BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

HỒ THỊ DẠ THẢO

ĐỒNG ĐIỀU KỲ DỊ VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 60.46.40

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Đà Nẵng, Năm 2012

Công trình được hoàn thành tại
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

Người hướng dẫn khoa học: TS. LÊ HOÀNG TRÍ

Phản biện 1: **TS. NGUYỄN NGỌC CHÂU**

Phản biện 2: **PGS.TS. NGUYỄN GIA ĐỊNH**

Luận văn được bảo vệ tại Hội đồng bảo vệ chấm Luận văn tốt nghiệp Thạc sĩ Khoa học họp tại Đại học Đà Nẵng vào ngày 01 tháng 07 năm 2012

Có thể tìm hiểu luận văn tại:
- Trung tâm Thông tin - Học liệu, Đại học Đà Nẵng
- Thư viện Trường Đại học Sư Phạm,Đại học Đà Nẵng.

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Trong topo có các định lý phát biểu tuy đơn giản nhưng để chứng minh thì rất phức tạp, ví dụ như định lý điểm bất động của Brouwer, định lý của Ulam Borsuk, … Phần lớn các chứng minh này đều dùng đến topo đại số. Mục đích của topo đại số là xây dựng các hàm tử từ phạm trù các không gian topo (hoặc các phạm trù con của các không gian topo) vào các phạm trù đại số (chẳng hạn như nhóm, vành, module …) và biến mỗi ánh xạ liên tục thành một đồng cấu.

Đồng điều kỳ dị là hàm tử từ phạm trù các không gian topo vào phạm trù các nhóm Abel hoặc vào các module. Bằng việc khảo sát hàm tử này người ta chứng minh được nhiều định lý nổi tiếng như định lý điểm bất động của Brouwer, định lý của Ulam Borsuk, định lý bảo toàn miền của Brouwer…. Vì vậy, đề tài "Đồng điều kỳ dị và ứng dụng" mục đích là để tìm hiểu hàm tử đồng điều kỳ dị và cách chứng minh của các định lý này.

2. Mục đích nghiên cứu

Nghiên cứu về đồng điều kỳ dị và các ứng dụng của nó.

3. Phương pháp nghiên cứu

Thu thập các bài báo khoa học, bài giảng của các tác giả nghiên cứu liên quan đến Lý thuyết đồng điều kỳ dị và các ứng dụng.

Tham gia các buổi thảo luận để trao đổi các kết quả đang nghiên cứu.

4. Cấu trúc của luận văn

Nội dung của luận văn ngoài phần mở đầu và kết luận gồm có ba chương:

Chương 1: Những kiến thức cơ bản

Chương 1 trình bày những kiến thức cơ bản về các phức đơn hình, phạm trù hàm tử, nhóm Abel tự do, module tự do, đồng luân và đồng điều đơn hình.

Chương 2: Đồng điều kỳ dị

Chương 2 trình bày về hàm tử đồng điều kỳ dị, các đồng cấu cảm sinh bởi các ánh xạ liên tục giữa các phức đơn hình, tính nhóm đồng điều của một số không gian topo đơn giản, định lý Khoét và một số tính chất liên quan.

Chương 3: Ứng dụng của đồng điều kỳ dị.

Chương 3 trình bày về các ứng dụng của đồng điều kỳ dị trong đồng điều địa phương và đa tạp.

5. Đóng góp của đề tài

Đề tài có ý nghĩa về mặt lý thuyết, hy vọng tạo được một tài liệu tham khảo tốt cho những người tìm hiểu về Lý thuyết đồng điều kỳ dị.

CHƯƠNG 1
NHỮNG KIẾN THỨC CƠ BẢN

1.1. Phức đơn hình và đa diện

Định nghĩa 1.1.1. *Đơn hình*

Trong không gian $\mathbb{R}^n$*, cho tập hợp các điểm* $\{p_0,...,p_k\}$ *độc lập affine. Tập hợp tất cả các điểm*

$$\left\{x\in\mathbb{R}^n \middle/ x=\sum_{i=0}^{k}\lambda_i p_i,\ \lambda_i\in[0,1],\ \sum_{i=0}^{k}\lambda_i=1\right\}$$

được gọi là một đơn hình k – chiều hay k – đơn hình.

Ta ký hiệu $\sigma=[p_0,...,p_k]$*, trong đó* $p_0,...,p_k$ *là các đỉnh của đơn hình* σ

$dim\sigma=k$ *là chiều của đơn hình* σ.

Định nghĩa 1.1.2. *Phức đơn hình.*

Một phức đơn hình là họ hữu hạn $\mathcal{K}=\{\sigma\}$ *gồm các đơn hình trong không gian* $\mathbb{R}^n$ *thỏa tính chất sau*

(i) Nếu $\sigma\in\mathcal{K}$ *thì mỗi mặt của* σ *cũng thuộc* $\mathcal{K}$.

(ii) Nếu $\sigma,\tau\in\mathcal{K}$ *thì hoặc* $\sigma\cap\tau=\varnothing$ *hoặc* $\sigma\cap\tau$ *là một mặt chung của* σ *và* τ

Với $K=\bigcup_{\sigma\in K}\sigma$

Cặp $(K,\mathcal{K})$ *được gọi là một đa diện. Khi đó,* $\mathcal{K}=sdK$ *được gọi là phân tích đơn hình của đa diện,* $K=|\mathcal{K}|$ *được gọi là giá của* $\mathcal{K}$.

Chiều của đa diện $(K,\mathcal{K})$*, ký hiệu là* $dim(K,\mathcal{K})$ *được định nghĩa như sau*

$$dim(K,\mathcal{K})=\max\{dim\sigma\ /\ \sigma\in\mathcal{K}\}$$

Đường kính của $\mathcal{K}$ *ký hiệu là* $mesh\mathcal{K}$ *và đường kính này được định nghĩa như sau:* $mesh\mathcal{K}=\max\{\delta(\sigma)\ /\ \sigma\in\mathcal{K}\}$

Định nghĩa 1.1.3. *Đa diện con.*

Cho $(K,\mathcal{K})$ *là một đa diện,* $\mathcal{L}\subset\mathcal{K}$. *Nếu* $\mathcal{L}$ *cũng là phức đơn hình thì* $\mathcal{L}$ *được gọi là phức đơn hình con của* $\mathcal{K}$. *Khi đó,* $(L,\mathcal{L})$ *được gọi là đa diện con của đa diện* $(K,\mathcal{K})$*, với* L *là giá của* $\mathcal{L}$.

Định nghĩa 1.1.4. *Cho* $(K,\mathcal{K})$ *là một đa diện* $\sigma\in\mathcal{K}$. *Tập hợp tất cả các mặt thật sự của* σ *ký hiệu là* $\dot{\sigma}$. *Khi đó* $\dot{\sigma}=\mathcal{F}(\sigma)\setminus\sigma$.

Định nghĩa 1.1.5. *Cho* $(K,\mathcal{K})$ *là một đa diện,* $x\in K$. *Khi đó,* $\sigma\in\mathcal{K}$ *được gọi là giá của* x*, ký hiệu* $\sigma(x)$*, nếu* σ *là đơn hình có chiều nhỏ nhất chứa* x. $\sigma(x)$ *là duy nhất và có thể biểu diễn dưới dạng* $\sigma(x)=\bigcap\{\sigma\in\mathcal{K}, x\in\sigma\}$.

Định nghĩa 1.1.6. *Cho* $(K,\mathcal{K})$ *là một đa diện. Với mọi đỉnh* $p\in\mathcal{K}$*, tập hợp*

$$K\setminus\bigcup\{\sigma\in\mathcal{K}, p\notin\sigma\}$$

được gọi là hình sao của p*, ký hiệu là* Stp.

Định lý 1.1.1. *Cho* $p_0,p_1,...,p_n$ *là các đỉnh của đa diện* $(K,\mathcal{K})$. *Khi đó*

(i) $\bigcap_{i=0}^{n}Stp_i\neq\varnothing$ *khi và chỉ khi* $[p_0,p_1,...,p_n]$ *là một đơn hình của* $\mathcal{K}$.

(ii) Nếu $\sigma=[p_0,p_1,...,p_n]$ *là một đơn hình của* $\mathcal{K}$ *thì* $\bigcap_{i=0}^{n}Stp_i$ *là tập hợp gồm tất cả các điểm* $x\in K$ *mà* $\sigma(x)$ *nhận* σ *làm mặt.*

Ta nhận xét rằng nếu $\{p_0, p_1, ..., p_t\}$ là các đỉnh của đa diện $\mathcal{K}$ thì với mỗi $x \in \mathcal{K}$, x được biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng $x = \sum_{i=0}^{t} \lambda_i(x) p_i$, trong đó $\lambda_i \in [0,1]$, với $i = \overline{1,t}$.

Ta có $\lambda_i(x) \in [0,1]$ nếu $p_i \in \sigma(x)$. Khi đó, $\lambda_i(x)$ được gọi là tọa độ của x đối với p_i. Ngược lại, $\lambda_i(x) = 0$ nếu $p_i \notin \sigma(x)$.

Hàm số $\lambda_i : \sigma \longrightarrow [0,1]$, với mỗi $\sigma \in \mathcal{K}$, được gọi là hàm tọa độ trọng tâm của σ. Ta có λ_i là hàm liên tục.

Định nghĩa 1.1.7. *Đồng luân*

Cho hai ánh xạ f, $g : X \longrightarrow Y$ liên tục. Hai ánh xạ f, g được gọi là đồng luân, ký hiệu $f \simeq g$, nếu tồn tại ánh xạ $H : X \times I \longrightarrow Y$ thỏa

$$H(x,0) = f(x);\ H(x,1) = g(x),\ \forall x \in X.$$

Khi đó, H được gọi là đồng luân của f đối với g.

Định lý 1.1.2. *Cho $(K, \mathcal{K})$ là một đa diện trong không gian $\mathbb{R}^n$, Y là không gian topo bất kỳ và f, g là hai ánh xạ liên tục từ Y vào K. Nếu với mỗi $y \in Y$, tồn tại một đơn hình $\sigma \in \mathcal{K}$ thỏa mãn $f(y)$, $g(y) \in \sigma$ thì f và g đồng luân.*

1.2. Thứ phân trọng tâm

Cho một phân tích đơn hình $\mathcal{K}$ của K, chúng ta sẽ xây dựng một phân tích đơn hình $\mathcal{K}'$ khác của K, được gọi là thứ phân trọng tâm của $\mathcal{K}$.

Định nghĩa 1.2.1. *Cho đơn hình $\sigma = [p_o, p_1, ..., p_n]$ trọng tâm của σ là một điểm, ký hiệu b_σ hay $[\sigma]$ được xác định như sau*

$$b_\sigma = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} p_i$$

Nếu $\sigma = p_i$ thì trọng tâm của σ trùng với chính nó.

Định nghĩa 1.2.2. *Cho $(K, \mathcal{K})$ là một đa diện. Khi đó, $Sd^1\mathcal{K}$ gồm tất cả các đơn hình $[b_{\sigma_0}, b_{\sigma_1}, ..., b_{\sigma_s}]$, trong đó $\sigma_0 \subset \sigma_1 \subset \cdots \subset \sigma_s$ là dãy tăng nghiêm ngặt các mặt của $\mathcal{K}$.*

Định lý 1.2.1. *Cho $(K, \mathcal{K})$ là một đa diện có đường kính là μ. Khi đó, đường kính của $Sd^1\mathcal{K} \le \frac{n}{n+1}\mu$.*

Hệ quả 1.2.1. Cho $dim K \le n$, khi đó $mesh Sd^m\mathcal{K} \le (\frac{n}{n+1})^m mesh\mathcal{K}$.

1.3. Ánh xạ đơn hình và xấp xỉ đơn hình

Định nghĩa 1.3.1. *Cho $(K, \mathcal{K})$, $(L, \mathcal{L})$ là hai đa diện trong $\mathbb{R}^n$. Xét ánh xạ*

$\varphi : (K, \mathcal{K}) \longrightarrow (L, \mathcal{L})$, φ được gọi là ánh xạ đơn hình nếu thỏa mãn hai điều kiện sau:

- *Với mọi $[p_0, p_1, ..., p_s] \in \mathcal{K}$, các điểm $\varphi(p_0), \varphi(p_1), ..., \varphi(p_s)$ là các đỉnh của một đơn hình thuộc $\mathcal{L}$.*
- *Ánh xạ φ là ánh xạ afine với mỗi $\sigma \in \mathcal{K}$, nghĩa là $\varphi\left(\sum_{i=0}^{s} \lambda_i p_i\right) = \sum_{i=0}^{s} \lambda_i \varphi(p_i)$*

trong đó $\sum_{i=0}^{s} \lambda_i = 1$ và $\lambda_i \ge 0$ với $i = \overline{1,s}$.

Định nghĩa 1.3.2. *Cho $f : K \longrightarrow L$ là ánh xạ liên tục. Một ánh xạ đơn hình φ với $r \ge 0$ được gọi là một xấp xỉ đơn hình của f nếu $f(Stp) \subset St\varphi(p)$ với mọi đỉnh $p \in Sd^r\mathcal{K}$.*

Định lý 1.3.1. *Cho* $f: K \longrightarrow L$ *là một ánh xạ liên tục. Khi đó, tồn tại xấp xỉ đơn hình* $\varphi:(K, Sd^r\mathcal{K}) \longrightarrow (L, \mathcal{L})$ *của* f *với* r *đủ lớn và mỗi xấp xỉ đơn hình của* f *đều đồng luân với* f.

1.4. Phạm trù và hàm tử

Định nghĩa 1.4.1. *Phạm trù.*

Một phạm trù $\mathcal{P}$ *bao gồm:*

- *Một lớp* $|\mathcal{P}|$ *gồm các vật* $A, B, C...$ *được gọi là những vật của phạm trù* $\mathcal{P}$
- *Với mỗi cặp vật* (A, B) *của phạm trù* $\mathcal{P}$ *cho một tập hợp gọi là tập hợp các cấu xạ* f *từ* A *đến* B, *ký hiệu* $[A,B]_{\mathcal{P}}$. *Mỗi phần tử của* $[A,B]_{\mathcal{P}}$ *được ký hiệu là* f .
- *Với mỗi bộ ba vật* (A, B, C), *với mỗi cặp cấu xạ* $f \in [A,B]_{\mathcal{P}}$, $g \in [B,C]_{\mathcal{P}}$, *tồn tại* gf *được gọi là phép hợp thành của hai cấu xạ* g, f *và* $gf \in [A,C]_{\mathcal{P}}$

thỏa mãn các tiên đề sau:

- *Phép hợp thành có tính chất kết hợp.*
- *Với mọi vật* A *của* $\mathcal{P}$, *tồn tại xạ* $1_A \in [A,A]_{\mathcal{P}}$ *được gọi là cấu xạ đồng nhất sao cho với mọi* $f \in [B,A]_{\mathcal{P}}$, $g \in [B,C]_{\mathcal{P}}$, *ta có* $1_A f = f$, $g1_A = g$

Định nghĩa 1.4.2. *Phạm trù con.*

Một phạm trù $\mathcal{C}$ *được gọi là phạm trù con của phạm trù* $\mathcal{P}$ *nếu*

- *Mỗi vật của phạm trù* $\mathcal{C}$ *đều là một vật của phạm trù* $\mathcal{P}$.
- *Mỗi cấu xạ của phạm trù* $\mathcal{C}$ *đều là một cấu xạ của phạm trù* $\mathcal{P}$.
- *Các xạ đồng nhất của phạm trù* $\mathcal{C}$ *đều là một xạ đồng nhất của phạm trù* $\mathcal{P}$.

- *Hợp thành* gf *của hai cấu xạ* f, g *trong phạm trù* $\mathcal{C}$ *đều trùng với hợp thành của các cấu xạ đó trong phạm trù* $\mathcal{P}$.

Một phạm trù con $\mathcal{C}$ *của phạm trù* $\mathcal{P}$ *được gọi là đầy nếu* $[A,B]_{\mathcal{C}} = [A,B]_{\mathcal{P}}$, *với mỗi cặp* A, B *trong phạm trù* $\mathcal{C}$.

Định nghĩa 1.4.3. *Vật khởi đầu, vật tận cùng*

Mỗi vật A *trong phạm trù* $\mathcal{P}$ *được gọi là vật khởi đầu nếu với mọi vật* X *của* $\mathcal{P}$, *tồn tại duy nhất một cấu xạ từ* A *đến* X

Một vật A *trong phạm trù* $\mathcal{P}$ *được gọi là vật tận cùng nếu với mọi vật* X *của* $\mathcal{P}$, *tồn tại duy nhất một cấu xạ từ* X *đến* A.

Định nghĩa 1.4.4. *Hàm tử*

Cho hai phạm trù $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$. *Một hàm tử hiệp biến* $\mathcal{H}$ *từ phạm trù* $\mathcal{P}$ *đến phạm trù* $\mathcal{P}'$, *ký hiệu* $\mathcal{H}: \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}'$ *là một cặp ánh xạ gồm ánh xạ - vật và ánh xạ - cấu xạ.*

- *Ánh xạ - vật cho tương ứng mỗi vật* A *của phạm trù* $\mathcal{P}$, *một vật của phạm trù* $\mathcal{P}'$, *ký hiệu là* $\mathcal{H}(A)$.
- *Ánh xạ - cấu xạ cho tương ứng mỗi cấu xạ* $f \in [A,B]_{\mathcal{P}}$, *một cấu xạ thuộc* $[\mathcal{H}(A), \mathcal{H}(B)]_{\mathcal{P}'}$, *ký hiệu là* $\mathcal{H}(f)$

và thỏa mãn các điều kiện sau:

- $\mathcal{H}(1_A) = 1_{\mathcal{H}(A)}$, *với mọi* $A \in |\mathcal{P}|$.
- $\mathcal{H}(gf) = \mathcal{H}(g)\mathcal{H}(f)$, *với mọi hợp thành* gf *trong phạm trù* $\mathcal{P}$, *nghĩa là*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "gf"'] & & B \arrow[dl, "g"] \\ & C & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{H}(A) \arrow[rr, "\mathcal{H}(f)"] \arrow[dr, "\mathcal{H}(gf)"'] & & \mathcal{H}(B) \arrow[dl, "\mathcal{H}(g)"] \\ & \mathcal{H}(C) & \end{tikzcd}$$

1.5. Nhóm Abel tự do, Module tự do

Mệnh đề 1.5.1. *A là tập hợp khác rỗng $x, y, \ldots$ là các phần tử thuộc A. Ta đặt:*

$$X = \{ f : A \longrightarrow \square / \exists\, A' \text{ hữu hạn, } A' \subset A : f(x) = 0, \forall x \in A \setminus A' \}$$

với mọi $f, g \in X$, ta định nghĩa phép cộng trên X như sau

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad \forall x \in A$$

Khi đó, X cùng với phép cộng lập thành một nhóm Abel.

Định nghĩa 1.5.1. *Nhóm Abel tự do*

Nhóm Abel X được xác định như trên được gọi là nhóm Abel tự do sinh bởi A.

Định nghĩa 1.5.2. *Giả sử R là một $V-$module, $\varnothing \neq S \subset R$. Khi đó, S được gọi là cơ sở của R nếu mỗi phần tử của R đều được biểu diễn tuyến tính duy nhất qua các phần tử của S.*

Hệ quả 1.5.1. *Cho R là một $V-$module. Nếu S là cơ sở của R thì S là hệ sinh độc lập tuyến tính.*

Mệnh đề 1.5.2. *Cho A là tập hợp khác rỗng, $x, y, \ldots$ là các phần tử thuộc A ; V là một vành, $\alpha, \beta, \ldots$ là các phần tử thuộc V. Ta đặt*

$$X = \{ f : A \longrightarrow V / \exists A' \text{ hữu hạn }, A' \subset A : f(x) = 0, \forall x \in A \setminus A' \}$$

Với mọi $g, f \in X$, với mọi $\alpha \in V$ ta định nghĩa phép cộng, phép nhân ngoài trên X như sau :

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in A$$
$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \forall x \in A$$

Khi đó, X cùng với phép cộng, phép nhân ngoài lập thành một $V-$Module.

Định nghĩa 1.5.2 *Module tự do.*

Module X được thành lập như trên gọi là module tự do sinh bởi A

1.6. Đồng điều đơn hình

1.6.1. Các định nghĩa.

Cho K là một phức đơn hình hữu hạn với các đỉnh được sắp thứ tự tuyến tính. Khi đó, mỗi đơn hình $[q_0, q_1, ..., q_n]$ có thể được viết duy nhất thành $[p_0, p_1, ..., p_n]$ với $(p_0 < p_1 < \cdots < p_n)$ và được gọi là $n-$ đơn hình định hướng.

Định nghĩa 1.6.1.1. *Với mỗi $n \geq 0$, nhóm Abel tự do $C_n(\mathrm{K})$ sinh bởi các n – đơn hình định hướng của K được gọi là nhóm các xích n - chiều của K. Rõ ràng, $C_n(\mathrm{K}) = 0$ nếu $n > \dim \mathrm{K}$.*

Với mỗi $n \geq 1$, toán tử biên $\partial : C_n(\mathrm{K}) \longrightarrow C_{n-1}(\mathrm{K})$ là đồng cấu xác định trên mỗi phần tử sinh bởi công thức $\partial |p_0, p_1, ..., p_n| = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i |p_0, p_1, ..., \hat{p_i}, ..., p_n|$.

Bổ đề 1.6.1.1. *Cho G, G' là các nhóm giao hoán; H, H' lần lượt là các nhóm con của G, G'; $\varphi : G \longrightarrow G'$; là đồng cấu nhóm thỏa $\varphi(H) \subset H'$. Khi đó, tồn tại đồng cấu nhóm*

$$\phi : G/H \longrightarrow G'/H'$$
$$g + H \longmapsto \varphi(g) + H'$$

Hơn nữa, nếu φ là đẳng cấu và $\varphi(H) = H'$ thì ϕ là đẳng cấu và ϕ được gọi là đồng cấu cảm sinh bởi φ.

Bổ đề 1.6.1.2. *Cho* X, X' *là các không gian vector trên trường* G; Y, Y' *lần lượt là các không gian vector con của* X, X'. *Nếu* $\varphi: X \longrightarrow X'$ *là ánh xạ tuyến tính và* $\varphi(Y) \subset Y'$ *thì*

$$\begin{aligned} \phi:\ & X/Y \longrightarrow X'/Y' \\ & x + Y \longmapsto \varphi(x) + Y' \end{aligned}$$

cũng là ánh xạ tuyến tính. Nếu φ *là đẳng cấu và* $\varphi(Y) = Y'$ *thì* ϕ *cũng là đẳng cấu.*

1.6.2. Các phép biến đổi xích và các xích đồng luân

Cho K, L là hai phức đơn hình.

Định nghĩa 1.6.2.1 *Một họ* $\tau = \{\tau_n\}$ *các đồng cấu*

$$\tau_n : C_n(\mathsf{K}, G) \longrightarrow C_n(\mathsf{L}, G), \forall n \geq 0$$

Sao cho $\varphi_{n+1}\tau_{n+1} = \tau_n \varphi_{n+1}, \forall n \geq 0$

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] & C_n(\mathcal{K}, G) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "\tau_n"] & C_{n-1}(\mathcal{K}, G) \arrow[r, "\partial_{n-1}"] \arrow[d, "\tau_{n-1}"] & \cdots \arrow[r, "\partial_1"] & C_0(\mathcal{K}, G) \arrow[r, "\partial_0"] \arrow[d, "\tau_0"] & {} \\ {} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] & C_n(\mathcal{L}, G) \arrow[r, "\partial_n"] & C_{n-1}(\mathcal{L}, G) \arrow[r, "\partial_{n-1}"] & \cdots \arrow[r, "\partial_1"] & C_0(\mathcal{L}, G) \arrow[r, "\partial_0"] & {} \end{tikzcd}$$

được gọi là một biến đổi xích hay một ánh xạ xích.

Định nghĩa 1.6.2.2. *Cho* $\tau, \mu : C_*(\mathsf{K}, G) \longrightarrow C_*(\mathsf{L}, G)$ *là hai ánh xạ xích. Một đồng luân xích nối* τ, μ *là họ* $D = \{D_n\}$ *các đồng cấu* $D_n : C_n(\mathsf{K}, G) \longrightarrow C_{n+1}(\mathsf{L}, G)$, $\forall n \geq 0$ *thỏa*

$$\tau_n - \mu_n = \partial_{n+1} D_n + D_{n+1} \partial_n, \forall n \geq 1$$

Ta nói τ, μ *là các xích đồng luân nếu* D *tồn tại*

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r] & C_{n+1}(\mathsf{K}, G) \arrow[r] \arrow[d, "\tau_{n+1}, \mu_{n+1}"] \arrow[dl, "D_{n+1}"'] & C_n(\mathsf{K}, G) \arrow[r] \arrow[d, "\tau_n, \mu_n"] \arrow[dl, "D_n"'] & \cdots \arrow[r] & C_0(\mathsf{K}, G) \arrow[r] \arrow[d, "\tau_0, \mu_0"] \arrow[dl, "D_0"'] & 0 \\ {} \arrow[r] & C_{n+1}(\mathsf{L}, G) \arrow[r] & C_n(\mathsf{L}, G) \arrow[r] & \cdots \arrow[r, "\partial_1"] & C_0(\mathsf{L}, G) \arrow[r, "\partial_0"] & 0 \end{tikzcd}$$

Định lý 1.6.2.1. *Ta có*

(i) $\pi_\# \circ Sd : C_*(\mathsf{K}) \longrightarrow C_*(\mathsf{K})$ *là ánh xạ đồng nhất trên* $C_*(\mathsf{K})$

(ii) $Sd \circ \pi_\# : C_*(\mathsf{K}') \longrightarrow C_*(\mathsf{K}')$ *là đồng luân xích với ánh xạ đồng nhất trên* $C_*(\mathsf{K}')$.

1.6.3. Đồng cấu cảm sinh

Cho K, L là hai phức đơn hình. Một ánh xạ đơn hình $\varphi : \mathsf{K} \longrightarrow \mathsf{L}$ cảm sinh một đồng cấu $\varphi_* : H_*(\mathsf{K}, G) \longrightarrow H_*(\mathsf{L}, G)$. Ta sẽ xây dựng một đồng cấu duy nhất $f_* : H_*(\mathsf{K}, G) \longrightarrow H_*(\mathsf{L}, G)$ đối với mỗi ánh xạ liên tục $f : K \longrightarrow L$

Bổ đề 1.6.3.1. *Cho ánh xạ* $f : K \longrightarrow L$ *liên tục, hai xấp xỉ đơn hình*

$$\varphi : \mathsf{K}^m \longrightarrow \mathsf{L},$$
$$\psi : \mathsf{K}^{m+1} \longrightarrow \mathsf{L}$$

của f $(m, s \geq 0)$. *Khi đó, các đồng cấu* $\varphi_* Sd_*^m;\ \psi_* Sd_*^{m+s} : H_*(\mathsf{K}, G) \longrightarrow H_*(\mathsf{L}, G)$ *trùng nhau.*

Định nghĩa 1.6.3.1. *Cho* $f : K \longrightarrow L$ *là ánh xạ liên tục bất kỳ giữa các đại diện,* $\varphi : \mathsf{K}^m \longrightarrow \mathsf{L}$ *là một xấp xỉ đơn hình của* f. *Khi đó, đồng cấu*

$$f_* : H_*(\mathsf{K}, G) \longrightarrow H_*(\mathsf{L}, G)$$

được ký hiệu $\varphi_* Sd^m : H_*(\mathsf{K}, G) \longrightarrow H_*(\mathsf{L}, G)$

Định lý 1.6.3.1. *Cho* $K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} P$. *Khi đó,* $g_* f_* = (gf)_*$ *và* $(id_K)_* = id_{H_*(\mathsf{K}, G)}$.

Bổ đề 1.6.3.2. *Cho* K *là một đa diện. Giả sử* $\alpha,\ \beta:[0,1]\longrightarrow[0,1]$ *là hai ánh xạ liên tục mà* $\alpha\neq\beta$ *và* $(id\times\alpha)_*=(id\times\beta)_*:H_*(P\times I)\longrightarrow H_*(P\times I)$. *Khi đó, với mỗi đa điện* P, *các ánh xạ đồng luân* $f,\ g:K\longrightarrow P$ *cảm sinh các đồng cấu*

$$f_*=g_*:H_*(K,G)\longrightarrow H_*(P,G).$$

Định lý 1.6.3.2. *Cho* P,K *là các đa điện hữu hạn ;* $f,g:K\longrightarrow P$ *là ánh xạ liên tục. Nếu* $f=g$ *thì* $f_*=g_*:H_*(P)\longrightarrow H_*(K)$

Định lý 1.6.3.3. *Cho* P,K *là các phức đơn hình,* $h:|P|\longrightarrow|K|$ *đồng phôi thì ánh xạ sau đẳng cấu* $h_*:H_*(P,G)\longrightarrow H_*(K,G)$.

Định lý 1.6.3.4. *Cho* P,K *là các phức đơn hình,* $f:|P|\longrightarrow|K|$ *là một tương đối đồng luân thì* $f_*:H_*(P)\longrightarrow H_*(K)$ *là một đẳng cấu.*

1.6.4 Đồng điều tương đối

Cho K là đa diện, L là đa diện con của K. Xét nhóm thương $C_n(K)/C_n(L)$ và đồng cấu biên

$\hat{\partial}:C_n(K)/C_n(L)\longrightarrow C_{n-1}(K)/C_{n-1}(L)$ xác định bởi

$\hat{\partial}(c_n+C_n(L))=\partial(c_n)+C_{n-1}(L)$

hay ký hiệu $\hat{\partial}[c_n]=[\partial c_n]$

CHƯƠNG 2
ĐỒNG ĐIỀU KỲ DỊ

2.1. Đơn hình kỳ dị và xích kỳ dị

2.1.1. Đơn hình kỳ dị và xích kỳ dị

$\forall n\in\mathbb{N};\ i=\overline{0,n+1},\ e_i=(0,...0,1,0,...,0)\in\mathbb{R}^{n+1},\ \Delta^n=[e_1,e_2,...,e_n]$ gọi là n – đơn hình chuẩn

$$\Delta^n=\left\{(t_0,...,t_n)\in\mathbb{R}^{n+1}\,\middle|\,\sum_{i=0}^{n}t_i=1,t_i\geq 0\right\}$$

Với mỗi $n\in\mathbb{N}$, $i=0,1,...,n$, ta đặt $\Delta_i^n=\left\{(t_0,...,t_n)\in\Delta^n\,\middle|\,t_i=0\right\}$ được gọi là mặt thứ i của Δ^n đối diện với đỉnh e_i

Định nghĩa 2.1.1.1

Cho X là một không gian topo , một n – đơn hình kỳ dị trong X *là một ánh xạ liên tục* $T:\Delta^n\longrightarrow X$.

Định nghĩa 2.1.1.2. *Cho* X,Y *là hai không gian topo,* $f:X\longrightarrow Y$ *liên tục.*

Nếu $T:\Delta^n\longrightarrow X$ *là một n – đơn hình kỳ dị trong* X *thì hợp* $f\circ T:\Delta^n\longrightarrow Y$ *là một n – đơn hình kỳ dị trong* Y *và được ký hiệu bởi* fT.

Với mọi $c=\sum n_iT_i\in C_n(X)$, *ta đặt* $C_n(f)(c)=\sum n_i(fT_i)$. *Khi đó ta được một đồng cấu* $C_n(f):C_n(X)\longrightarrow C_n(Y)$ *cảm sinh bởi* f.

2.1.2. Đồng cấu biên. Phức kỳ dị $C_*(X)$

$n\geq 1$, xét $d_i:\Delta^{n-1}\longrightarrow\Delta^n$ là ánh xạ xác định bởi:

$$d_i(t_0,t_1,...,t_{n-1})=(t_0,...,t_{i-1},0,t_i,...,t_{n-1})\quad i\in\{0,1,...,n\}$$

Định nghĩa 2.1.2.1. *Xét đồng cấu biên* $\partial_n : C_n(X) \longrightarrow C_{n-1}(X)$ *như sau*

Với $T : \Delta^n \longrightarrow X$, $(n \geq 0)$ *là một n – đơn hình kỳ dị thì*

$$\partial_n T \overset{\Delta}{=} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i T d_i$$

Khi đó, với $c = \sum n_i T_i \in C_n(X)$ thì $\partial_n(c) \overset{\Delta}{=} \sum n_i(\partial_n T_i) \Rightarrow \partial_n \partial_{n+1} = 0$

Định nghĩa 2.1.2.2.

Cho không gian X *bất kỳ, dãy* $C_*(X) = \{C_n(X), \partial_n / n = 0,1,2,...\}$ *được gọi là phức kỳ dị của* X *và dãy*

$$H_*(X) = \{H_n(X)\} = H(C_*(X)) = \{H_n(C_*(X))\}$$

được gọi là nhóm đồng điều kỳ dị phân bậc của X.

Đối với một ánh xạ liên tục $f : X \longrightarrow Y$, *cho* $H_*(f) = \{H_n(f) : H_n(X) \longrightarrow H_n(Y)\}$ *là đồng cấu phân bậc của các nhóm đồng điều kỳ dị cảm sinh bởi ánh xạ xích* $C_*(f)$

$$H_n(f) : H_n(X) \longrightarrow H_n(Y)$$

$$z + B_n(X) \longmapsto C_n(f)(z) + B_n(Y)$$

Định nghĩa 2.1.2.3. Cho X, Y *là không gian topo,*

$f : X \longrightarrow Y$ *liên tục*

$f_{\#n} : C_n(X) \longrightarrow C_n(Y)$ *xác định bởi*

$$c = \sum n_i T_i \longmapsto C_n(f)(c) = \sum n_i (f \circ T_i)$$

thì f *là đồng cấu, từ đây ta suy ra sơ đồ sau giao hoán*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{n+1}(X) \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, "f_{\#n+1}"] & C_n(X) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "f_{\#n}"] & C_{n-1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "f_{\#n-1}"] & \cdots \arrow[r] & C_1(X) \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "f_{\#1}"] & C_0(X) \arrow[r, "\partial_0"] \arrow[d, "f_{\#0}"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & C_{n+1}(Y) \arrow[r, "\partial_{n+1}"] & C_n(Y) \arrow[r, "\partial_n"] & C_{n-1}(Y) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & C_1(Y) \arrow[r, "\partial_1"] & C_0(Y) \arrow[r, "\partial_0"] & 0
\end{tikzcd}$$

nghĩa là $f_{\#n} \partial_{n+1} = \partial_{n+1} f_{\#n+1}$

Bổ đề 2.1.2.1. *Cho* $\{X\}_{\alpha \in \Lambda}$ *là những thành phần liên thông đường của* X *thì*

$$H_n(X) \cong \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} H_n(X_\alpha)$$

Bổ đề 2.1.2.2. *Cho* $X \neq \varnothing$, X *liên thông đường thì* $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$

Bổ đề 2.1.2.3. *Cho p là một điểm của* X *thì*

$H_0(p) \cong \mathbb{Z}$, $H_n(p) = 0, \forall n > 1$

2.1.3. Nhóm tương đối, dãy khớp dài

Định lý 2.1.3.1. *Dãy đồng điều của một cặp*

Định lý.2.1.3.2. *Dãy đồng điều của bộ ba*

2.2 . Tính bất biến của đồng luân đối với thứ phân trọng tâm

Định lý 2.2.1. *Cho* f, $g : X \longrightarrow Y$ *là đồng luân. Khi đó* $\forall n \geq 0$,

$$f_{*n} = g_{*n} : H_n(X) \longrightarrow H_n(Y)$$

Định lý 2.2.2. *Cho* $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ *liên tục, đồng luân*

$\exists F : X \times I \longrightarrow Y$ *liên tục:*

$F(x,0) = f(x)$

$F(x,1) = g(x) \quad \forall x \in X$

$F(a,t) \in B, \quad \forall a \in A;\ \forall t \in I$

Khi đó $f_{*n} = g_{*n} : H_n(X, A) \longrightarrow H_n(X, B)$

2.2. Định lý Khoét

Định nghĩa 2.3.1. *Cho* X *là tập hình sao tại* w, $T:\Delta^n \longrightarrow X$ *là n – đơn hình. Ta xây dựng (n+1)- đơn hình xuất phát từ T vào w, ký hiệu đơn hình này là* $[T,w]$. *Khi đó* $[T,w]$ *liên tục với* $c=\sum n_i T_i \in C_n(X)$, *ta ký hiệu* $[c,w]=\sum n_i[T_i,w]$. *Bây giờ ta sẽ tính biên của* $[c,w]$

Bổ đề 2.3.1. *Cho* X *là tập hình sao tại* w, *c là n – xích kỳ dị của* X.

Cho $T_w:\Delta^0 \longrightarrow X$ *là 0 - đơn hình,*

$$x \longmapsto w$$

với $c=\sum n_i T_i$ *là* w *- đơn hình.*

$$\text{Khi đó } \partial_{n+1}[c,w]=\begin{cases}[\partial c,w]+(-1)^{n+1}c & \text{nếu n} >0\\ \varepsilon(c)T_w - c & \text{nếu n}=0\end{cases}$$

Định nghĩa 2.3.2. *Cho* X *là không gian Topo,* $\mathcal{A}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ *là một phủ của* X *mà* $X=\bigcup_{\alpha\in\Lambda} IntU_\alpha$ *thì* $\mathcal{A}$ *được gọi* $\mathcal{A}$ *- nhỏ.*

Bổ đề 2.3.2. *Cho* $T:\Delta^n \longrightarrow \sigma$, *(*$\sigma=[p_0,...,p_n]$ *là n – đơn hình) là phép đồng phôi tuyến tính.*

Khi đó mỗi thành phần $T:\Delta^n \longrightarrow \sigma$ *của* $Sd_n^X T$ *sẽ là phép đồng phôi tuyến tính từ* Δ^n *đến* $T_i(\Delta^n)$ *là một thành phần trong thứ phân thứ nhất của* σ.

Định lý 2.3.2. *Cho* $\mathcal{A}$ *là họ các tập con của* X *mà có phần trong phủ* X

($\mathcal{A}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} IntU_\alpha = X$ *). Cho* $T:\Delta_n \longrightarrow X$ *liên tục. Khi đó* $\exists m\in \mathbb{N}$ *sao cho mỗi thành phần của* $Sd^m T$ *là* $\mathcal{A}$ *- nhỏ.*

Bổ đề 2.3.3. $\forall m\in \mathbb{N}$, X *là không gian bất kỳ,*

$\exists\, D^X=\{D_n^X\}: C_n(X) \longrightarrow C_{n+1}(X)$ *sao cho:* $\partial_{n+1}^X D_n^X(T)+D_{n-1}^X\partial_n^X(T)=Sd^{mX}_n(T)-T$ *với* $T:\Delta^n \longrightarrow X$ *liên tục.*

Hơn nữa D_n^X *là tự nhiên, nếu* $f:X\longrightarrow Y$ *thì*

$D_{n+1}^Y f_{\#n+1} = f_{\#n+2} D_{n+1}^X$.

Định lý 2.3.2. *Cho* X *là không gian topo,* $\mathcal{A}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ *là một họ các tập con của* X *mà* $X=\bigcup_{\alpha\in\Lambda} IntU_\alpha$. *Khi đó ánh xạ nhúng*

$$\begin{aligned} i_{\#n}: C_n^{\mathcal{A}}(X) &\longrightarrow C_n(X)\\ c=\sum n_i T_i &\longmapsto c\end{aligned}$$

cảm sinh một đẳng cấu giữa các nhóm đồng điều $H_n^{\mathcal{A}}(X), H_n(X)$ *(cũng đúng cho đồng điều thu gọn)*

Định lý 2.3.3. *Định lý Khoét*

Cho $A\subset X$, U *mở trong* X *sao cho* $\overline{U}\subset IntA$ *thì phép nhúng*

$$j:(X\setminus U, A\setminus U) \longrightarrow (X,A)$$

cảm sinh một đẳng cấu trong đồng điều kỳ dị.

Định nghĩa 2.3.3. *Dãy Mayer - Vietoris*

Cho $X=X_1\cup X_2$, *cho* $C(X_1)+C(X_2)\overset{\Delta}{=}C^{\mathcal{A}}(X)$ *với* $\mathcal{A}=\{X_1,X_2\}$.

Ta nói $\{X_1, X_2\}$ *là một cặp khoét nếu phép nhúng*

$$C(X_1)+C(X_2)\longrightarrow C(X)$$

cảm sinh một đẳng cấu các nhóm đồng điều.

Định lý 2.3.4. *Dãy Mayer – Vietoris*

Cho $X = X_1 \cup X_2$, $\{X_1, X_2\}$ *là một cặp khoét của* X *thì dãy sau đây khớp*

$$\cdots\longrightarrow H_n(A)\xrightarrow{\varphi_{*n}} H_n(X_1)\oplus H_n(X_2)\xrightarrow{\psi_{*n}} H_n(X)\longrightarrow H_{n-1}(A)\longrightarrow\cdots$$

gọi là dãy Mayer – Vietoris của $\{X_1, X_2\}$ *với* $A = X_1 \cap X_2$. *Định nghĩa*

$$\varphi_*(a) = (i_*(a), j_*(a))$$

$$\psi_*(x_1, x_2) = k_*(x_1) + l_*(x_2)$$

với ánh xạ

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & X_1 \arrow[d, "k"] \\ X_2 \arrow[r, "l"'] & X \end{tikzcd}$$

2.4. Tính nhóm đồng điều của một số không gian topo đơn giản

Cho X là không gian topo, $f: I\longrightarrow X$ là một đường đi, ta đặt $p:\Delta^1\longrightarrow I$ xác định bởi $p(t_0,t_1)=t_0$; $\forall (t_0,t_1)\in\Delta^1$.

$\tilde{f}:\Delta^1\longrightarrow X$ được xác định bởi $\tilde{f} = f\circ p$. Khi đó $\tilde{f}$ là 1-đơn hình kỳ dị. Nếu f là 1-loop ($f(0) = f(1) = x$, x nào đó $\in X$), khi đó $\partial\tilde{f} = 0$

Định lý 2.4.1. *Với phép tương ứng trên, ta được một đồng cấu*

$$h:\pi_1(X,x_0)\longrightarrow H_1(X)$$

Nếu X *liên thông đường thì h là toàn cấu và* $\mathrm{Ker}h$ *là nhóm con giao hoán tử của* $\pi_1(X,x_0)$. *Vì thế nếu* $\pi_1(X,x_0)$ *là nhóm Abel thì* h *là một đẳng cấu.*

Bổ đề 2.4.1. *Cho* G *là một nhóm,* H *là nhóm con giao hoán tử của* G. *Khi đó* H *là nhóm con chuẩn tắc của* G *và* G/H *là nhóm Abel.*

Bổ đề 2.4.2. *Cho* G *là nhóm,* H *là nhóm con giao hoán tử của* G. *Cho*

$x = x_1^{\varepsilon_1}x_2^{\varepsilon_2}\ldots x_n^{\varepsilon_n}$ $(x_1,x_2,\ldots,x_n\in G, \varepsilon_i = 1$ *hay* $\varepsilon_i=-1; \forall i=\overline{1,n})$. *Nếu* $\forall c=\overline{1,n}$, $\sum\limits_{\substack{x_j=x_i\\ j\in\{1,\ldots,n\}}} \varepsilon_j = 0$ *thì* $x\in H$

CHƯƠNG 3
ỨNG DỤNG CỦA ĐỒNG ĐIỀU KỲ DỊ

3.1 Ứng dụng trong nhóm đồng điều địa phương

Định nghĩa 3.1.1.

Cho X *là không gian Hausdorff các nhóm đồng điều kỳ dị* $H_n\left(X, X\setminus\{x_0\}\right)$, $n\in\mathbb{Z}$ *được gọi là nhóm đồng điều địa phương của* X *tại* x_0.

Định nghĩa 3.1.2. Định nghĩa Acylic

X *được gọi Acylic nếu* $H_n(x)=0, \forall n\ge 1$ *và* $H_0(x)\cong\mathbb{Z}$

Định nghĩa 3.1.3. Co rút biến dạng

Cho X là không gian topo $\varnothing\ne A$, $A\subset X$. A *được gọi là co rút biến dạng của* X *nếu* $\exists\ r: X\longrightarrow A$ *là phép co rút*

$$\exists\ H: X\times I\longrightarrow X \text{ liên tục}$$
$$H(x,0)=r(x)\qquad \forall x\in X$$
$$H(x,1)=x\qquad \forall x\in X$$
$$H(a,t)\in A\qquad \forall a\in A$$

Bổ đề 3.1.1. *Cho* X *là không gian Hausdorff,* $A\subset X$, $A\supset U$, U *mở trong* X, $x_0\in X$ *thì*

$$H_n\left(X, X\setminus\{x_0\}\right)\cong H_n\left(A, A\setminus\{x_0\}\right)$$

Do đó, nếu $x\in X$ *và* $y\in Y$ *có các lân cận mở* U, V *tương ứng thỏa mãn*

$$\exists\varphi:(U,x)\longrightarrow(V,y)$$

là phép đồng phôi thì $H_n\left(X, X\setminus\{x\}\right)\cong H_n\left(Y, Y\setminus\{y\}\right)$

Định lý 3.1.1. *Cho* $x\in\mathbb{R}^m$, *khi đó* $H_n\left(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^m\setminus\{x\}\right)\cong\mathbb{Z}$ *nếu* $n=m$, $H_n\left(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^m\setminus\{x\}\right)\cong 0$ *nếu* $n\ne m$.

Định lý 3.1.2. *Cho* $H^m=\left\{(x_1,x_2,...,x_m)\in\mathbb{R}^m / x_m\ge 0\right\}$ *và ta định nghĩa*

$$BdH^m\overset{\Delta}{=}\left\{(x_1,x_2,...,x_m)\in\mathbb{R}^m / x_m=0\right\}$$

Nếu $x=(x_1,x_2,...,x_m)\in BdH^m$ *thì* $H_n\left(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^m\setminus\{x\}\right)=0\ \forall n\ge 0$, *nếu* $x\in H^m\setminus BdH^m$ *thì*

$$H_n\left(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^m\setminus\{x\}\right)\cong\mathbb{Z}\ \text{ khi } n=m$$
$$H_n\left(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^m\setminus\{x\}\right)=0\ \text{ khi } n\ne m$$

3.2. Ứng dụng trong đa tạp

Định nghĩa 3.2.1. M *là không gian topo khả metric,* M *được gọi là đa tạp* n *chiều nếu* $\forall\ x\in M$ *tồn tại lân cận mở* U_x *của* x *mà* U_x *đồng phôi với* $\mathbb{R}^n$.

Định lý 3.2.1. *Cho* U *là tập mở trong* $\mathbb{R}^m$, V *là tập mở trong* $\mathbb{R}^n$, $U,V\ne\varnothing$, $m>n$, $m\ne n$ *thì* U, V *không thể đồng phôi với nhau.*

Định lý 3.2.2. *Cho* $m\ne n$ *thì đa tạp* m *chiều và đa tạp* n *chiều không đồng phôi với nhau.*

Định lý 3.2.3. *Cho* $X=\mathbb{R}^n$, $\varnothing\ne A\subset X$, A, *compact thì* $X, X\setminus A$ *không đồng phôi với nhau.*

KẾT LUẬN

Luận văn chủ yếu đọc hiểu và làm rõ một số nội dung sau:

1. Trình bày một cách hệ thống các khái niệm định nghĩa về phức đơn hình, phạm trù, hàm tử, nhóm Abel tự do, đồng điều đơn hình.

2. Trình bày về hàm tử đồng điều kỳ dị, các đồng cấu cảm sinh bởi các ánh xạ liên tục giữa các phức đơn hình, tính nhóm đồng điều của một số không gian topo đơn giản, định lý Khoét và một số tính chất liên quan.

3. Trình bày về các ứng dụng của đồng điều kỳ dị trong đồng điều địa phương và đa tạp.