân Fredhom

1.1.2 Phương trình tích phân với hạch suy biến

1.1.3 Chuỗi Fourier

1.2 Phép biến đổi dạng Fourier hữu hạn

1.2.1 Phép biến đổi tích phân Fourier hữu hạn

Định nghĩa 1.1 (Phép biến đổi Fourier hữu hạn)**.** *Phép biến đổi tích phân Fourier hữu hạn của hàm $f(x)$ được ký hiệu và xác định bởi*

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx := \hat{f}(n) \ \ n \in \mathbb{Z} \tag{1.1}$$

và tổng vô hạn

$$(\mathcal{F}f)(x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{inx},$$

gọi là chuỗi Fourier của hàm f trên $[-\pi;\pi]$, $\hat{f}(n)$ gọi là hệ số Fourier thứ n của hàm f.

Đặt

$$a(n) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx, \text{ với } n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b(n) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx, \text{ với } n = 1, 2, \ldots$$

khi đó chuỗi Fourier của hàm f được viết lại dưới dạng

$$(\mathcal{F}f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a(n)\cos(nx) + b(n)\sin(nx)]$$

Nhận xét 1.1. *Để tích phân (1.1) tồn tại thì $f \in L^1[-\pi;\pi]$ tuy nhiên không phải lúc nào chuỗi Fourier của hàm f cũng hội tụ, tổng của nó có thể khác f. Sự hội tụ của chuỗi Fourier được chỉ ra ở Định lý Dirichlet*

Hệ quả 1.1 (Tính duy nhất). *Nếu $f \in L^1[-\pi;\pi]$ và $\hat{f}(n) = 0$ với mọi $n \in \mathbb{Z}$ thì $f = 0$ trong $L^1[-\pi;\pi]$*

Khi hàm f trơn từng khúc thì định lý Dirichlet dưới đây cho ta mối quan hệ giữa hàm f và chuỗi Fourier của nó.

Định lý 1.1 (Định lý Dirichlet). *Giả sử hàm f tuần hoàn với chu kỳ 2π và trơn từng khúc trên đoạn $[-\pi;\pi]$ thì chuỗi Fourier của hàm f hội tụ đến*

$$\frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)]$$

Mệnh đề 1.1. *Cho hàm f có đạo hàm cấp hai khả tích Lebesgue trên đoạn $[-\pi,\pi]$. Khi đó,*

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{f'(x)\} &= \frac{1}{2\pi}[f(\pi)e^{-in\pi} - f(-\pi)e^{in\pi}] + in\hat{f}(n) \\
\mathcal{F}\{f"(x)\} &= \frac{1}{2\pi}[f'(\pi)e^{-in\pi} - f'(-\pi)e^{in\pi}] \\
&\quad + \frac{in}{2\pi}[f(\pi)e^{-in\pi} - f(-\pi)e^{in\pi}] + (in)^2\hat{f}(n)
\end{aligned}$$

1.2.2 Phép biến đổi tích phân Fourier-sine và Fourier-cosine hữu hạn

Định nghĩa 1.2 (Phép biến đổi Fourier-sine hữu hạn). *[4, trang 408] Cho f là một hàm liên tục hoặc liên tục từng khúc và khả tích Lebesgue trên đoạn $0 \leqslant x \leqslant \pi$, thì phép biến đổi Fourier-sine của hàm $f(x)$ được ký hiệu và định nghĩa bởi*

$$\mathcal{F}_s\{f(x)\}(n) = \tilde{f}_s(n) = \int\limits_0^{\pi} f(x)\sin nx dx \tag{1.2}$$

với mọi $n = 1, 2, 3, \ldots$

Tổng vô hạn,

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\hat{f}_s(n)\sin(nx)dx \tag{1.3}$$

Định nghĩa 1.3 (Phép biến đổi Fourier-cosine hữu hạn). *Cho f là một hàm liên tục hoặc liên tục từng khúc và khả tích Lebesgue trên đoạn $0 \leqslant x \leqslant \pi$, thì phép biến đổi Fourier-cosine của hàm $f(x)$ được định nghĩa bởi*

$$\mathcal{F}_c\{f(x)\}(n) = \hat{f}_c(n) = \int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx \tag{1.4}$$

với mọi $n = 0, 1, 2, \ldots$ Tổng vô hạn,

$$\frac{\hat{f}_c(0)}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\hat{f}_c(n)\cos nx \tag{1.5}$$

Mệnh đề 1.2. *Cho hàm f có đạo hàm cấp hai khả tích Lebesgue trên đoạn $[-\pi, \pi]$. Khi đó,*

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_s\{f'(x)\} &= -n\hat{f}_c(n)\\
\mathcal{F}_s\{f"(x)\} &= -n^2\hat{f}_s(n) + \Big(\frac{2n}{\pi}\Big)[f(0) + (-1)^{n+1}f(\pi)]\\
\mathcal{F}_c\{f'(x)\} &= n\hat{f}_s(n) + \frac{2}{\pi}[(-1)^n f(\pi) - f(0)]\\
\mathcal{F}_c\{f"(x)\} &= -n^2\hat{f}_c(n) + \frac{2}{\pi}[(-1)^n f(\pi) - f(0)]
\end{aligned} \tag{1.6}$$

$$\tag{1.7}$$

1.2.3 Phép biến đổi tích phân cosine và sine hữu hạn

Định nghĩa 1.4. *Cho hàm f khả tích Lebesgue trên $[-\pi; \pi]$*

(i) *Phép biến đổi tích phân cosine hữu hạn của hàm f được ký hiệu $\mathcal{T}_c\{f(x)\}$ và xác định bởi*

$$\mathcal{T}_c\{f(x)\}(n) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \tilde{f}_c(n), \ \ n = 0, 1, 2\cdots$$

(ii) Phép biến đổi tích phân sine hữu hạn của hàm f được ký hiệu $\mathcal{T}_s\{f(x)\}$ và xác định bởi

$$\mathcal{T}_s\{f(x)\}(n) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx, \quad n = 1, 2, 3\cdots$$

(iii) Tổng vô hạn

$$(\mathcal{T}f)(x) := \frac{1}{2}\tilde{f}_c(0) + \sum_{n=1}^{\infty}[\tilde{f}_c(n)\cos(nx) + \tilde{f}_s(n)\sin(nx)]$$

gọi là chuỗi Fourier của hàm f trên $[-\pi;\pi]$

Mệnh đề 1.3. *Cho hàm f có đạo hàm đến cấp hai khả tích Lebesgue trên đoạn $[-\pi;\pi]$. Khi đó,*

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_c\{f'(x)\}(n) &= \frac{(-1)^n}{\pi}[f(\pi) - f(-\pi)] + n\mathcal{T}_s\{f(x)\}(n)\\
\mathcal{T}_c\{f"(x)\}(n) &= \frac{(-1)^n}{\pi}[f'(\pi) - f'(-\pi)] - n^2\mathcal{T}_c\{f(x)\}(n)\\
\mathcal{T}_s\{f'(x)\}(n) &= -n\mathcal{T}_c\{f(x)\}(n)\\
\mathcal{T}_s\{f"(x)\}(n) &= \frac{n}{\pi}(-1)^{n+1}[f(\pi) - f(-\pi)] - n^2\mathcal{T}_s\{f(x)\}(n)
\end{aligned}$$

1.2.4 Phép biến đổi tích phân Hartley hữu hạn

Định nghĩa 1.5 (Phép biến đổi Hartley hữu hạn)**.** *a) Cho hàm f khả tích Lebesgue trên đoạn $[-\pi,\pi]$ khi đó phép biến đổi Hartley hữu hạn của f được định nghĩa như sau*

$$\mathcal{H}_1 f(x)(n) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{cas}(nx)dx := \tilde{f}_1(n), n \in \mathbb{N}$$

$$\mathcal{H}_2 f(x)(n) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{cas}(-nx)dx := \tilde{f}_2(n), n \in \mathbb{N}$$

trong đó, hàm $\mathrm{cas}(nx) = \cos x + \sin x$

b) Tổng hữu hạn

$$(\mathcal{H}f)(x) := \frac{\tilde{f}_1(0)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[\tilde{f}_1(n)\,\mathrm{cas}(nx) + \tilde{f}_2(n)\,\mathrm{cas}(-nx)]$$

được gọi là chuỗi Hartley của hàm f trên đoạn. Theo cách tiếp cận ở trên, ta thấy rằng nếu $f \in L^2[-\pi,\pi]$ thì $\mathcal{H}f)(x) \in L^2[-\pi,\pi]$.

Định lý 1.2 (Tính duy nhất)**.** *Giả sử hàm f khả tích Lebesgue trên đoạn $[-\pi,\pi]$ với $\tilde{f}_1(n) = 0$ (hoặc $\tilde{f}_2(n) = 0$) với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì $f = 0$ trong không gian $L^1[-\pi,\pi]$.*

Định lý 1.3 (Bổ đề Lebesgue-Riemann)**.** *Nếu hàm f khả tích Lebesgue trên đoạn $[-\pi,\pi]$ thì*

$$\lim n \to \infty \int\limits_{-\pi}^{\pi} \operatorname{cas}(nx) f(x) dx = 0$$

Mệnh đề 1.4. *Cho f có hàm cấp hai trên đoạn $[-\pi,\pi]$. Thì*

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_1\{f'(x)\} &= -n\mathcal{H}_2\{f(x)\} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}}[f(\pi) - f(-\pi)]\\
\mathcal{H}_2\{f'(x)\} &= n\mathcal{H}_1\{f(x)\} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}}[f(\pi) - f(-\pi)]\\
\mathcal{H}_1\{f"(x)\} &= -n^2\mathcal{H}_1\{f(x)\} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}}[f'(\pi) - f'(-\pi) - nf(\pi) + nf(-\pi)]\\
\mathcal{H}_2\{f"(x)\} &= -n^2\mathcal{H}_2\{f(x)\} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}}[f'(\pi) - f'(-\pi) + nf(\pi) - nf(-\pi)]
\end{aligned}$$

1.3 Tích chập của các phép biến đổi tích phân dạng Fourier

1.3.1 Tích chập tổng quát

1.3.2 Tích chập Fourier hữu hạn

Định lý 1.4 ([5] Tích chập Fourier hữu hạn)**.** *Giả sử hàm f, g xác định trên $\mathbb{R}$ và tuần hoàn với chu kỳ 2π. Nếu f, g khả tích Lebesgue trên $[-\pi;\pi]$ thì phép biến đổi tích phân (1.8) là tích chập đối với phép biến đổi tích phân Fourier hữu hạn cùng với bất đẳng thức chuẩn và đẳng thức nhân tử hóa*

$$(f \underset{\mathcal{F}}{*} g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-u) g(u) du \tag{1.8}$$

$$\left\|f \underset{\mathcal{F}}{*} g\right\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_1 ; \quad \{\mathcal{F}(f \underset{\mathcal{F}}{*} g)(x)\}(n) = \{\mathcal{F}f\}(n)\{\mathcal{F}g\}(n)$$

Định lý 1.5. *Nếu $f, g \in L^1[-\pi, \pi]$, thì mỗi phép biến đổi tích phân dưới đây là tích chập tổng quát và biểu thức nhân tử hóa tương ứng. Với $h \in \mathbb{R}$ $\alpha(x) := \cos xh$, $\beta(x) := \sin xh$, $\gamma(x) := e^{ixh}$.*

$$(f \overset{\alpha}{\underset{F}{*}} g)(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x-y-h) + f(x-y+h)]g(y)dy, \tag{1.9}$$

$$\{F(f \overset{\alpha}{\underset{F}{*}} g)(x)\}(n) = \alpha(n(Ff)(n)(Fg)(n).$$

$$\left\|f \overset{\alpha}{\underset{F}{*}} g\right\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$$

$$(f \overset{\beta}{\underset{F}{*}} g)(x) = \frac{i}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x-y-h) - f(x-y+h)]g(y)dy, \tag{1.10}$$

$$\{F(f \overset{\beta}{\underset{F}{*}} g)(x)\}(n) = \beta(n)(Ff)(n)(Fg)(n).$$

$$\left\|f \overset{\beta}{\underset{F}{*}} g\right\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$$

$$(f \overset{\gamma}{\underset{F}{*}} g)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y-h)g(y)dy, \tag{1.11}$$

$$\{F(f \overset{\gamma}{\underset{F}{*}} g)(x)\}(n) = \gamma(n)(Ff)(n)(Fg)(n).$$

$$\left\|f \overset{\gamma}{\underset{F}{*}} g\right\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$$

1.3.3 Tích chập của phép biến đổi Fourier-sine và Fourier-cosine

Tích chập xác định với các hàm tuần hoàn với chu kỳ 2π. Do đó, ta đưa ra hai hàm mở rộng (thác triển) với chu kỳ 2π cho một hàm xác định trên $0 < x < \pi$.

Định nghĩa 1.6 (Sự thác triển)**.** *Một hàm $f_1(x)$ được gọi là một thác triển lẻ của hàm $f(x)$ với chu kỳ 2π nếu*

$$f_1(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} f(x) & \textit{nếu} & 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ -f(-x) & \textit{nếu} & -\pi \leqslant x \leqslant 0 \end{array} \right\} \tag{1.12}$$

Hay

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f(x) \qquad khi\ \ 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ f_1(-x) &= -f_1(x) \qquad , f_1(x+2\pi) = f_1(x)\ \ khi\ \ -\infty \leqslant x \leqslant \infty \end{aligned} \tag{1.13}$$

Tương tự, một hàm $f_2(x)$ được gọi là một thác triển chẵn của hàm $f(x)$ với chu kỳ 2π nếu

$$f_2(x) = \begin{cases} f(x) & nếu \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ f(-x) & nếu \quad -\pi \leqslant x \leqslant 0 \end{cases} \tag{1.14}$$

$$\begin{aligned} f_2(x) &= f(x)\ \ khi\ \ 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ f_2(-x) &= f_2(x), \quad f_2(x+2\pi) = f_1(x)\ \ khi\ \ -\infty \leqslant x \leqslant \infty \end{aligned} \tag{1.15}$$

Định lý 1.6 (Tích chập)**.** *Nếu $f_1(x)$ và $g_1(x)$ là mở rộng tuần hoàn lẻ và f_2, g_2 là mở rộng tuần hoàn chẵn của f và g trên $0 \leqslant x \leqslant \pi$ thì*

$$\mathcal{F}_c\{f_1(x) * g_1(x)\} = -2\hat{f}_s(n)\hat{g}_s(n) \tag{1.16}$$

$$\mathcal{F}_c\{f_2(x) * g_2(x)\} = 2\hat{f}_c(n)\hat{g}_c(n) \tag{1.17}$$

$$\mathcal{F}_s\{f_1(x) * g_2(x)\} = 2\hat{f}_s(n)\hat{g}_c(n) \tag{1.18}$$

$$\mathcal{F}_s\{f_2(x) * g_1(x)\} = 2\hat{f}_c(n)\hat{g}_s(n) \tag{1.19}$$

1.3.4 Tích chập của phép biến đổi cosine và sine

Định lý 1.7. *Cho f, g là các hàm tuần hoàn chu kỳ 2π và khả tích trên đoạn $[-\pi, \pi]$ thì mỗi phép biến đổi tích phân (1.20); (1.21) là tích chập tổng quát và đẳng thức nhân tử hóa tương ứng*

$$(f \underset{\mathcal{T}_c}{*} g)(x) = \frac{1}{4(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi} \big[f(x+u) + f(x-u)\big]g(u)du, \tag{1.20}$$

$$\mathcal{T}_c(f \underset{\mathcal{T}_c}{*} g)(x) = (\mathcal{T}_c f)(x)(\mathcal{T}_c g)(x).$$

$$\left\| f \underset{\mathcal{T}_c}{*} g \right\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_1$$

$$(f \underset{\mathcal{T}_c,\mathcal{T}_s,\mathcal{T}_s}{*} g)(x) = \frac{1}{4(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi} \big[f(x+u) - f(x-u)\big]g(u)du, \tag{1.21}$$

$$\mathcal{T}_c(f \underset{\mathcal{T}_c,\mathcal{T}_s,\mathcal{T}_s}{*} g)(x) = (\mathcal{T}_s f)(x)(\mathcal{T}_s g)(x).$$

$$\left\| f \underset{\mathcal{T}_c,\mathcal{T}_s,\mathcal{T}_s}{*} g \right\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_1$$

Với mọi $h \in \mathbb{R}$ đặt $\alpha(x) = \cos(xh)$ và $\beta(x) = \sin(xh)$

Định lý 1.8. *Nếu $f, g \in L^1[-\pi,\pi]$, thì mỗi phép biến đổi tích phân 1.22, 1.23, 1.24, 1.25 là tích chập tổng quát và đẳng thức nhân tử hóa tương ứng*

$$(f \overset{\alpha}{\underset{\mathcal{T}_c}{*}} g)(x) = \frac{1}{4(2\pi)^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\big[f(x-u+h) + f(x-u-h) + f(x+u+h) + f(x+u-h)\big]g(u)du, \quad (1.22)$$

$$\{\mathcal{T}_c(f \overset{\alpha}{\underset{\mathcal{T}_c}{*}} g)(x)\}(n) = \alpha(n)(\mathcal{T}_c f)(n)(\mathcal{T}_c g)(n).$$

$$\left\| f \overset{\alpha}{\underset{\mathcal{T}_c}{*}} g \right\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_1$$

$$(f \overset{\alpha}{\underset{\mathcal{T}_c,\mathcal{T}_s,\mathcal{T}_s}{*}} g)(x) = \frac{1}{4(2\pi)^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\big[-f(x-u+h) - f(x-u-h) + f(x+u+h) + f(x+u-h)\big]g(u)du, \quad (1.23)$$

$$\{\mathcal{T}_c(f \overset{\alpha}{\underset{\mathcal{T}_c,\mathcal{T}_s,\mathcal{T}_s}{*}} g)(x)\}(n) = \alpha(n)(\mathcal{T}_s f)(n)(\mathcal{T}_s g)(n).$$

$$\left\| f \overset{\alpha}{\underset{\mathcal{T}_c,\mathcal{T}_s,\mathcal{T}_s}{*}} g \right\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_1$$

$$(f \overset{\beta}{\underset{\mathcal{T}_c,\mathcal{T}_s,\mathcal{T}_s}{*}} g)(x) = \frac{1}{4(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\big[f(x-u+h) - f(x-u-h) + f(x+u+h) - f(x+u-h)\big]g(u)du \quad (1.24)$$

$$\{\mathcal{T}_c(f \overset{\beta}{\underset{\mathcal{T}_c,\mathcal{T}_s,\mathcal{T}_c}{*}} g)(x)\}(n) = \beta(n)(T_s f)(n)(T_c g)(n).$$

$$\left\| f \overset{\beta}{\underset{\mathcal{T}_c,\mathcal{T}_s,\mathcal{T}_s}{*}} g \right\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_1$$

$$(f \overset{\beta}{\underset{\mathcal{T}_c,\mathcal{T}_c,\mathcal{T}_s}{*}} g)(x) = \frac{1}{4(2\pi)^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\big[f(x-u+h) - f(x-u-h) - f(x+u+h) + f(x+u-h)\big]g(u)du, \quad (1.25)$$

$$\{\mathcal{T}_c(f \underset{\mathcal{T}_c,\mathcal{T}_c,\mathcal{T}_s}{\overset{\beta}{*}} g)(x)\}(n) = \beta(n)(\mathcal{T}_c f)(n)(\mathcal{T}_s g)(n).$$

$$\left\| f \underset{\mathcal{T}_c,\mathcal{T}_c,\mathcal{T}_s}{\overset{\beta}{*}} g \right\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_1$$

Định lý 1.9. *Cho f, g là các hàm tuần hoàn chu kỳ 2π và khả tích trên đoạn $[-\pi, \pi]$ thì mỗi phép biến đổi tích phân (1.26), (1.27) là tích chập tổng quát và đẳng thức nhân tử hóa tương ứng*

$$(f \underset{\mathcal{T}_s,\mathcal{T}_c,\mathcal{T}_s}{*} g)(x) = \frac{1}{4(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi} \big[f(x-u) - f(x+u)\big]g(u)du, \tag{1.26}$$

$$\{\mathcal{T}_s(f \underset{\mathcal{T}_s,\mathcal{T}_c,\mathcal{T}_s}{*} g)(x)\}(n) = (\mathcal{T}_c f)(n)(\mathcal{T}_s g)(n).$$

$$\left\| f \underset{\mathcal{T}_s,\mathcal{T}_c,\mathcal{T}_s}{*} g \right\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_1$$

$$(f \underset{\mathcal{T}_s,\mathcal{T}_s,\mathcal{T}_c}{*} g)(x) = \frac{1}{4(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi} \big[f(x-u) + f(x+u)\big]g(u)du, \tag{1.27}$$

$$\{\mathcal{T}_s(f \underset{\mathcal{T}_s,\mathcal{T}_s,\mathcal{T}_c}{*} g)(x)\}(n) = (\mathcal{T}_s f)(n)(\mathcal{T}_c g)(n).$$

$$\left\| f \underset{\mathcal{T}_s,\mathcal{T}_s,\mathcal{T}_c}{*} g \right\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_1$$

Định lý 1.10. *Nếu $f, g \in L^1[-\pi, \pi]$, thì mỗi phép biến đổi tích phân 1.28, 1.29, 1.30, 1.31 là tích chập tổng quát và đẳng thức nhân tử hóa tương ứng*

$$\begin{aligned}(f \underset{\mathcal{T}_s,\mathcal{T}_c,\mathcal{T}_s}{\overset{\alpha}{*}} g)(x) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} \big[&f(x-u+h) + f(x-u-h) \\ &- f(x+u+h) - f(x+u-h)\big]g(u)du,\end{aligned} \tag{1.28}$$

$$\{\mathcal{T}_s(f \underset{\mathcal{T}_s,\mathcal{T}_c,\mathcal{T}_s}{\overset{\alpha}{*}} g)(x)\}(n) = \alpha(n)(\mathcal{T}_c f)(n)(\mathcal{T}_s g)(n).$$

$$\left\| f \underset{\mathcal{T}_s,\mathcal{T}_c,\mathcal{T}_s}{\overset{\alpha}{*}} g \right\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_1$$

$$\begin{aligned}(f \underset{\mathcal{T}_s,\mathcal{T}_s,\mathcal{T}_c}{\overset{\alpha}{*}} g)(x) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} \big[&f(x-u+h) + f(x-u-h) \\ &+ f(x+u+h) + f(x+u-h)\big]g(u)du,\end{aligned} \tag{1.29}$$

$$\{\mathcal{T}_s(f \underset{\mathcal{T}_s,\mathcal{T}s,\mathcal{T}_c}{\overset{\alpha}{*}} g)(x)\}(n) = \alpha(n)(\mathcal{T}_s f)(n)(\mathcal{T}_c g)(n).$$

$$\left\| f \underset{\mathcal{T}_s,\mathcal{T}_s,\mathcal{T}_c}{\overset{\alpha}{*}} g \right\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_1$$

$$(f \underset{\mathcal{T}_s}{\overset{\beta}{*}} g)(x) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \big[f(x-u+h) - f(x-u-h) - f(x+u+h) + f(x+u-h) \big] g(u)du, \quad (1.30)$$

$$\{\mathcal{T}_s(f \underset{\mathcal{T}_s}{\overset{\beta}{*}} g)(x)\}(n) = \beta(n)(\mathcal{T}_s f)(n)(\mathcal{T}_s g)(n).$$

$$\left\| f \underset{\mathcal{T}_s}{\overset{\beta}{*}} g \right\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_1$$

$$(f \underset{\mathcal{T}_s,\mathcal{T}_c,\mathcal{T}_c}{\overset{\beta}{*}} g)(x) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \big[- f(x-u+h) + f(x-u-h) - f(x+u+h) + f(x+u-h) \big] g(u)du, \quad (1.31)$$

$$\{\mathcal{T}_s(f \underset{\mathcal{T}_s,\mathcal{T}_c,\mathcal{T}_c}{\overset{\beta}{*}} g)(x)\}(n) = \beta(n)(\mathcal{T}_c f)(n)(\mathcal{T}_c g)(n).$$

$$\left\| f \underset{\mathcal{T}_s,\mathcal{T}_c,\mathcal{T}_c}{\overset{\beta}{*}} g \right\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_1$$

1.3.5 Tích chập của phép biến đổi tích phân Hartley

Định lý 1.11 (Tích chập Hartley hữu hạn)**.** *Cho hàm f xác định trên $\mathbb{R}$ và tuần hoàn chu kỳ 2π. Nếu f và g khả tích Lebesgue trên đoạn $[-\pi, \pi]$ thì mỗi phép biến đổi (1.32), (1.33), (1.34), (1.35) là tích chập Hartley tổng quát và đẳng thức nhân tử hóa tương ứng*

$$(f \underset{\mathcal{H}_1}{*} g)(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} [f(x+u) + f(x-u) + f(-x+u) - f(-x-u)] g(u)du \qquad (1.32)$$

$$\left\| f \underset{\mathcal{H}_1}{*} g \right\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_1, \mathcal{H}_1\{(f \underset{\mathcal{H}_1}{*} g)(x)\} = \tilde{f}_1(n)\tilde{g}_1(n)$$

$$(f \underset{\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2,\mathcal{H}_2}{*} g)(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} [f(x+u) - f(x-u)$$

$$+ f(-x+u) + f(-x-u)]g(u)du \tag{1.33}$$

$$\left\| f \underset{\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2,\mathcal{H}_2}{*} g \right\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_1, \mathcal{H}_1\{(f \underset{\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2,\mathcal{H}_2}{*} g)(x)\} = \tilde{f}_2(n)\tilde{g}_2(n)$$

$$(f \underset{\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2,\mathcal{H}_1}{*} g)(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} [-f(x+u) + f(x-u)$$

$$+ f(-x+u) + f(-x-u)]g(u)du \tag{1.34}$$

$$\left\| f \underset{\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2,\mathcal{H}_1}{*} g \right\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_1, \mathcal{H}_1\{(f \underset{\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2,\mathcal{H}_1}{*} g)(x)\} = \tilde{f}_2(n)\tilde{g}_1(n)$$

$$(f \underset{\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2}{*} g)(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} [f(x+u) - f(x-u)$$

$$- f(-x+u) + f(-x-u)]g(u)du \tag{1.35}$$

$$\left\| f \underset{\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2}{*} g \right\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_1, \mathcal{H}_1\{(f \underset{\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2}{*} g)(x)\} = \tilde{f}_1(n)\tilde{g}_2(n)$$

Ngoài ra, nếu f g khả tích Riemann và bị chặn trên đoạn $[-\pi, \pi]$ thì những hàm được định nghĩa bởi tích chập ở trên là những hàm liên tục.

Hệ quả 1.2. *Cho hàm f xác định trên $\mathbb{R}$ và tuần hoàn chu kỳ 2π. Nếu f và g khả tích Lebesgue trên đoạn $[-\pi, \pi]$ thì mỗi phép biến đổi (1.36), (1.37), (1.38), (1.39) là tích chập Hartley tổng quát và đẳng thức nhân tử hóa tương ứng*

$$(f \underset{\mathcal{H}_2}{*} g)(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} [f(x+u) + f(x-u)$$

$$+ f(-x+u) - f(-x-u)]g(u)du \tag{1.36}$$

$$\left\| f \underset{\mathcal{H}_2}{*} g \right\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_1, \mathcal{H}_2\{(f \underset{\mathcal{H}_2}{*} g)(x)\} = \tilde{f}_2(n)\tilde{(g)}_2(n)$$

$$(f \underset{\mathcal{H}_2,\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_1}{*} g)(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} [f(x+u) - f(x-u)$$

$$+ f(-x+u) + f(-x-u)]g(u)du \tag{1.37}$$

$$\left\| f \underset{\mathcal{H}_2,\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_1}{*} g \right\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_1, \mathcal{H}_2\{(f \underset{\mathcal{H}_2,\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_1}{*} g)(x)\} = \tilde{f}_1(n)\tilde{(g)}_1(n)$$

$$(f \underset{\mathcal{H}_2,\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2}{*} g)(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} [-f(x+u) + f(x-u)$$

$$+ f(-x+u) + f(-x-u)]g(u)du \quad (1.38)$$

$$\left\| f \underset{\mathcal{H}_2,\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2}{*} g \right\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_1, \mathcal{H}_1\{(f \underset{\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2,\mathcal{H}_1}{*} g)(x)\} = \tilde{f}_1(n)\tilde{(}g)_2(n)$$

$$(f \underset{\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2}{*} g)(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+u) - f(x-u)$$

$$- f(-x+u) + f(-x-u)]g(u)du \quad (1.39)$$

$$\left\| f \underset{\mathcal{H}_2,\mathcal{H}_2,\mathcal{H}_1}{*} g \right\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_1, \mathcal{H}_2\{(f \underset{\mathcal{H}_2,\mathcal{H}_2,\mathcal{H}_1}{*} g)(x)\} = \tilde{f}_2(n)\tilde{(}g)_1(n)$$

Ngoài ra, nếu f g khả tích Riemann và bị chặn trên đoạn $[-\pi, \pi]$ thì những hàm được định nghĩa bởi tích chập ở trên là những hàm liên tục

Chương 2

ỨNG DỤNG

2.1 Vành định chuẩn.

Định nghĩa 2.1 (Vành định chuẩn)**.** *Không gian vector V có cấu trúc vành và một chuẩn được gọi là vành định chuẩn nếu $\|vw\| \leq \|v\|\|w\|$, với mọi $v, w \in V$. Nếu V có một đơn vị nhân e, thì $\|e\| = 1$.*

Trong lý thuyết vành định chuẩn, phép nhân hai phần tử có thể là phép nhân chập. Trong mục này, với những tích chập tổng quát đã có bằng cách trang bị cho nó các chuẩn phù hợp ta chứng minh được $X := L^1[-\pi;\pi]$ là một vành định chuẩn. Do đó X là Banach*-algebra . Sau đây, khi trang bị cho X những chuẩn phù hợp để X cùng với các phép nhân chập có trong các định lý và hệ quả sau Định lý 1.4, Định lý 1.5, Định lý 1.7, Định lý 1.8, Định lý 1.9, Định lý 1.10, Định lý 1.11 và Hệ quả 1.2 trở thành một vành định chuẩn.

Định lý 2.1. *X cùng với phép nhân chập có trong Định lý 1.11 và Hệ quả 1.2 là một vành định chuẩn không có đơn vị.*

2.2 Phương trình vi phân thường.

Xét phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng

$$(Ly)(x) = g(x) \tag{2.1}$$

với $g(x)$ là hàm cho trước. Xét L là toán tử

$$L = a_{2n+1}\frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}} + a_{2n-1}\frac{d^{2n-1}}{dx^{2n-1}} + \cdots + a_1\frac{d}{dx'} \tag{2.2}$$

với $a_{2n+1}, \ a_{2n-1}, \ \cdots a_1$ là các hằng số.

Ví dụ 2.1. *(Độ võng tĩnh của một dầm đàn hồi đồng chất). Ta xét $y(x)$ là độ võng tĩnh của một dầm đàn hồi đồng chất có chiều dài hữu hạn 2π. Nó thỏa mãn phương trình cân bằng*

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{W(x)}{EI} = w(x), \ \ -\pi \le x \le \pi \tag{2.3}$$

với các điều kiện biên

$$y^k(x) = y^k(x) = 0, \ \ k = 0, 1, 2 \text{ tại } \ x = -\pi \ \text{ và } \ x = \pi$$

- *$W(x)$ là tải trọng thực tế trên mỗi đơn vị chiều dài của dầm.*
- *E là modun-Young của dầm*
- *I là mômen quán tính của mặt cắt ngang của dầm.*
- *Độ võng trung bình $\alpha = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} y(x)dx$*

2.3 Phương trình đạo hàm riêng.

Ví dụ 2.2. *Bài toán truyền nhiệt trong miền hữu hạn với điều kiện Dirichlet. Tìm nghiệm của phương trình khuyếch tán*

$$u_t = ku_{xx}, \ -\pi \leqslant x \leqslant \pi, \ t > 0$$

với điều kiện ban đầu và điều kiện biên như sau

$$\begin{aligned} u(-\pi, t) &= 0 = u(\pi, t) \\ u_x(-\pi, t) &= 0 = u_x(\pi, t) \qquad t > 0, \\ u(x; 0) &= f(x) \text{ với } -\pi \leqslant x \leqslant \pi \end{aligned}$$

(i) Trước tiên ta sử dụng phép biến đổi $\mathcal{T}_s$ và $\mathcal{T}_c$.

Ta có được công thức nghiệm như sau

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2}\tilde{u}_c(0,0) + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}[\tilde{u}_c(n,t)\cos(nx) + \tilde{u}_s(n,t)\sin(nx)] \\
&= \frac{1}{2}\tilde{f}_c(0) + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}[\tilde{f}_c e^{-kn^2t}\cos(nx) + \tilde{f}_s e^{-kn^2t}\sin(nx)] \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)d\xi + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\Big[e^{-kn^2t}\cos(n\xi)\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\cos(n\xi)d\xi \\
&\qquad + e^{-kn^2t}\sin nx\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\sin(n\xi)d\xi\Big]
\end{aligned}
$$

(ii) Ngoài ra ta cũng có thể sử dụng phép biến đổi tích phân $Hartley$

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{f}_1(n)e^{-kn^2t}\operatorname{cas}(nx) \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-kn^2t}\operatorname{cas}(nx)\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\operatorname{cas}(n\xi)d\xi
\end{aligned}
$$

Ví dụ 2.3 (Rung động ngang của một dây đàn hồi có chiều dài hữu hạn)**.** *Ta xét sự rung động của một dây có chiều dài 2π. Hàm rung động ngang $v(x,t)$ thỏa mãn phương trình sóng*

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad -\pi < x < \pi, \;\; t > 0 \tag{2.4}$$

với các điều kiện biên và điều kiện ban đầu

$$v(-\pi,t) = v(\pi,t), \;\; v_x(-\pi,t) = v_x(\pi,t), \;\; t > 0$$

$$v(x,0) = f(x), \;\; v_x(x,0) = g(x), \;\; -\pi < x < \pi$$

Nghiệm của (2.4) là

$$v(x,t) = \tilde{f}_1(0) + \sum_{n=1}\infty\Big[\tilde{f}_1(n)\cos(nt) + \frac{\tilde{g}_1(n)}{cn}\sin(nt)\Big]\operatorname{cas}(nx)$$

Ví dụ 2.4. *Bài toán về sự ổn định nhiệt trong một dải hữu hạn với các cạnh được giữ ở một nhiệt độ nhất định và một hàm điều khiển $f(x)$ truyền liên tục qua mặt $y = 0$.*

Tìm nghiệm $w(x,y)$ của phương trình Laplace

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \qquad -\pi \le x \le \pi, \;\; 0 < y < a,$$

với điều kiên biên và điều kiện ban đầu

$$w(-\pi, y) = w(\pi, y), \quad w_x(-\pi, y) = w_x(\pi, y), \;\; 0 < y < a$$

$$w(x, 0) = f(x), \quad w_y(x, a) = 0, \;\; -\pi < x < \pi$$

Nghiệm của phương trình

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_1(n)[\cosh(ny) - \tanh(na)\sinh(ny)]\operatorname{cas}(nx)$$

Ví dụ 2.5. *Phép dời hình ngang của dầm đàn hồi có chiều dài hữu hạn.*
Ta xét phép dời hình tại điểm x theo phương xuống dưới mà nó là điểm cân bằng của dầm trên trục x. Với $W(x, t)$ là khả năng tải của dầm trêm mỗi đơn vị chiều dài. Tìm nghiệm $y(x, t)$ thỏa mãn phương trình chuyển động sau

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{W(x, t)}{EI}, \; 0 \leqslant x \leqslant \pi, \; t > 0 \tag{2.5}$$

trong đó $a^2 = \dfrac{EI}{\rho\alpha}$, α là diệm tích tiết diện ngang của dầm và ρ là tỷ trọng thẳng của dầm.
Nếu dầm tiếp hợp tại điểm cuối thì

$$y(x, t) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \text{ tại } x = 0 \text{ và } x = \pi$$

Và thỏa điều kiện ban đầu

$$y(x, t) = f(x), \quad \frac{\partial y}{\partial t} = g(x) \text{tại} \quad x = 0 \quad \text{và} \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$$

Sử dụng hai phép biến đổi Laplace và Fourier-sine tương ứng cho các biến t và x, ta thu được công thức nghiệm

$$\begin{aligned} y(x, t) &= \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} y_s(n, t)\sin(nx) \\ &= \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sin(nx)\Big[\tilde{f}_s(n)\cos(ct) + \frac{\tilde{g}_s(n)}{c}\sin(ct) \\ &\qquad + \frac{a^2}{EI}\frac{1}{c}\int_0^t \sin c(t-\tau)\tilde{W}_s(n, \tau)d\tau\Big] \end{aligned} \tag{2.6}$$

trong đó,

$$\tilde{f}_s(n) = \int_0^{\pi} f(\xi)\sin(n\xi)d\xi, \quad \tilde{g}_s(n) = \int_0^{\pi} g(\xi)\sin(n\xi)d\xi$$

2.4 Phương trình tích phân.

Nhiều vấn đề toán học (phương trình vi phân với điều kiện ban đầu hay điều kiện biên), cơ học, vật lý dẫn đến những phương trình trong đó hàm chưa biết ở dưới dấu tích phân. Những phương trình ấy gọi là phương trình tích phân.
Xét phương trình

$$\lambda\varphi(x) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_a^b [p(x-u) + q(x+u)]\varphi(u)du = f(x) \tag{2.7}$$

trong đó, $\lambda \in \mathbb{C}$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$ cho trước, p, q, f là các hàm đã biết, φ là hàm chưa biết và $K(x,u) := p(x-u) + q(x+u)$ gọi là nhân.

2.4.1 Phương trình tích phân dạng chập với nhân Toeplizt

Xét phương trình

$$\lambda\varphi(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} p(x-u)\varphi(u)du = f(x), \tag{2.8}$$

trong đó, $\lambda \in \mathbb{C}$, p, f cho trước, $\varphi(x)$ là hàm cần tìm và hàm p được biết như là hạch Toeplizt.
Ta có, $\tilde{p}_s$, $\tilde{p}_c$ lần lượt là ký kiệu của các hệ số Fourier-sine và Fourier-cosine của hàm p. Đặt

$$D(n) = \tilde{p}_c\tilde{p}_c + 2\lambda\tilde{p}_c + \lambda^2 + \tilde{p}_s\tilde{p}_s \tag{2.9}$$

$$D_1(n) = \tilde{p}_c\tilde{f}_s + \lambda\tilde{f}_s - \tilde{p}_s\tilde{f}_c \tag{2.10}$$

$$D_2(n) = \tilde{p}_c\tilde{f}_c + \lambda\tilde{f}_c + \tilde{p}_s\tilde{f}_s \tag{2.11}$$

Định lý 2.2. *Giả sử hàm p liên tục từng khúc và tuần hoàn chu kỳ 2π và hàm f có bình phương khả tích*

i) Nếu $\lambda \neq 0$, thì tồn tại một số K^* dương sao cho $D(n) \neq 0$ với mọi $n \geqslant K^*$

ii) Nếu $D(n) \neq 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}$, thì phương trình (2.8) tồn tại nghiệm duy nhất trong không gian $L[-\pi,\pi]$ với mọi $f \in L[-\pi,\pi]$ và được cho bởi

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\frac{D_2(0)}{D(0)} + \sum_{n=1}^{\infty}[\frac{D_2(n)}{D(n)}\cos(nx) + \frac{D_1(n)}{D(n)}\sin(nx)] \tag{2.12}$$

2.4.2 Phương trình tích phân dạng chập với nhân Hankel

Xét phương trình

$$\lambda\varphi(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} q(x+u)\varphi(u)du = f(x), \tag{2.13}$$

trong đó, $\lambda \in \mathbb{C}$, q, f cho trước, $\varphi(x)$ là hàm cần tìm và hàm q được biết như là hạch Hankel.
Ta có, $\tilde{q}_s$, $\tilde{q}_c$ lần lượt là ký kiệu của các hệ số Fourier-sine và Fourier-cosine của hàm q. Đặt

$$D(n) = \lambda^2 - \tilde{q}_s\tilde{q}_s - \tilde{q}_c\tilde{q}_c \tag{2.14}$$

$$D_1(n) = \tilde{q}_c\tilde{f}_s + \lambda\tilde{f}_s - \tilde{q}_s\tilde{f}_c \tag{2.15}$$

$$D_2(n) = -\tilde{q}_c\tilde{f}_c + \lambda\tilde{f}_c - \tilde{q}_s\tilde{f}_s \tag{2.16}$$

Định lý 2.3. *Giả sử hàm q liên tục từng khúc và tuần hoàn chu kỳ 2π và hàm f có bình phương khả tích*

i) Nếu $\lambda \neq 0$, thì tồn tại một số K^* dương sao cho $D(n) \neq 0$ với mọi $n \geqslant K^*$

ii) Nếu $D(n) \neq 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}$, thì phương trình (2.13) tồn tại nghiệm duy nhất trong không gian $L[-\pi, \pi]$ với mọi $f \in L^1[-\pi, \pi]$ và được cho bởi

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\frac{D_2(0)}{D(0)} + \sum_{n=1}^{\infty}[\frac{D_2(n)}{D(n)}\cos(nx) + \frac{D_1(n)}{D(n)}\sin(nx)] \tag{2.17}$$

2.4.3 Phương trình tích phân dạng chập với nhân Toeplizt-Hankel

Xét phương trình

$$\lambda\varphi(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}[p(x-u) + q(x+u)]\varphi(u)du = f(x), \tag{2.18}$$

trong đó, $\lambda \in \mathbb{C}$, p, q, f cho trước, $\varphi(x)$ là hàm cần tìm và hàm p, q lần lượt là hạch Toeplizt và Hankel.
Do các hàm liên tục hoặc liên tục từng khúc trên đoạn $[-\pi, \pi]$ có thể thác triển chu kỳ 2π; ở đây giả sử hàm p, q liên tục từng khúc và tuần hoàn chu kỳ 2π trên

$\mathbb{R}$.

Ta có, $\tilde{q}_s$, $\tilde{q}_c$ lần lượt là ký kiệu của các hệ số tích phân sine và tích phân cosine của hàm q. Đặt

$$\begin{aligned} D(n) &= \lambda^2 + 2\lambda\tilde{p}_c + (\tilde{p}_c + \tilde{q}_c)(\tilde{p}_c - \tilde{q}_c) + (\tilde{p}_s + \tilde{q}_s)(\tilde{p}_s - \tilde{q}_s) \\ D_1(n) &= \lambda\tilde{f}_s + (\tilde{p}_c + \tilde{q}_c)\tilde{f}_s - (\tilde{p}_s + \tilde{q}_s)\tilde{f}_c \\ D_2(n) &= \lambda\tilde{f}_c + (\tilde{p}_c - \tilde{q}_c)\tilde{f}_s + (\tilde{p}_s - \tilde{q}_s)\tilde{f}_c \end{aligned} \tag{2.19}$$

Định lý 2.4. *Giả sử hàm p, q liên tục từng khúc và tuần hoàn chu kỳ 2π và hàm f có bình phương khả tích*

i) Nếu $\lambda \neq 0$, thì tồn tại một số K^* dương sao cho $D(n) \neq 0$ với mọi $n \geqslant K^*$

ii) Nếu $D(n) \neq 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}$, thì phương trình (2.18) tồn tại nghiệm duy nhất trong không gian $L[-\pi, \pi]$ với mọi $f \in L[-\pi, \pi]$ và được cho bởi

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\frac{D_2(0)}{D(0)} + \sum_{n=1}^{\infty}[\frac{D_2(n)}{D(n)}\cos(nx) + \frac{D_1(n)}{D(n)}\sin(nx)] \tag{2.20}$$

Ta tìm nghiệm của phương trình (2.18) với việc áp dụng phép biến đổi Hartley. Với $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{q}_1, \tilde{q}_2$ lần lượt là các hệ số Hartley của các hàm $p(x)$ và $q(x)$. Đặt

$$\begin{aligned} A(n) &:= \lambda + \tilde{p}_1(n) + \tilde{p}_2(n) + \tilde{q}_1(n) - \tilde{q}_2(n) \\ B(n) &:= \tilde{p}_1(n) - \tilde{p}_2(n) + \tilde{q}_1(n) + \tilde{q}_2(n) \\ D(n) &:= A(n)A(-n) - B(n)B(-n) \\ D_1(n) &:= A(-n)\tilde{f}_1(n) - B(n)\tilde{f}_2(n) \\ D_2(n) &:= A(n)\tilde{f}_2(n) - B(-n)\tilde{f}_1(n) \end{aligned} \tag{2.21}$$

Ta có định lý tồn tại nghiệm sau

Định lý 2.5. *Giả sử hàm p, q liên tục từng khúc và tuần hoàn chu kỳ 2π và hàm f có bình phương khả tích*

i) Nếu $\lambda \neq 0$, thì tồn tại một số K^* dương sao cho $D(n) \neq 0$ với mọi $n \geqslant K^*$

ii) Nếu $D(n) \neq 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}$, thì phương trình (2.18) tồn tại nghiệm duy nhất trong không gian $L[-\pi, \pi]$ với mọi $f \in L[-\pi, \pi]$ và được cho bởi

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\frac{D_2(0)}{D(0)} + \sum_{n=1}^{\infty}[\frac{D_2(n)}{D(n)}\operatorname{cas}(nx) + \frac{D_1(n)}{D(n)}\operatorname{cas}(-nx)] \tag{2.22}$$

Ví dụ 2.6. *Tìm nghiệm của phương trình tích phân tuyến tính với nhân suy biến sau*

$$\varphi(x) + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\sin 3(x-u) + 2\cos(x+u)]\varphi(u)du = 8\cos^3(x) \tag{2.23}$$

Trong trường hợp này ta có được công thức nghiệm

$$\varphi_*(x) = 8\cos^3(x) - \sin(3x) - \cos(3x) - 4\cos(x) \tag{2.24}$$

$$=4\cos^3(x) - \cos(x) - 4\sin(x)\cos^2(x) + \sin(x) = \varphi(x) \tag{2.25}$$

Ví dụ 2.7. *Tìm nghiệm của phương trình tích phân tuyến tính với nhân không suy biến*

$$\varphi(x) + \frac{1}{\pi}\int -\pi^{\pi}\Big[\frac{\sqrt{2}}{\sin(x-u)-3} + \frac{\sqrt{3}}{\cos(x+u)+2}\Big]\varphi(u)du \tag{2.26}$$

Trong trường hợp này chỉ có thể sử dụng công thức 2.22. Suy ra

$$D_1(n) = D_2(n) = 0 \quad \forall n \geq 1.$$

Ta có nghiệm của phương trình (2.26) là

$$\varphi(x) = \frac{D_1(0)}{D(0)} = 1$$

KẾT LUẬN

Sau một thời gian nghiên cứu học hỏi từ những tài liệu có được em đã hoàn thành khóa luận tốt nghiệp. Trong khóa luận này em đã trình bày tư tưởng nội dung, hệ thống các tích chập của toán tử Fourier và đi giải nghiệm của một số phương trình đạo hàm riêng và phương trình tích phân với nhân Toeplizt-Hankel. Đóng góp chính của khóa luận bao gồm:

1. Xây dựng được các tích chập $\mathcal{T}_s$, $\mathcal{T}_c$, $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$.
2. Định lý 2.1 chỉ ra rằng không gian $L^1[-\pi;\pi]$ được trang bị thêm phép nhân chập của các toán tử Hartley đã trở thành vành định chuẩn không có đơn vi.
3. Giải lại các phương trình đạo hàm riêng tuyến tính bằng các toán tử tích phân kiểu Fourier thay vì dùng toán tử Fourier như Titchmarsh.
4. Đưa ra điều kiện cần và đủ để phương trình tích phân dạng chập với nhân Toeplitz - Hankel có nghiệm và đưa ra công thức nghiệm tương minh.

Tiếp theo các kết quả của luận văn tác giả nhận thấy có một số vấn đề cần nghiên cứu tiếp theo như: mở rộng các kết quả nghiên cứu của các phép biến đổi này cho lớp hàm không tuần hoàn và lớp hàm có hàm trọng Hermite hay mở rộng các kết quả nghiên cứu lên trên không gian $L^1(\mathbb{R}^d)$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

TIẾNG ANH

[1] Ander Vertblad. (2003), *Fourier analysis anh Its Applications.*

[2] Bhatia R. (2005), *Fourier series*, The Mathematical Association of America.

[3] Bracewell R.N (1986), *The Fourier Transforms and Its Applications*, McGraw-Hill, N. Y.

[4] Debnath L., and Bhatta D. (2007), *Integral Transforms and Their Applications, Second Edition*, Chapman và Hall/CRC, Boca Raton.

[5] Stein E. M., and Shakarchi R. (2007), *Fourier analysis. An introduction. Princeton Lectures in Analysis, I*, Princeton University Press, Princeton and Oxford.

TIẾNG VIỆT

[6] G.M.Fichtengon (1977), *Cơ sở giải tích toán học tập III*, Nhà xuất bản Đại học và Trung cấp chuyên nghiệp.

[7] Hoàng Tụy. (2005), *Hàm thực và giải tích hàm*, Viện toán học, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội.