BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

– – – – – – – – – – –

ĐINH THỊ DUY PHƯƠNG

MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA ĐỊNH LÝ LAGRANGE TRONG ĐẠI SỐ

Chuyên ngành : PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số : 60 46 40

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

ĐÀ NẴNG - 2011

Công trình được hoàn thành tại

ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

Người hướng dẫn khoa học: **GS.TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU**

Phản biện 1: **TS. LÊ HOÀNG TRÍ**

Phản biện 2: **PGS.TS. TRẦN ĐẠO DÕNG**

Luận văn sẽ được bảo vệ trước Hội đồng chấm Luận văn tốt nghiệp thạc sĩ khoa học họp tại Đại học Đà Nẵng vào ngày 26 tháng 11 năm 2011.

Có thể tìm hiểu Luận văn tại:

- Trung tâm Thông tin-Học liệu, Đại học Đà Nẵng
- Thư viện trường Đại học sư phạm, Đại học Đà Nẵng.

MỞ ĐẦU

1. TÍNH CẤP THIẾT CỦA ĐỀ TÀI

Trong những năm gần đây, những kỳ thi học sinh giỏi cấp quốc gia, quốc tế, các kỳ thi Olympic Toán Sinh Viên giữa các trường đại học trong nước thì các bài toán liên quan đến tính liên tục và đạo hàm của hàm số thường xuyên xuất hiện và phổ biến nhất là dạng toán chứng minh phương trình có nghiệm, giải phương trình, chứng minh bất đẳng thức. Đối với các dạng toán này, các định lý về giá trị trung bình đóng một vai trò quan trọng, là một công cụ hiệu quả trong việc giải quyết các bài toán nói trên. Vì những lý do nêu trên nên tôi chọn đề tài "Một số ứng dụng của định lý Lagrange trong đại số" nhằm tổng quan các định lý về giá trị trung bình và hệ thống phương pháp giải một số dạng toán mà công cụ hiệu quả để giải quyết là các định lý nêu trên.

2. MỤC ĐÍCH NGHIÊN CỨU

Mục đích của đề tài này là trình bày một cách có hệ thống về định lý Lagrange và hệ quả, mở rộng của nó là định lý Rolle và định lý Cauchy, gắn với chúng là các tính chất về tính đơn điệu và tính lồi, lõm, khả vi bậc hai của hàm số và một số ứng dụng vào đại số.

3. ĐỐI TƯỢNG VÀ PHẠM VI NGHIÊN CỨU

Lý thuyết về các định lý về giá trị trung bình và ứng dụng trong việc khảo sát tính đơn điệu, tính lồi, lõm, khả vi bậc hai của hàm số, xét các ứng dụng trong các bài toán giải phương trình, chứng minh sự tồn tại nghiệm, biện luận số nghiệm của phương trình, chứng minh bất đẳng thức, xét sự phân bố nghiệm của đa thức và đạo hàm.

4. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

- Nghiên cứu các tài liệu sách giáo khoa trung học phổ thông, các tài liệu dành cho giáo viên, các đề tài nghiên cứu khoa học, tạp chí Toán học và tuổi trẻ.

- Sưu tầm, phân tích, tổng hợp các tư liệu một cách có hệ thống.

- Nghiên cứu qua thực tế giảng dạy.

5. Ý NGHĨA KHOA HỌC VÀ THỰC TIỄN CỦA ĐỀ TÀI

Tạo được một đề tài phù hợp cho việc giảng dạy, bồi dưỡng học sinh trung học phổ thông.

6. CẤU TRÚC LUẬN VĂN

Luận văn gồm ba chương và phần mở đầu, kết luận.

Chương 1 trình bày các kiến thức liên quan đến định lý Lagrange và các hệ quả, mở rộng của nó (định lý Rolle, định lý Cauchy).

Chương 2 xét nêu ứng dụng của định lý Rolle và định lý Lagrange trong việc khảo sát hai tính chất rất cơ bản và quan trọng của hàm số trong chương trình toán THPT, đó là tính đồng biến, nghịch biến và tính chất của hàm lồi (lõm) khả vi bậc hai.

Chương 3 trình bày một số ứng dụng định lý Lagrange trong đại số. Xét các ứng dụng của Định lý Lagrange và các hệ quả trong các bài toán về giải phương trình, biện luận số nghiệm của phương trình, chứng minh bất đẳng thức, sự phân bố nghiệm của đa thức và đạo hàm.

CHƯƠNG 1

MỘT SỐ KIẾN THỨC LIÊN QUAN

1.1 Hàm đơn điệu

Ta ký hiệu $I(a,b) \subset \mathbb{R}$ là nhằm ngầm định một trong bốn tập hợp $(a,b), [a,b), (a,b], [a,b]$ với $a < b$. Trước hết ta nhắc lại các định nghĩa sau đây (xem [4]).

Định nghĩa 1.1. Với hàm số $f(x)$ xác định trên tập $I(a,b) \subset \mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện: với mọi $x_1, x_2 \in I(a,b)$ sao cho $x_1 < x_2$, ta đều có $f(x_1) \leq f(x_2)$, thì ta nói rằng $f(x)$ là một hàm đơn điệu tăng trên $I(a,b)$.

Đặc biệt, khi ứng với mọi cặp $x_1, x_2 \in I(a,b)$ sao cho $x_1 < x_2$, ta đều có $f(x_1) < f(x_2)$, thì ta nói rằng $f(x)$ là một hàm tăng thực sự trên $I(a,b)$.

Ngược lại, khi với mọi $x_1, x_2 \in I(a,b)$ sao cho $x_1 < x_2$, ta đều có $f(x_1) \geq f(x_2)$, thì ta nói rằng $f(x)$ là một hàm đơn điệu giảm trên $I(a,b)$.

Nếu với mọi $x_1, x_2 \in I(a,b)$ sao cho $x_1 < x_2$, ta đều có $f(x_1) > f(x_2)$, thì ta nói rằng $f(x)$ là một hàm đơn điệu giảm thực sự trên $I(a,b)$.

Những hàm số đơn điệu tăng thực sự trên $I(a,b)$ được gọi là đồng biến trên $I(a,b)$ và những hàm số đơn điệu giảm thực sự trên $I(a,b)$ được gọi là nghịch biến trên $I(a,b)$. Tiêu chuẩn để một hàm số khả vi trên $I(a,b)$ là một hàm đơn điệu trên $I(a,b)$ được nêu trong định lý sau

Định lý 1.1. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên khoảng (a,b).

i. Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a,b)$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng đó.

ii. Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a,b)$ thì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng đó.

1.2 Hàm lồi, lõm và các tính chất

Định nghĩa 1.2. Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm lồi (lồi dưới) trên $I(a, b) \subset \mathbb{R}$ nếu với mọi $x_1, x_2 \in I(a, b)$ và với mọi cặp số dương α, β có tổng $\alpha + \beta = 1$, ta đều có

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) \leq \alpha f(x_1) + \beta f(x_2).$$

Nếu dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2$ thì ta nói hàm số $f(x)$ là hàm lồi thực sự (chặt) trên $I(a, b)$.

Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm lõm (lồi trên) trên $I(a, b) \subset \mathbb{R}$ nếu với mọi $x_1, x_2 \in I(a, b)$ và với mọi cặp số dương α, β có tổng $\alpha + \beta = 1$, ta đều có

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) \geq \alpha f(x_1) + \beta f(x_2).$$

Nếu dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2$ thì ta nói hàm số $f(x)$ là hàm lõm thực sự (chặt) trên $I(a, b)$.

Nhận xét rằng, khi $x_1 < x_2$ thì $x = \alpha x_1 + \beta x_2$ với mọi cặp số dương α, β có tổng $\alpha + \beta = 1$, đều thuộc (x_1, x_2) và

$$\alpha = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1},\ \ \beta = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}.$$

Định lý 1.2. Nếu $f(x)$ có đạo hàm cấp hai trong khoảng (a, b). Khi đó, điều kiện cần và đủ để hàm số $f(x)$ lồi trên khoảng (a, b) là

$$f''(x) \geq 0,\ \ \forall x \in (a, b).$$

1.3 Các định lý về giá trị trung bình

Định lý 1.3 (Định lý Fermat)**.** Nếu hàm $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn (a, b), đạt giá trị cực trị tại một điểm $x_0 \in (a, b)$ và tồn tại $f'(x_0)$ thì $f'(x_0) = 0$.

Định lý 1.4 (Định lý Rolle)**.** Nếu hàm $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ và có đạo hàm trên khoảng (a, b), đồng thời $f(a) = f(b)$ thì tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $f'(c) = 0$.

Định lý 1.5 (Định lý Lagrange)**.** Nếu hàm $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ và có đạo hàm trên khoảng (a, b) thì tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Định lý 1.6 (Định lý Cauchy)**.** Nếu hàm $f(x), g(x)$ là các hàm liên tục trên đoạn $[a, b]$ và có đạo hàm trên khoảng (a, b) thì tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c).$$

Ngoài ra nếu $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$ và $g(a) \neq g(b)$ thì

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Nhận xét.

1. Định lý Lagrange được chứng minh dựa vào định lý Rolle. Nhưng định lý Rolle có thể coi là trường hợp đặc biệt của định lý Lagrange khi $f(a) = f(b)$.

2. Định lý Lagrange là trường hợp đặc biệt của định lý Cauchy khi $g(x) = x$.

3. Trong định lý Lagrange a có thể bằng b. Khi đó chỉ cần điều kiện $f(x)$ có đạo hàm tại $x = a$ ta có $c = a$ và công thức vẫn đúng.

CHƯƠNG 2

ĐỊNH LÝ LAGRANGE VÀ CÁC TÍNH CHẤT LIÊN QUAN CỦA HÀM SỐ

2.1 Tính lồi, lõm, khả vi của hàm số

Ta nhắc lại các tiêu chuẩn đơn giản để nhận biết tính lồi (lõm) của một hàm số.

Giả sử $f(x)$ có đạo hàm cấp hai trong khoảng (a, b). Khi đó

(i) Điều kiện cần và đủ để hàm số $f(x)$ lồi trên khoảng (a, b) là

$$f''(x) \geq 0, \ \forall x \in (a, b).$$

(ii) Điều kiện cần và đủ để hàm số $f(x)$ lõm trên khoảng (a, b) là

$$f''(x) \leq 0, \ \forall x \in (a, b).$$

Tuy nhiên trong ứng dụng ta nhận thấy, có thể coi hàm lồi (lõm) như là lớp hàm đồng biến (nghịch biến) bậc hai, vì ứng với nó, đạo hàm bậc nhất (trong lớp hàm lồi khả vi) là một hàm đơn điệu tăng (giảm).

Chú ý rằng, đôi khi ta chỉ nói về tính lồi của một hàm số mà không nói tới hàm đó lồi trên tập $I(a, b)$ cụ thể như trên.

Về sau, ta thường quan tâm đến các tính chất của hàm lồi trên $I(a, b)$.

Tính chất 2.1. Nếu $f(x)$ lồi (lõm) trên $I(a, b)$ thì $g(x) := cf(x)$ là hàm lõm (lồi) trên $I(a, b)$ khi $c < 0 (c > 0)$.

Tính chất 2.2. Tổng hữu hạn các hàm lồi trên $I(a, b)$ là một hàm lồi trên $I(a, b)$.

Tính chất 2.3. Nếu $f(x)$ là hàm số liên tục và lồi trên $I(a, b)$ và nếu $g(x)$ lồi và đồng biến trên tập giá trị của $f(x)$ thì $g(f(x))$ là hàm lồi trên $I(a, b)$.

Tính chất 2.4. (i) Nếu $f(x)$ là hàm số liên tục và lõm trên $I(a,b)$ và nếu $g(x)$ lồi và nghịch biến trên tập giá trị của $f(x)$ thì $g(f(x))$ là hàm lồi trên $I(a,b)$.

(ii) Nếu $f(x)$ là hàm số liên tục và lõm trên $I(a,b)$ và nếu $g(x)$ lõm và đồng biến trên tập giá trị của $f(x)$ thì $g(f(x))$ là hàm lõm trên $I(a,b)$.

(iii) Nếu $f(x)$ là hàm số liên tục và lồi trên $I(a,b)$ và nếu $g(x)$ lõm và nghịch biến trên tập giá trị của $f(x)$ thì $g(f(x))$ là hàm lõm trên $I(a,b)$.

Tính chất 2.5. Nếu $f(x)$ là hàm số liên tục và đơn điệu (đồng biến hoặc nghịch biến) trên $I(a,b)$ và nếu $g(x)$ là hàm ngược của $f(x)$ thì ta có các kết luận sau:

(i) $f(x)$ lõm, đồng biến $\Leftrightarrow g(x)$ lồi, đồng biến,

(ii) $f(x)$ lõm, nghịch biến $\Leftrightarrow g(x)$ lõm, nghịch biến,

(iii) $f(x)$ lồi, nghịch biến $\Leftrightarrow g(x)$ lồi, nghịch biến.

Định lý 2.1. Nếu $f(x)$ là hàm số khả vi trên $I(a,b)$ thì $f(x)$ là hàm lồi trên $I(a,b)$ khi và chỉ khi $f'(x)$ là hàm đơn điệu tăng trên $I(a,b)$.
Về sau ta thường dùng tính chất sau đây:

Định lý 2.2. Nếu $f(x)$ khả vi bậc hai trên $I(a,b)$ thì $f(x)$ lồi (lõm) trên $I(a,b)$ khi và chỉ khi $f''(x) \geq 0 (f''(x) \leq 0)$ trên $I(a,b)$.

Hàm lồi luôn là hàm liên tục trong khoảng đang xét. Về sau, ta luôn quan tâm đến các hàm số lồi và liên tục trên $I(a,b)$. Tính chất sau đây cho phép ta dễ dàng kiểm chứng tính lồi (lõm) đối với một số hàm số cho trước và chọn tính chất này để đặc trưng cho hàm lồi.

Định lý 2.3 (Định lý Jensen)**.** Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$. Khi đó điều kiện cần và đủ để hàm số $f(x)$ lồi trên $I(a,b)$ là

$$f\Big(\frac{x_1+x_2}{2}\Big) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},\ \forall x_1, x_2 \in I(a,b).$$

Chứng minh. Nếu $f(x)$ là hàm lồi trên $I(a,b)$ thì ta được điều phải chứng minh bằng cách chọn $\alpha = \beta = \dfrac{1}{2}$.

Giả sử ta có
$$f\Big(\frac{x_1+x_2}{2}\Big) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},\ \ \forall x_1, x_2 \in I(a,b).$$
Ta cần chứng minh rằng với mọi cặp số dương α, β có tổng $\alpha+\beta=1$, ta đều có
$$f(\alpha x_1+\beta x_2) \leq \alpha f(x_1)+\beta f(x_2).$$
Nếu $\alpha \in \mathbb{Q}$ thì $\beta \in \mathbb{Q}$ và ta có thể viết
$$\alpha\frac{m}{q}, \beta = \frac{n}{q},$$
trong đó $m, n \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ và $m+n=q$. Bằng phương pháp quy nạp, ta có ngay
$$f(\alpha x_1+\beta x_2) = f\Big(\frac{mx_1+nx_2}{q}\Big) \leq \frac{mf(x_1)+nf(x_2)}{q} = \alpha f(x_1)+\beta f(x_2).$$
Nếu α là số vô tỷ thì $\beta(=1-\alpha)$ cũng là số vô tỷ. Chọn dãy số hữu tỷ dương u_n trong khoảng $(0,1)$ có giới hạn bằng α:
$$\lim_{n\to\infty} u_n = \alpha.$$
Khi đó, hiển nhiên dãy $v_n := 1-u_n$ cũng nằm trong khoảng $(0,1)$ và
$$\lim_{n\to\infty} v_n = \beta.$$
Theo chứng minh trên ứng với trường hợp α hữu tỷ, thì
$$f(u_nx_1+v_nx_2) \leq u_nf(x_1+v_nf(x_2),\ \ \forall n \in \mathbb{N}, x_1, x_2 \in I(a,b).$$
Chuyển qua giới hạn và sử dụng tính liên tục của $f(x)$, ta thu được
$$f(\alpha x_1+\beta x_2) \leq \alpha f(x_1)+\beta f(x_2).$$
$\square$

Nhận xét 2.1. Giả sử $f(x) \not\equiv \text{ const }$ và là hàm lồi trên $[a,b]$ với $f(a) = f(b)$. Khi đó $f(x) \neq f(a)$ với mọi $x \in (a,b)$.

Tiếp theo, ta đặc biệt quan tâm đến lớp con của lớp các hàm lồi và hàm đơn điệu. Đó là lớp con của lớp các hàm lồi hai lần khả vi. Đây là lớp hàm thông dụng nhất của giải tích gắn với nhiều bất đẳng thức cổ điển.

Định nghĩa 2.1. Hàm $f(x)$ có đạo hàm cấp hai và lồi (lõm) trong khoảng (a, b) được gọi là đồng biến (nghịch biến) bậc hai trong khoảng đó.

Tương tự, ta có định nghĩa khái niệm hàm đồng biến (nghịch biến) bậc tuỳ ý.

Định nghĩa 2.2. Hàm $f(x)$ có đạo hàm cấp n ($n \in \mathbb{N}^*$) không đổi dấu trong khoảng (a, b) được gọi là hàm đơn điệu ngặt (thực sự) bậc n. Nếu $f^{(n)}(x) \geq 0,\ \forall x \in (a, b)(f^{(n)}(x) \leq 0,\ \forall x \in (a, b))$ thì ta nói hàm đồng biến (nghịch biến) bậc n trong khoảng đó.

Để đơn giản cách trình bày, ta chỉ xét lớp các hàm lồi (lõm), khả vi bậc hai trên khoảng đang xét. Như vậy, hàm $f(x)$ đơn điệu tăng trong (a, b) khi và chỉ khi

$$f'(x) \geq 0,\ \forall x \in (a, b)$$

và hàm $f(x)$ lồi trong (a, b) khi và chỉ khi

$$f''(x) \geq 0,\ \forall x \in (a, b).$$

Từ đó, ta có nhận xét, khi hàm $f(x)$ lồi (đơn điệu tăng bậc hai) trên (a, b) thì đạo hàm bậc nhất của nó là một hàm đơn điệu tăng.

Do đó ta có thể phát biểu tính chất biểu diễn hàm lồi như sau:

Định lý 2.4. Hàm $f(x)$ lồi, khả vi trong (a, b) khi và chỉ khi tồn tại hàm $g(x)$ đơn điệu tăng trên (a, b) và số $c \in (a, b)$, sao cho

$$f(x) = f(c) + \int_c^x g(t)dt.$$

Có nhiều cách tiếp cận khác nhau đến lớp các hàm lồi và hàm lõm và người ta tìm các cách biểu diễn chúng theo những mục tiêu khác nhau để giải quyết các bài toán thực tiễn. Trong mục này, ta đặc biệt quan tân đến một dạng biểu diễn hàm lồi và hàm lõm thông qua các hàm số bậc nhất, vì lớp hàm này đơn giản, dễ tính toán trên tập giá trị của chúng.

Để ý rằng, nếu $f(x)$ là hàm lồi, liên tục trên đoạn $[a, b]$ và với một cặp số dương (α, β) với $\alpha + \beta = 1$ xảy ra đẳng thức $\alpha f(a) + \beta f(b) = f(\alpha a + \beta b)$ thì $f(x)$ là hàm số (đa thức) bậc nhất.

Vì vậy, khi hàm số $f(x)$ lồi và khả vi trên $I(a, b)$ thì đồ thị của nó luôn luôn thuộc nửa mặt phẳng trên tạo nên bởi tiếp tuyến tại mỗi điểm tùy ý cho trước của đồ thị đó. Nói cách khác, ta có định lý sau:

Định lý 2.5. Giả sử $f(x)$ xác định và có $f''(x) \geq 0,\ \forall x \in (a;b)$. Khi đó:

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),\ \forall x, x_0 \in (a;b). \tag{2.1}$$

Tương tự $f''(x) \leq 0$ thì bất đẳng thức đổi chiều.

Chứng minh.

1. Xét $x = x_0$ ta được dấu đẳng thức
2. Xét $x > x_0$. Khi đó bất đẳng thức (2.1) tương đương với:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq f'(x_0).$$

   Theo định lý Lagrange: $\exists x_1 \in (x_0; x)$ sao cho $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_1)$
   Ta thu được $f'(x_1) \geq f'(x_0)$ với $x_0 < x_1 < x$. (Hiển nhiên).
3. Xét $x < x_0$. Tương tự $\exists x_2 \in (x; x_0)$ sao cho $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_2)$
   Ta thu được $f'(x_2) \leq f'(x_0)$ với $x < x_2 < x_0$

□

Khi đó nếu hàm $f(x)$ lồi và khả vi trên (a, b), ta có thể viết (2.1) dưới dạng

$$f(x) = \min_{u \in (a,b)} [f(u) + f'(u)(x - u)].$$

Tương tự nếu hàm $f(x)$ lõm và khả vi trên (a, b), ta có thể viết (2.1) dưới dạng

$$f(x) = \max_{u \in (a,b)} [f(u) + f'(u)(x - u)].$$

Vậy, ta đã có một dạng biểu diễn hàm lồi và hàm lõm thông qua cực trị của các hàm số bậc nhất phụ thuộc tham biến. Phép biểu diễn này đóng vai trò quan trọng như là một công cụ hữu hiệu trong trong nhiều bài toán cực trị và tối ưu.

Tiếp theo ta sử dụng biểu diễn của hàm lồi chứng minh bất đẳng thức Karamata và ứng dụng trong thực tiễn.

Định lý 2.6 (Bất đẳng thức Karamata)**.** Cho hai dãy số $\{x_k\}, \{y_k\} \in I(a, b)$ $k = 1, 2, \ldots, n$, thoả mãn các điều kiện

$$x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n; y_1 \geq y_2 \geq \ldots \geq y_n$$

và

$$\begin{cases} x_1 \geq y_1 \\ x_1 + x_2 \geq y_1 + y_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} \geq y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n = y_1 + y_2 + \ldots + y_n \end{cases} \tag{2.2}$$

Khi đó, ứng với mọi hàm lồi thực sự $f(x)$ trên $I(a, b)$, ta đều có

$$f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) \geq f(y_1) + f(y_2) + \ldots + f(y_n).$$

Bất đẳng thức Karamata cho ta thấy rằng với những giả thiết có tính nhân tạo nhưng lại được thiết lập và ứng dụng rộng rãi trong nhiều dạng toán ứng dụng. Thật vậy, khi cho trước một hàm phi tuyến (hàm lồi, lõm) tổng quát, sẽ rất khó để có thể khẳng định tính so sánh được của tổng các giá trị tại hai bộ điểm phân biệt tuỳ ý cho trước của hàm số đã cho. Hệ điều kiện (**??**) chỉ dựa trên các so sánh tuyến tính các đại lượng sắp được cho trước, được coi như một dạng giả thiết đơn giản nhất.

Định lý 2.7. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai tại mọi $x \in (a, b)$ sao cho $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in [a, b]$ và $f''(x) > 0$ với mọi $x \in (a, b)$. Giả sử $a_1, a_2, \ldots, a_n$ và $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các số thuộc $[a, b]$, đồng thời thoả mãn các điều kiện $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$ và $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n$ và

$$\begin{cases} x_1 \geq a_1 \\ x_1 + x_2 \geq a_1 + a_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} \geq a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq a_1 + a_2 + \ldots + a_n \end{cases} \tag{2.3}$$

Khi đó, ta luôn có

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \geq \sum_{k=1}^{n} f(a_k).$$

Tương tự, ta cũng có định lý sau

Định lý 2.8. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai tại mọi $x \in (a,b)$ sao cho $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in [a,b]$ và $f''(x) < 0$ với mọi $x \in (a,b)$.
Giả sử $a_1, a_2, \ldots, a_n$ và $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các số thuộc $[a,b]$, đồng thời thoả mãn các điều kiện $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ và $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ và

$$\begin{cases} x_1 \leq a_1 \\ x_1 + x_2 \leq a_1 + a_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} \leq a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leq a_1 + a_2 + \ldots + a_n \end{cases} \tag{2.4}$$

Khi đó, ta luôn có

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \leq \sum_{k=1}^{n} f(a_k).$$

Định lý 2.9. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai tại mọi $x \in (a,b)$ sao cho $f''(x) > 0$ với mọi $x \in (a,b)$.
Giả sử $a_1, a_2, \ldots, a_n$ và $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các số thuộc $[a,b]$, đồng thời thoả mãn điều kiện $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$ và

$$\begin{cases} x_1 \geq a_1 \\ x_1 + x_2 \geq a_1 + a_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} \geq a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \end{cases} \tag{2.5}$$

Khi đó, ta luôn có

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \geq \sum_{k=1}^{n} f(a_k).$$

2.2 Tính đơn điệu liên tiếp của hàm số

2.2.1 Hàm đơn điệu liên tiếp bậc (1,2)

Trong mục này, ta xét lớp hàm đơn điệu liên tiếp bậc (1,2) và một số tính chất cơ bản của chúng. Đó là lớp hàm đồng thời có đạo hàm bậc nhất và bậc hai không đổi dấu trên $I(a,b)$.

Định nghĩa 2.3. Nếu hàm số đồng thời có đạo hàm bậc nhất và bậc hai dương trong khoảng đang xét thì ta nói hàm số đồng biến liên tiếp bậc (1,2) trên khoảng đã cho.

Định nghĩa 2.4. Nếu hàm số đồng thời có đạo hàm bậc nhất và bậc hai âm trong khoảng đang xét thì ta nói hàm số nghịch biến liên tiếp bậc (1,2) trên khoảng đã cho.

Định lý 2.10. Giả sử $f(x)$ có $f'(x) > 0$ và $f''(x) > 0$ trong khoảng (a, b) và các số x_1, x_2 $y_1, y_2 \in (a, b)$ có tính chất $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$. Khi đó
$$\frac{f(x_1)}{f'(y_1)} + \frac{f(x_2)}{f'(y_2)} \geq \frac{f(y_1)}{f'(y_1)} + \frac{f(y_2)}{f'(y_2)}.$$

Định lý 2.11. Giả sử $f(x)$ có $f'(x) < 0$ và $f''(x) < 0$ trong khoảng (a, b) và các số x_1, x_2 $y_1, y_2 \in (a, b)$ có tính chất $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$. Khi đó
$$\frac{f(x_1)}{f'(y_1)} + \frac{f(x_2)}{f'(y_2)} \geq \frac{f(y_1)}{f'(y_1)} + \frac{f(y_2)}{f'(y_2)}$$

Định lý 2.12. Giả sử $f(x)$ có $f'(x) > 0$ và $f''(x) < 0$ trong khoảng (a, b) và các số x_1, x_2 $y_1, y_2 \in (a, b)$ có tính chất $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$. Khi đó
$$\frac{f(x_1)}{f'(y_1)} + \frac{f(x_2)}{f'(y_2)} \leq \frac{f(y_1)}{f'(y_1)} + \frac{f(y_2)}{f'(y_2)}.$$

Định lý 2.13. Giả sử $f(x)$ có $f'(x) < 0$ và $f''(x) > 0$ trong khoảng (a, b) và các số x_1, x_2 $y_1, y_2 \in (a, b)$ có tính chất $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$. Khi đó
$$\frac{f(x_1)}{f'(y_1)} + \frac{f(x_2)}{f'(y_2)} \leq \frac{f(y_1)}{f'(y_1)} + \frac{f(y_2)}{f'(y_2)}.$$

Bài toán 2.1 (Bài toán tổng quát)**.** Cho các số $\alpha, \beta, \gamma \in (a, b)$ và $p, q \in \mathbb{R}$ sao cho $-\dfrac{p}{2} < a$. Xét bộ ba số $x, y, z \in (a, b)$ thoả mãn $x + y + z = \alpha + \beta + \gamma$. Chứng minh rằng:
$$\begin{aligned}\frac{x^2 + px + q}{2\alpha + p} &+ \frac{y^2 + py + q}{2\beta + p} + \frac{z^2 + pz + q}{2\gamma + p} \\ &\geq \frac{\alpha^2 + p\alpha + q}{2\alpha + p} + \frac{\beta^2 + p\beta + q}{2\beta + p} + \frac{\gamma^2 + p\gamma + q}{2\gamma + p} \quad (2.6)\end{aligned}$$

Giải.

Xét hàm số $f(x) = x^2 + px + q$.
Ta có $f''(x) = 2 > 0$ và $f'(x) > 0, \forall x \in (a, b)$.

Suy ra

$$f(x) \geq f(\alpha) + f'(\alpha)(x-\alpha) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{f'(\alpha)} \geq \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} + x - \alpha, \tag{2.7}$$

$$f(y) \geq f(\beta) + f'(\beta)(y-\beta) \Leftrightarrow \frac{f(y)}{f'(\beta)} \geq \frac{f(\beta)}{f'(\beta)} + y - \beta, \tag{2.8}$$

$$f(z) \geq f(\gamma) + f'(\gamma)(z-\gamma) \Leftrightarrow \frac{f(z)}{f'(\gamma)} \geq \frac{f(\gamma)}{f'(\gamma)} + z - \gamma. \tag{2.9}$$

Cộng (2.7),(2.8),(2.9) vế theo vế ta được điều phải chứng minh. □

Bài toán 2.2 (Bài toán tổng quát)**.** Cho các số $\alpha, \beta, \in (a, b)$ và các số $m, n, r \in \mathbb{R}$ sao cho $-r < a$ và $mr - n > 0$. Xét cặp số $x, y \in (a, b)$ thoả mãn $x + y = \alpha + \beta$. Chứng minh rằng:

$$\frac{(mx+n)(\alpha+r)^2}{x+r} + \frac{(my+n)(\beta+r)^2}{y+r} \leq (m\alpha+n)(\alpha+r) + (m\beta+n)(\beta+r).$$

Bài toán 2.3 (Bài toán tổng quát)**.** Cho các số $\alpha, \beta, \in (a, b)$ và các số $p, q \in \mathbb{R}$ sao cho $p > 0$ và $a > 0$. Xét cặp số $x, y \in (a, b)$ thoả mãn $x + y = \alpha + \beta$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^3 + 3px + q}{3\alpha^2 + 3p} + \frac{y^3 + 3py + q}{3\beta^2 + 3p} \geq \frac{\alpha^3 + 3p\alpha + q}{3\alpha^2 + 3p} + \frac{\beta^3 + 3p\beta + q}{3\beta^2 + 3p}.$$

2.2.2 Hàm đơn điệu liên tiếp bậc (2,3)

Tiếp theo, trong mục này, ta xét lớp các hà đơn điệu liên tiếp bậc (2,3) và một số tính chất cơ bản của chúng. Đó là lớp hàm đồng thời có đạo hàm bậc hai và bậc ba không đổi dấu trên $I(a, b)$.

Định nghĩa 2.5. Nếu hàm đồng thời có đạo hàm bậc hai và bậc ba dương trong khoảng đang xét thì ta nói hàm số đó đồng biến liên tiếp bậc (2,3) trên khoảng đã cho.

Định nghĩa 2.6. Nếu hàm đồng thời có đạo hàm bậc hai và bậc ba âm trong khoảng đang xét thì ta nói hàm số đó nghịch biến liên tiếp bậc (2,3) trên khoảng đã cho.

Bổ đề. Nếu hàm $f(x)$ khả vi bậc hai, bậc ba và có $f'''(x) \geq 0,\ \forall x \in I(a,b)$ thì

$$\frac{f(x)}{x-x_0} \geq \frac{f(x_0)}{x-x_0} + f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0). \qquad (2.10)$$

với mọi x, x_0 phân biệt thuộc $I(a,b)$. Tương tự, nếu $f'''(x) \leq 0$ thì bất đẳng thức đổi chiều.

Chứng minh. Theo công thức khai triển Taylor ta có

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_1)}{3!}(x-x_0)^3$$

với $x_1 \in (x, x_0)$.

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)}{x-x_0} = \frac{f(x_0)}{x-x_0} + f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0) + \frac{f'''(x_1)}{3!}(x-x_0)^2 \qquad (2.11)$$

Mà

$$\frac{f'''(x_1)}{3!}(x-x_0)^2 \geq 0 \qquad (2.12)$$

Do đó, từ (2.11) và (2.12) suy ra (2.10). Đó là điều phải chứng minh. □

Định lý 2.14. Giả sử $f(x)$ là hàm đồng biến liên tiếp bậc (2,3) trong khoảng (a,b) (tức là $f''(x) > 0$ và $f'''(x) > 0,\ \forall x \in (a,b)$) và các số $x_1, x_2, y_1, y_2 \in (a,b)$ sao cho $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$. Khi đó

$$\frac{f(x_1)-f(y_1)}{f''(y_1)(x_1-y_1)} + \frac{f(x_2)-f(y_2)}{f''(y_2)(x_2-y_2)} \geq \frac{f'(y_1)}{f''(y_1)} + \frac{f'(y_2)}{f''(y_2)}. \qquad (2.13)$$

Định lý 2.15. Giả sử $f(x)$ là hàm nghịch biến liên tiếp bậc (2,3) trong khoảng (a,b) (tức là $f''(x) < 0$ và $f'''(x) < 0,\ \forall x \in (a,b)$) và các số $x_1, x_2, y_1, y_2 \in (a,b)$ sao cho $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$. Khi đó

$$\frac{f(x_1)-f(y_1)}{f''(y_1)(x_1-y_1)} + \frac{f(x_2)-f(y_2)}{f''(y_2)(x_2-y_2)} \geq \frac{f'(y_1)}{f''(y_1)} + \frac{f'(y_2)}{f''(y_2)}. \qquad (2.14)$$

Định lý 2.16. Giả sử $f(x)$ là hàm đồng thời đồng biến bậc 2 và nghịch biến bậc ba trong khoảng (a,b) (tức là $f''(x) > 0$ và $f'''(x) < 0,\ \forall x \in (a,b)$) và các số $x_1, x_2, y_1, y_2 \in (a,b)$ sao cho $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$. Khi đó

$$\frac{f(x_1)-f(y_1)}{f''(y_1)(x_1-y_1)} + \frac{f(x_2)-f(y_2)}{f''(y_2)(x_2-y_2)} \leq \frac{f'(y_1)}{f''(y_1)} + \frac{f'(y_2)}{f''(y_2)}. \qquad (2.15)$$

Định lý 2.17. Giả sử $f(x)$ là hàm đồng thời nghịch biến bậc hai và đồng biến bậc ba trong khoảng (a,b) (tức là $f''(x) < 0$ và $f'''(x) > 0, \ \forall x \in (a, b)$) và các số $x_1, x_2, y_1, y_2 \in (a, b)$ sao cho $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$. Khi đó

$$\frac{f(x_1) - f(y_1)}{f''(y_1)(x_1 - y_1)} + \frac{f(x_2) - f(y_2)}{f''(y_2)(x_2 - y_2)} \leq \frac{f'(y_1)}{f''(y_1)} + \frac{f'(y_2)}{f''(y_2)}. \tag{2.16}$$

Bài toán 2.4 (Bài toán tổng quát)**.** Cho các số $\alpha, \beta \in (a, b)$ và các số $p, q \in \mathbb{R}$. Xét cặp số $x, y \in (a, b)$ sao cho $x + y = \alpha + \beta$ và $-p < a$. Chứng minh rằng:

$$\begin{aligned}\frac{x^3 + 3px^2 - \alpha^3 - 3p\alpha^2}{(6\alpha + 6p)(x - \alpha)} &+ \frac{y^3 + 3py^2 - \beta^3 - 3p\beta^2}{(6\beta + 6p)(y - \beta)} \\ &\geq \frac{3\alpha^2 + 6p\alpha}{6\alpha + 6p} + \frac{3\beta^2 + 6p\beta}{6\beta + 6p}\end{aligned} \tag{2.17}$$

Giải. Xét hàm số $f(x) = x^3 + 3px^2 + q$.

Ta có $f''(x) = 6x + 6p > 0$ và $f'''(x) = 6 > 0, \ \forall x \in (a, b)$.

Suy ra

$$\frac{f(x)}{x - \alpha} \geq \frac{f(\alpha)}{x - \alpha} + f'(\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(x - \alpha)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)}{f''(\alpha)(x - \alpha)} - \frac{f(\alpha)}{f''(\alpha)(x - \alpha)} \geq \frac{f'(\alpha)}{f''(\alpha)} + \frac{1}{2!}(x - \alpha) \tag{2.18}$$

Tương tự:

$$\frac{f(y)}{y - \beta} \geq \frac{f(\beta)}{y - \beta} + f'(\beta) + \frac{f''(\beta)}{2!}(y - \beta)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)}{f''(\beta)(y - \beta)} - \frac{f(\beta)}{f''(\beta)(y - \beta)} \geq \frac{f'(\beta)}{f''(\beta)} + \frac{1}{2!}(y - \beta) \tag{2.19}$$

Cộng (2.18) và (2.19) vế theo vế ta được điều phải chứng minh.

Bài toán 2.5 (Bài toán tổng quát)**.** Cho các số $\alpha, \beta \in (a, b)$ và các số $p, q \in \mathbb{R}$ thoả $p > 0, a > 0$. Xét cặp số $x, y \in (a, b)$ sao cho $x+y = \alpha+\beta$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^4 + px^2 - \alpha^4 - p\alpha^2}{(12\alpha^2 + 2p)(x - \alpha)} + \frac{y^4 + py^2 - \beta^4 - p\beta^2}{(12\beta^2 + 2p)(y - \beta)} \geq \frac{4\alpha^3 + 2p\alpha}{12\alpha^2 + 2p} + \frac{4\beta^3 + 2p\beta}{12\beta^2 + 2p} \tag{2.20}$$

CHƯƠNG 3

ỨNG DỤNG CỦA ĐỊNH LÝ LAGRANGE TRONG ĐẠI SỐ

3.1 Các bài toán về giải phương trình, chứng minh phương trình có nghiệm, biện luận số nghiệm của phương trình

3.1.1 Giải phương trình

Phương pháp chung

Bước 1: Gọi α là nghiệm của phương trình $h(x) = 0$.

Bước 2: Biến đổi phương trình về dạng thích hợp sao cho $f(a) = f(b)$. Từ đó chỉ ra được hàm số $f(t)$ khả vi và liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó, theo định lý Lagrange, $\exists c \in (a; b)$ sao cho:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \qquad (*)$$

Bước 3: Giải (*) ta định được α và thử lại.

Ta minh họa phương pháp đã nêu qua các ví dụ sau đây.

Bài toán 3.1. Giải phương trình

$$2^x = 1 + (3 - 2\sqrt{2})^x. \tag{3.1}$$

Giải. Phương trình (3.1) được viết thành

$$\begin{aligned}
& 2^x - 1 = (3 - 2\sqrt{2})^x \\
\Leftrightarrow\ & (2^x - 1)(3 + 2\sqrt{2})^x = 1 \\
\Leftrightarrow\ & (6 + 4\sqrt{2})^x - (3 + 2\sqrt{2})^x = 1 \\
\Leftrightarrow\ & (2 + \sqrt{2})^{2x} - (\sqrt{2} + 1)^{2x} = (2 + \sqrt{2}) - (\sqrt{2} + 1) \\
\Leftrightarrow\ & (2 + \sqrt{2})^{2x} - (2 + \sqrt{2}) = (\sqrt{2} + 1)^{2x} - (\sqrt{2} + 1) \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

Đặt $2x = y$ thì (3.2) được viết thành:

$$(2+\sqrt{2})^y - (2+\sqrt{2}) = (\sqrt{2}+1)^y - (\sqrt{2}+1) \tag{3.3}$$

Gọi α là nghiệm của phương trình (3.3).
Khi đó

$$(2+\sqrt{2})^\alpha - (2+\sqrt{2}) = (\sqrt{2}+1)^\alpha - (\sqrt{2}+1) \tag{3.4}$$

Xét $f(t) = t^\alpha - t$ với $t \in [\sqrt{2}+1, 2+\sqrt{2}]$ thì f liên tục, có

$$f'(t) = \alpha t^{\alpha-1} - 1.$$

Theo định lý Lagrange, tồn tại $c \in (\sqrt{2}+1, 2+\sqrt{2})$ sao cho

$$\frac{f(2+\sqrt{2}) - f(\sqrt{2}+1)}{(2+\sqrt{2}) - (\sqrt{2}+1)} = f'(c).$$

Mặt khác, (3.4) cho ta $f(2+\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}+1)$ nên $f'(c) = 0$.

Do đó $\alpha c^{\alpha-1} - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1 \Rightarrow y = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$.

Thử lại ta thấy $x = \dfrac{1}{2}$ thỏa mãn.

3.1.2 Chứng minh phương trình có nghiệm

Phương pháp chung

Bước 1: Xác định hàm số $F(x)$ khả vi và liên tục trên đoạn $[a; b]$ thỏa mãn điều kiện:

1. $F'(x) = f(x)$ (tức là $F(x) = \int f(x)dx$)

2. $F(b) - F(a) = 0$

Bước 2: Khi đó, tồn tại $x_0 \in (a; b)$ sao cho

$$F'(x_0) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a} \Leftrightarrow f(x_0) = 0$$

hay phương trình $f(x_0) = 0$ có nghiệm $x_0 \in (a; b)$.

Bài toán 3.2. Cho $a + b = c$. Chứng minh phương trình

$$a\sqrt{3x-2} + 3b\sqrt{x-1} = 4c(x-1)\sqrt{3x^2-5x+2} \tag{3.5}$$

có nghiệm thuộc khoảng $(1, 2)$.

Giải. Điều kiện: $x \geq 1$

Biến đổi (3.5) ta được

$$(3.5) \Leftrightarrow \frac{a}{2\sqrt{x-1}} + \frac{3b}{2\sqrt{3x-2}} = 2c(x-1)$$
$$\Leftrightarrow \frac{a}{2\sqrt{x-1}} + \frac{3b}{2\sqrt{3x-2}} - 2c(x-1) = 0.$$

Xét hàm số $f(x) = a\sqrt{x-1} + b\sqrt{3x-2} - c(x-1)^2$ khả vi trên khoảng $(1, 2)$. Ta có

$$f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{x-1}} + \frac{3b}{2\sqrt{3x-2}} - 2c(x-1)$$

và $f(2) - f(1) = a + b - c = 0$. Do đó, theo định lý Lagrange, tồn tại $\xi \in (1, 2)$ sao cho

$$f'(\xi) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = 0$$

Vậy, phương trình đã cho luôn có nghiệm thuộc khoảng $(1, 2)$.

3.1.3 Biện luận số nghiệm của phương trình

Từ định lý Rolle, ta thu được các hệ quả sau.

Hệ quả 3.1. Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$; có đạo hàm trên khoảng (a, b) thì giữa hai nghiệm (liên tiếp) thuộc (a, b) của phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$.

Hệ quả 3.2. Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$; có đạo hàm trên khoảng (a, b) và phương trình $f(x) = 0$ có k nghiệm $x \in (a, b)$ thì phương trình $f'(x) = 0$ có ít nhất $k - 1$ nghiệm $x \in (a, b)$.

Hệ quả 3.3. Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$; và $f''(x) > 0$(hoặc $f''(x) < 0$), $\forall x \in (a, b)$ thì phương trình $f(x) = 0$ có không quá hai nghiệm trên khoảng (a, b).

Bài toán 3.3. Chứng minh rằng phương trình

$$2^x = x^2 + 1$$

có đúng ba nghiệm phân biệt.

Giải.
Đặt $f(x) := 2^x - x^2 - 1$. Ta có $f(x)$ xác định, liên tục, khả vi trên $\mathbb{R}$ và phương trình tương đương với $f(x) = 0$.

Ta có $f(0) = f(1) = 0; f(2) = -1; f(5) = 6 \Rightarrow f(2).f(5) < 0 \Rightarrow$ $f(x)$ có ít nhất ba nghiệm phân biệt.

Giả sử $f(x)$ có ít nhất bốn nghiệm thực phân biệt. Khi đó, $f''(x)$ có ít nhất hai nghiệm phân biệt.

Mà, $f'(x) = 2^x \ln 2 - 2x; f''(x) = 2^x(\ln 2)^2 - 2 \Rightarrow f''(x)$ có đúng một nghiệm. Điều này mâu thuẫn.

Vậy $f(x)$ có đúng ba nghiệm thực phân biệt.

3.2 Một số ứng dụng của định lý Lagrange trong các bài toán liên quan đến bất đẳng thức

3.2.1 Chứng minh bất đẳng thức

Bài toán 3.4 (Bất đẳng thức Bernoulli)**.** Với mọi số thực x thỏa mãn $x > -1$, thế thì

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Chứng minh. Trước tiên, chúng ta giả sử $x \geq 0$ và đặt $f(t) = (1+t)^n$, $\forall t \in [0, x]$. Theo định lý Lagrange, tồn tại $\eta \in (0; x)$ thỏa mãn

$$f(x) - f(0) = (x - 0)f'(\eta).$$

Suy ra

$$(1 + x)^n - 1 = xn(1 + \eta)^{n-1} \geq nx$$

và do đó, chúng ta có $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.
Trường hợp khi $-1 < x < 0$, đặt $f(t) = (1 + t)^n$, $\forall t \in [x, 0]$. Cũng theo định lý Lagrange, tồn tại $\eta \in (x; 0)$ thỏa mãn

$$f(x) - f(0) = (x - 0)f'(\eta).$$

Suy ra

$$(1 + x)^n - 1 = xn(1 + \eta)^{n-1} \geq nx$$

và do đó, chúng ta cũng có $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.
Vậy

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx, \ \ \forall x \in (-1; +\infty).$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = 0$. $\square$

3.2.2 Sáng tác bất đẳng thức từ bất phương trình hàm liên quan đến Định lý Lagrange

Trước tiên, chúng ta nhắc lại công thức khai triển Taylor của hàm số f tại điểm a.

Định lý 3.1. (Công thức khai triển Taylor)
Giả sử hàm số $f(x)$ có $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x)$ liên tục tại a và có đạo hàm $f^{(n+1)}(x)$ trong lân cận của a, thế thì

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \tag{3.6}$$

với η ở giữa a và x $(\eta = a + \alpha(x-a), \alpha \in (0;1))$.

Khi $n = 1$, (3.6) trở thành

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(\eta)(x-a)^2$$

với $\eta = a + \alpha(x-a), \alpha \in (0;1)$ hay

$$f(x) - f(a) = (x-a)f'(a) + f''(\eta)(x-a)^2 \tag{3.7}$$

với $\eta = a + \alpha(x-a), \alpha \in (0;1)$.

Nếu chúng ta chọn hàm số $f(x)$ khả vi bậc hai trên I sao cho $f''(x) > 0, \forall x \in I$ thì từ (3.7), chúng ta có bất phương trình hàm

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq f'(a), \ \ \forall x \neq a. \tag{3.8}$$

Từ đây chúng ta có lớp hàm thỏa mãn (3.8) được thể hiện trong kết quả dưới đây

Định lý 3.2. Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục tại a, khả vi bậc hai trên I và $f''(x) \geq 0, \forall x \in I$ thế thì $f(x)$ là nghiệm của bất phương trình hàm

$$f(x) - f(a) \geq (x-a)f'(a). \tag{3.9}$$

Tương tự, chúng ta cũng có

Định lý 3.3. Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục tại a, khả vi bậc hai trên I và $f''(x) \leq 0, \forall x \in I$ thế thì $f(x)$ là nghiệm của bất phương trình hàm

$$f(x) - f(a) \leq (x-a)f'(a). \tag{3.10}$$

Từ hai kết quả trên, chúng ta có thể thiết lập một số bất đẳng thức

Ví dụ 3.1. *(Thiết lập bất đẳng thức Bernoulli)*

Với mọi số thực n, xét hàm số $f(x) = (1+x)^n, \forall x \geq -1$, chúng ta có $f'(x) = n(1+x)^{n-1}$ liên tục tại 0 và $f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2} \geq 0, \forall x \geq -1$. Áp dụng Định lý 3.2, chúng ta có

$$f(x) - f(0) \geq (x-0)f'(0), \ \forall x \geq -1$$

hay

$$(1+x)^n - 1 \geq xn, \ \forall x \geq -1.$$

Từ đây chúng ta có

$$(1+x)^n \geq 1 + xn, \ \forall x \geq -1.$$

Bài toán 3.5. Xét hàm số $f(x) = x \ln x, x \in (0, +\infty)$, ta có $f'(x) = \ln x + 1$ liên tục trên $(0, +\infty)$ và $f''(x) = \dfrac{1}{x} > 0, \forall x \in (0, +\infty)$. Khi đó với mọi $a, b, c > 0$ chúng ta có

$$a \ln a + b \ln b + c \ln c \geq (a+b+c) \ln \frac{a+b+c}{3}$$

$$\Leftrightarrow a^a b^b c^c \geq \Big(\frac{a+b+c}{3}\Big)^{a+b+c}.$$

Bài toán 3.6. Xét hàm số $f(x) = x^4, x \in \mathbb{R}$, chúng ta có $f'(x) = 4x^3$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f''(x) = 12x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó chúng ta có

$$f(b) - f(a) \geq f'(a)(b-a)$$

hay

$$b^4 - a^4 \geq 4a^3(b-a).$$

Chúng ta có thể biến đổi để được bài toán bất đẳng thức: *Chứng minh rằng với mọi số thực a, b*

$$b^4 + 3a^4 \geq 4a^3 b, \forall a, b,$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

3.3 Sự phân bố nghiệm của đa thức và đạo hàm

Định nghĩa 3.1. Số x_0 được gọi là không điểm của hàm $f(x)$ nếu $f(x_0) = 0$. Khi $f(x)$ là đa thức và thỏa mãn điều kiện $f(x_0) = 0$ thì x_0 còn được gọi là nghiệm của đa thức ấy.

Bài toán 3.7. Giả sử $a < b$ và giả sử giá trị của đa thức $f(x)$ tại các điểm a và b đều khác 0. Chứng minh rằng khi đó khoảng $(a; b)$ chứa một số chẵn (hoặc một số lẻ) các không điểm của hàm ấy nếu $f(a)$ và $f(b)$ có cùng dấu (hoặc trái dấu nhau).

Nhận xét 3.1. Khi thay đa thức $f(x)$ bởi một hàm giải tích thì kết quả bài toán trên không thay đổi.

Bài toán 3.8 (Định lý Rolle)**.** Nếu a, b là hai không điểm kề nhau của đa thức $f(x)$, $(f(a) = f(b) = 0, f(x) \neq 0, \quad \forall x \in (a, b))$ thì trong khoảng (a, b) đạo hàm $f'(x)$ có một số lẻ các không điểm (do đó có ít nhất một không điểm).

Giải. Lấy $\varepsilon > 0$ đủ bé sao cho các khoảng $(a, a+\varepsilon), (b-\varepsilon, b)$ không chứa không điểm nào của đạo hàm $f'(x)$. Khi đó, số không điểm của $f'(x)$ trong (a, b) bằng số không điểm của $f'(x)$ trong khoảng $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$.

Ta có

$$f(a+\varepsilon) = f(a+\varepsilon) - f(a) = \varepsilon f'(a+\varepsilon_1)$$

trong đó $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$ và

$$-f(b-\varepsilon) = f(b) - f(b-\varepsilon) = \varepsilon f'(b-\varepsilon_2)$$

trong đó $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon$. Vì

$$\operatorname{sign} f(a+\varepsilon) = \operatorname{sign} f(b-\varepsilon) \neq 0$$

nên

$$\operatorname{sign} f'(a+\varepsilon) = -\operatorname{sign} f'(b-\varepsilon) \neq 0$$

. Theo bài toán 3.1, hàm số $f'(x)$ chưa một số lẻ các không điểm trong khoảng $(a+\varepsilon, b-\varepsilon) \subset (a, b)$.

Bài toán 3.9. Nếu trong khoảng (a, b) hàm $f(x)$ có m không điểm thì $f'(x)$ có ít nhất $m-1$ không điểm trên khoảng đó.

Nhận xét 3.2. (i) Kết quả bài toán trên vẫn đúng nếu thay (a, b) bởi các nửa khoảng $(a, b], [a, b)$ hay đoạn $[a, b]$ hoặc chỉ là một điểm $\{x_1\}$.

(ii) Nếu hàm $f(x)$ là đa thức bậc n và có n nghiệm thực thì $f'(x)$ có $n-1$ nghiệm thực.

KẾT LUẬN

Tóm lại, từ những công trình nghiên cứu đăng tải trên các bài báo và các sách tham khảo, luận văn đã tổng hợp, sắp xếp một cách có hệ thống các kết quả thu nhận được, trình bày lại các chứng minh một cách rõ ràng hơn mà vẫn đảm bảo tính chặt chẽ của chúng. Đó cũng chính là những đóng góp của tác giả luận văn.

Luận văn "*Một số ứng dụng của định lý Lagrange trong Đại số*" đã tập trung nghiên cứu một số vấn đề chính như sau:

1. Hệ thống các kiến thức liên quan đến tính đơn điệu, tính lồi, lõm, khả vi của hàm số; các định lý về giá trị trung bình.

2. Khảo sát tính đơn điệu và lồi lõm liên tiếp của hàm số. Trên cơ sở đó, vận dụng sáng tác các bất đẳng thức.

3. Hệ thống một số dạng bài tập ứng dụng của định lý Lagrange.

Một nhu cầu tự nhiên là mở rộng ứng dụng đối với hàm nhiều biến. Vì vậy, việc nghiên cứu vẫn còn được tiếp tục.