BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

ĐẶNG THỊ THUÝ VÂN

LUẬT SỐ LỚN VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: Phương pháp toán sơ cấp
Mã số: 60.46.40

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Đà Nẵng - Năm 2011

Công trình được hoàn thành tại

ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

Người hướng dẫn khoa học: **TS. LÊ HẢI TRUNG**

Phản biện 1: **PGS.TSKH. TRẦN QUỐC CHIẾN**

Phản biện 2: **PGS.TS. HUỲNH THẾ PHÙNG**

Luận văn được bảo vệ trước Hội đồng chấm Luận văn tốt nghiệp thạc sĩ khoa học họp tại Đại học Đà Nẵng vào ngày 26 tháng 11 năm 2011.

Có thể tìm hiểu luận văn tại:

- Trung tâm Thông tin - Học liệu, Đại học Đà Nẵng
- Thư viện trường Đại học Sư Phạm, Đại học Đà Nẵng

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài.

Lý thuyết xác suất thống kê là một bộ phận của toán học, nghiên cứu các hiện tượng ngẫu nhiên và ứng dụng chúng vào thực tế. Là hiện tượng ngẫu nhiên nên không thể nói trước nó xảy ra hay không xảy ra khi thực hiện các quan sát. Tuy nhiên, nếu tiến hành quan sát khá nhiều lần một hiện tượng ngẫu nhiên trong các phép thử như nhau, ta có thể rút ra được những kết luận khoa học về hiện tượng này.

Lý thuyết xác suất cũng là cơ sở để nghiên cứu Thống kê – môn học nghiên cứu các phương pháp thu thập thông tin chọn mẫu, xử lý thông tin, nhằm rút ra các kết luận hoặc đưa ra các kết luận cần thiết. Ngày nay, với sự hỗ trợ tích cực của máy tính và công nghệ thông tin, lý thuyết xác suất – thống kê được giảng dạy cho hầu hết các nhóm ngành ở bậc cao đẳng, đại học.

Luật số lớn là một phần của Lý thuyết xác suất và thống kê. Trong thực tế, những hiện tượng ngẫu nhiên do rất nhiều nguyên nhân ngẫu nhiên gây ra. Việc tìm điều kiện để những hiện tượng như vậy xảy ra theo một quy luật nào đó là ý nghĩa của nội dung "luật số lớn".

Việc tìm hiểu "Luật số lớn" là nhu cầu cần thiết để phục vụ cho việc giảng dạy sau này nên tôi chọn đề tài "Luật số lớn và ứng dụng" làm đề tài luận văn của mình.

2. Mục đích nghiên cứu.

Nghiên cứu sự hội tụ trong không gian xác suất: hội tụ theo xác suất và hội tụ hầu chắc chắn.

Nghiên cứu một số ứng dụng của luật số lớn trong thực tế.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu.

Đối tượng nghiên cứu là nghiên cứu dãy biến ngẫu nhiên và sự hội tụ của chúng.

Phạm vi nghiên cứu trong luận văn này tập trung chính ở luật số lớn và một số ứng dụng của chúng.

4. Phương pháp nghiên cứu.

Nghiên cứu trực tiếp từ các tài liệu về xác suất có liên quan đến đề tài.

Sử dụng kiến thức thuộc các lĩnh vực: Đại số, Giải tích, Giải tích hàm, Lý thuyết xác suất và thống kê.

5. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài.

Tìm hiểu về luật số lớn nhằm phục vụ tốt cho việc nghiên cứu này.

Là một tài liệu tham khảo phục vụ cho việc dạy và học môn lý thuyết xác suất và thống kê trong trường cao đẳng, đại học.

6. Cấu trúc của luận văn.

Ngoài phần mở đầu, kết luận và tài liệu tham khảo luận văn gồm có 3 chương:

Chương 1. Không gian xác suất.

Chương 2. Luật số lớn.

Chương 3. Một số ứng dụng của luật số lớn.

Chương 1
KHÔNG GIAN XÁC SUẤT

1.1 Biến cố.

Định nghĩa 1.1.1. Giả sử Ω là tập hợp khác rỗng. Một lớp $\mathcal{A}$ các tập con của Ω được gọi là một σ - đại số nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau:

1) $\Omega \in \mathcal{A}$.
2) Nếu $A \in \mathcal{A}$ thì $A^c \in \mathcal{A}$, (trong đó $A^c = \Omega \setminus A$: phần bù của A trong Ω).
3) Nếu $\{A_k, k \in N\}$ là một dãy các phần tử của $\mathcal{A}$ thì $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$.

Mệnh đề 1.1.1. Giả sử $\mathcal{A}$ là một σ - đại số các tập con của Ω. Khi đó:

1) $\varnothing \in \mathcal{A}$.
2) Nếu $B_k \in \mathcal{A},\ k \in N$ thì $\bigcap_{k=0}^{\infty} B_k \in \mathcal{A}$.
3) Nếu $D_k \in \mathcal{A},\ k = \overline{0,n}$ thì $\bigcup_{k=0}^{n} D_k \in \mathcal{A}$ và $\bigcap_{k=0}^{n} D_k \in \mathcal{A}$.

Định nghĩa1.1.2.

1) Cặp (Ω, $\mathcal{A}$) gồm một tập $\Omega \neq \varnothing$ và một σ - đại số $\mathcal{A}$ các tập con của Ω được gọi là một không gian đo được.
2) Các phần tử ω của Ω được gọi là các biến cố sơ cấp.
3) Các phần tử $A \in \mathcal{A}$ được gọi là các biến cố, Ω được gọi là biến cố chắc chắn, $\varnothing$ được gọi là biến cố không thể.
4) Sự xuất hiện đồng thời hai biến cố *A*, *B* coi là sự xuất hiện của $A \cap B$ hay AB .

5) Sự xuất hiện ít nhất một trong hai biến cố A, B được coi là sự xuất hiện của $A \cup B$ (A hợp B). Khi $AB = \varnothing$ ta viết $A + B$ thay cho $A \cup B$.

6) Các biến cố A và B gọi là xung khắc nhau nếu $A \cap B = \varnothing$.

7) Hai biến cố A và B gọi là đối lập nhau nếu $B = A^c$.

8) Biến cố A được gọi là biến cố kéo theo của biến cố B nếu $A \subset B$.

1.2 Xác suất.

Định nghĩa 1.2.1.

Giả sử $(\Omega, \mathcal{A})$ là một không gian đo được. Hàm tập $P : \mathcal{A} \to \mathrm{R}$ được gọi là một xác suất trên $\mathcal{A}$ nếu:

1) $P(A) \geq 0$, $\forall A \in \mathcal{A}$.

2) (σ - cộng tính). Với mọi dãy phần tử $\{A_k, k \in N\}$ của $\mathcal{A}$, từng đôi xung khắc nhau, thì $P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$.

3) $P(\Omega) = 1$.

Với mỗi biến cố $A \in \mathcal{A}$, $P(A)$ được gọi là xác suất của biến cố A, hoặc là xác suất để A xuất hiện.

Bộ ba $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ được gọi là một không gian xác suất.

Mệnh đề 1.2.1. Nếu P là một xác suất trên $\mathcal{A}$ thì ta có:

1) $P(\varnothing) = 0$.

2) Với mọi dãy hữu hạn các biến cố $\{A_k, k = \overline{0,n}\}$, từng đôi xung khắc nhau, thì $P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$ (tính cộng tính).

Mệnh đề 1.2.2. Giả sử A, B là các biến cố ngẫu nhiên bất kì. Khi đó:

1) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

2) Nếu $A \subset B$ thì $P(A) \leq P(B)$.

3) $\forall A \in \mathcal{A}$ có $0 \le P(A) \le 1$ và $P(A^c) = 1 - P(A)$.

Mệnh đề 1.2.3. Trong không gian xác suất (Ω, $\mathcal{A}$, P) cho họ biến cố ngẫu nhiên $\{A_n, n \ge 1\}$ thỏa điều kiện:

(i) $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$

(ii) $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \varnothing$.

Khi đó, $P(A_n) \to 0$ ($n \to \infty$).

Hệ quả 1.2.1.

1) Nếu $\{B_n, n \ge 1\}$ là họ các biến cố thỏa $B_n \subset B_{n+1} \subset \ldots$ và $\bigcup_{n\ge1} B_n = B$ thì $P(B_n) \to P(B)$ $(n \to \infty)$.

2) Nếu $\{C_n, n \ge 1\}$ là họ các biến cố thỏa $C_n \supset C_{n+1} \supset \ldots$ và $\bigcap_{n\ge1} C_n = C$ thì $P(C_n) \to P(C)$ $(n \to \infty)$.

1.3 Biến ngẫu nhiên.

Giả sử (Ω, $\mathcal{A}$, P) là một không gian xác suất. $R = (-\infty, +\infty)$ là đường thẳng số thực với σ - đại số Borel $\mathcal{B}$ ta có không gian đo (R, $\mathcal{B}$).

Định nghĩa 1.3.1. Một ánh xạ $X : \Omega \to R$ được gọi là đo được theo ($\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$) (hay ($\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$) – đo được) nếu $\forall B \in \mathcal{B}$ thì $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Ánh xạ X đo được như trên được gọi là một biến ngẫu nhiên trên R hay một đại lượng ngẫu nhiên.

Để đơn giản ta kí hiệu $[X \in B] = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$. Ta thường kí hiệu biến ngẫu nhiên bởi các chữ in hoa X, Y, …

1.4 Hàm phân phối xác suất.

Định nghĩa 1.4.1. Cho không gian xác suất (Ω, $\mathcal{A}$, P) và biến ngẫu nhiên X. Ta gọi hàm thực $F(x)$ được xác định bởi hệ thức: $F(x) = F_X(x) = P[X < x], \forall x \in R$ là hàm phân phối xác suất của X.

Chú ý 1.4.1. $P[X < x] = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\}$.

Rõ ràng khi X là biến ngẫu nhiên thì $[X < x] \in \mathcal{A}$ nên hàm phân phối xác định với mọi $x \in R$.

Mệnh đề 1.4.1. Hàm phân phối $F(x)$ của X trên $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ có tính chất:

1) $0 \le F(x) \le 1, \forall x \in R$.
2) Nếu $x_1 \le x_2$ thì $F(x_1) \le F(x_2)$.
3) $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$.
4) $F(x)$ liên tục trái trên R.

Định nghĩa 1.4.2. Biến ngẫu nhiên X được gọi là có phân phối rời rạc hay biến ngẫu nhiên rời rạc nếu hàm phân phối xác suất của nó có dạng:

$$F_X(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i 1_{A_i}(x),\ A_i \in \mathcal{A},\ \forall i,\ A_i \cap A_j = \varnothing,\ i \neq j,\ \alpha_i \in R,\ \forall i.$$

Mệnh đề 1.4.2. Nếu X là biến ngẫu nhiên rời rạc với miền giá trị $\{x_i, i \in I\}$ $(I \subset N)$, ta gọi $p_k = P[X = x_k]$, $k \in I$ là hàm khối lượng của X. Hàm khối lượng có các tính chất:

1) $\sum\limits_{i \in I} p_i = 1$.
2) Với $\forall x \in R$, $F(x) = \sum\limits_{i \in I : x_i < x} p_i$.
3) Với $\forall a, b \in R$, $a < b$, $P[a \le X < b] = \sum\limits_{i \in I : a \le x_i < b} p_i$.

Định nghĩa 1.4.3. Biến ngẫu nhiên X được gọi là có phân phối liên tục tuyệt đối hay biến ngẫu nhiên liên tục tuyệt đối nếu tồn tại hàm không âm $f_X(x)$ sao cho hàm phân phối xác suất của X có dạng:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt.$$

Hàm $f_X(x)$ được gọi là hàm mật độ xác suất của X.

Chú ý 1.4.2.

Nếu không có sự nhầm lẫn ta ký hiệu hàm mật độ xác suất của *X* là $f(x)$ cho gọn.

Từ tính chất các hàm phân phối (mệnh đề 1.4.1) suy ra nếu $f(x)$ là hàm mật độ thì $f(x) \geq 0$ và $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$. Nếu $f(x)$ là hàm số không âm trên R và $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$ thì $f(x)$ là hàm mật độ của một biến ngẫu nhiên *X* nào đó.

Mệnh đề 1.4.3. Nếu *X* là biến ngẫu nhiên có phân phối liên tục tuyệt đối với hàm mật độ $f(x)$ thì:

1) Với $\forall x \in R,\ P[X = x] = 0$.

2) Với $\forall a, b \in R,\ a < b$:

$$P[a \leq X < b] = \int_a^b f(x)dx = F_X(b) - F_X(a).$$

1.5 Kỳ vọng toán học.

Định nghĩa 1.5.1. Giả sử *X* là biến ngẫu nhiên rời rạc với miền giá trị $\{x_i, i \in I\}$ $(I \subset N)$, nếu $\sum_{i \in I} |x_i| P[X = x_i]$ hội tụ thì đại lượng $E(X) = \sum_{i \in I} x_i P[X = x_i]$ được gọi là kì vọng toán của *X*.

Giả sử *X* là biến ngẫu nhiên liên tục tuyệt đối với hàm mật độ $f_X(x)$, nếu $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X(x)dx < \infty$ thì đại lượng $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx$ được gọi là kì vọng toán của *X*.

Người ta kí hiệu kì vọng toán của *X* là $E(X)$, EX hay $M(X)$.

Mệnh đề 1.5.1. Giả sử *X*, *Y* là 2 biến ngẫu nhiên có kỳ vọng

1) Nếu c là hằng số thì $E(cX) = cEX$.

2) $E(X + Y) = EX + EY$.

3) $\left|EX\right| \le E\left|X\right|$.

4) Nếu $X \le Y$ thì $EX \le EY$.

Mệnh đề 1.5.2. Cho hàm số $g(x)$ liên tục, khi đó:

Nếu X là biến ngẫu nhiên rời rạc thì $Eg(X) = \sum_{i\in I} g(x_i)p_i$.

Nếu X là biến ngẫu nhiên liên tục thì $Eg(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dF_X(x)$.

Ý nghĩa của kì vọng toán.

Xét ví dụ sau: Một đợt xổ số phát hành *n* vé, trong đó có n_i vé trúng thưởng s_i đồng, $\sum_{i=1}^{k} n_i = n,\ \ s_i \ge 0,\ \ i = \overline{1,k}$. Một người mua một vé số. Gọi *X* là số tiền trúng thưởng của người đó. Khi đó *X* là biến ngẫu nhiên rời rạc với các giá trị $s_1, s_2, ..., s_k$ và $P[X = s_i] = \frac{n_i}{n},\ i = \overline{1,k}$. Ta có $EX = \sum_{i=1}^{k} s_i \frac{n_i}{n}$. Vậy kì vọng của số tiền trúng thưởng là trung bình (có trọng lượng) của các giá trị của s_i.

Nghĩa là kì vọng *EX* là đại lượng đặc trưng cho giá trị trung bình của các giá trị của *X*.

1.6 Phương sai.

Định nghĩa 1.6.1. Giả sử *X* là biến ngẫu nhiên có kì vọng *EX*, nếu tồn tại $E(X - EX)^2$ thì ta nói đại lượng này là phương sai của *X*, kí hiệu *D(X)*, đôi khi ta cũng dùng kí hiệu Var(*X*) để chỉ phương sai của *X*.

$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ được gọi là độ lệch chuẩn của *X*.

Với $k \in N$ nếu tồn tại $E(X^k)$ thì ta gọi $m_k = E\left(X^k\right)$ là moment bậc k của *X*.

$\mu_k = E(X - EX)^k$ được gọi là moment trung tâm bậc *k* của *X*.

Mệnh đề 1.6.1. Giả sử X là biến ngẫu nhiên, k, l là các số tự nhiên sao cho $l \leq k$, khi đó:

1) Nếu m_k tồn tại thì m_l cũng tồn tại.

2) Nếu m_k tồn tại thì μ_k cũng tồn tại và ngược lại.

Mệnh đề 1.6.2. Trong điều kiện tồn tại phương sai có tính chất:

1) $DX = EX^2 - E^2X$ (kí hiệu $E^2X = (EX)^2$).

2) $D(c) = 0$ (c = const).

3) $D(cX) = c^2D(X)$.

4) Nếu $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ độc lập từng đôi một và có các phương sai $D(X_i)$ với $i = \overline{1,n}$ thì:

$$D\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} DX_i .$$

Chương 2
LUẬT SỐ LỚN

2.1 Hội tụ theo xác suất.

Định nghĩa 2.1.1. Dãy biến ngẫu nhiên $\{X_n, n \geq 1\}$ được gọi là hội tụ theo xác suất đến biến ngẫu nhiên X (và viết $X_n \xrightarrow{P} X$) nếu:

$$\lim_{n\to\infty} P\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\} = 0,\ \forall \varepsilon > 0.$$

2.2 Luật số lớn.

2.2.1 Khái niệm tổng quát.

Cho dãy các biến ngẫu nhiên $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ (2.1)

Xét biến ngẫu nhiên Y_n là một hàm đối xứng nào đó của n biến ngẫu nhiên đầu tiên của dãy (2.1):

$$Y_n = f_n(X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

Nếu tồn tại một dãy các hằng số $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ sao cho với mọi ε dương:

$$\lim_{n\to\infty} P[|Y_n - a_n| < \varepsilon] = 1$$

thì dãy (2.1) được gọi là tuân theo luật số lớn với hàm f_n đã cho.

2.2.2 Dạng Chebyshev của luật số lớn.

Định nghĩa 2.2.2. Ta nói họ biến ngẫu nhiên $\{X_n, n \geq 1\}$ tuân theo luật số lớn (dạng Chebyshev) nếu $\forall \varepsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} EX_k\right| < \varepsilon\right] = 1.$$

Bất đẳng thức Chebyshev.

Nếu biến ngẫu nhiên X có phương sai hữu hạn, thì bất đẳng thức sau đây được thỏa mãn với mọi $\varepsilon > 0$:

$$P[|X - EX| \geq \varepsilon] \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Định lí Chebyshev .

Nếu $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ là một dãy các biến ngẫu nhiên độc lập từng đôi một có phương sai hữu hạn và bị chặn bởi cùng một hằng số $DX_k \leq C, \forall k$ thì với mọi hằng số $\varepsilon > 0$, ta luôn có:

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} EX_k\right| < \varepsilon\right] = 1.$$

Hệ quả 2.2.1. Nếu $\{X_n, n \geq 1\}$ là dãy các biến ngẫu nhiên độc lập, cùng phân phối, có kì vọng chung hữu hạn là a, phương sai chung σ^2. Khi đó với mọi $\varepsilon > 0$ ta luôn có:

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - a\right| < \varepsilon\right] = 1.$$

Hệ quả 2.2.2 (Định lý Bernoulli**).** Nếu gọi S_n là số lần xảy ra của một biến cố A trong n phép thử độc lập và p là xác suất xảy ra biến cố A trong mỗi phép thử. Khi đó với mọi $\varepsilon > 0$ ta luôn luôn có:

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left|\frac{S_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right] = 1.$$

Định lý Poisson. Nếu một dãy các phép thử độc lập, có xác suất xảy ra của biến cố A trong phép thử thứ k bằng p_k,thì:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left|\frac{S_n}{n} - \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{n}\right| < \varepsilon\right] = 1.$$

trong đó S_n là số lần xảy ra biến cố A trong n phép thử đầu tiên.

Định lý Khinchine. Nếu các biến ngẫu nhiên $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ độc lập và có cùng phân phối với kỳ vọng hữu hạn ($a = EX_n < \infty$), thì khi $n \to \infty$ ta có:

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - a\right| < \varepsilon\right] = 1.$$

Định lý Markov. Nếu các biến ngẫu nhiên $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ thỏa điều kiện:

$$\frac{1}{n^2} D\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) \to 0, \text{ khi } n \to \infty$$

thì với mọi $\varepsilon > 0$, ta có:

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} EX_k\right| < \varepsilon\right] = 1.$$

Chú ý 2.2.1. Nếu các biến ngẫu nhiên $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ độc lập từng đôi một thì điều kiện Markov trở thành:

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} DX_k \to 0, \text{ khi } n \to \infty.$$

2.3 Điều kiện cần và đủ cho luật số lớn.

Định lý 2.3.1. Cho dãy biến ngẫu nhiên tùy ý $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ Điều kiện cần và đủ để dãy biến ngẫu nhiên này thỏa mãn hệ thức:

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} EX_k\right| < \varepsilon\right] = 1, \text{ với } \forall \varepsilon > 0 \qquad \text{là:}$$

$$\lim_{n\to\infty} E \frac{\left[\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - EX_k\right)\right]^2}{n^2 + \left[\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - EX_k\right)\right]^2} = 0.$$

2.4 Luật mạnh số lớn.

Định nghĩa 2.4.1. Dãy biến ngẫu nhiên $\{X_n\}$ được gọi là hội tụ hầu chắc chắn đến biến ngẫu nhiên X (viết $X_n \xrightarrow{hcc} X$), nếu:

$$P\{\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\} = 1.$$

Luật mạnh số lớn nghiên cứu sự hội tụ hầu chắc chắn của trung bình cộng: $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \mathrm{EX}_k\right)$, hoặc tổng quát hơn: $\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \mathrm{EX}_k\right)$ với $b_n \uparrow \infty$.

Bổ đề Kronecker. Giả sử $\{x_n, n \geq 1\}$ là dãy các số thực và $\{b_n, n \geq 1\}$ là dãy các số dương tăng đến ∞. Khi đó, nếu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{b_n}$ hội tụ, thì $\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{\infty} x_k \to 0$, khi $n \to \infty$.

Định lý Kolmogorov. Nếu $\{X_n, n \geq 1\}$ là dãy biến ngẫu nhiên độc lập, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{DX_n}{b_n^2} < \infty$, với $0 < b_n \to \infty$ thì: $\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - EX_k\right) \xrightarrow{hcc} 0$.

Hệ quả 2.4.1. Nếu $\{X_n, n \geq 1\}$ là dãy đại lượng ngẫu nhiên độc lập và $\sup_n DX_n < \infty$ thì: $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - EX_k\right) \xrightarrow{hcc} 0$.

Hệ quả 2.4.2. Nếu dãy các biến ngẫu nhiên độc lập $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ thỏa điều kiện: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{DX_n}{n^2} < \infty$ thì nó tuân theo luật mạnh số lớn.

Chương 3
MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA LUẬT SỐ LỚN

3.1 Định nghĩa thống kê về xác suất.

Định nghĩa 3.1.1. Tần suất xuất hiện biến cố trong *n* phép thử là tỷ số giữa số phép thử trong đó biến cố xuất hiện và tổng số phép thử được thực hiện. Nếu ký hiệu số phép thử là *n*, số lần xuất hiện biến cố *A* là *n*(*A*), tần suất xuất hiện biến cố *A* là $f(A)=\dfrac{n(A)}{n}$.

Định nghĩa 3.1.2. Khi số phép thử tăng lên vô hạn, tần suất xuất hiện biến cố tiến dần đến một số xác định, số đó được gọi là xác suất của biến cố đó. Hay nói cách khác, xác suất là giới hạn của tần suất khi số phép thử tăng lên vô hạn:

$$P(A)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(A)}{n}.$$

Tuy nhiên trong thực tế không thể tiến hành vô hạn phép thử, nhưng đối với số phép thử đủ lớn ta có thể xem xác suất xấp xỉ bằng tần suất:

$$P(A)\approx\frac{n(A)}{n}.$$

3.2 Dùng luật số lớn để đánh giá trung bình của các biến ngẫu nhiên.

Hệ quả 2.2.1 khẳng định với họ độc lập, cùng phân phối có cùng kì vọng là *a*, có phương sai hữu hạn thì: $\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\xrightarrow{P}a$ ($n\to\infty$). Điều đó có nghĩa là: $\forall\varepsilon>0$, $\forall\delta>0$, $\exists N_\delta$ sao cho $\forall n\geq N_\delta$:

$$P\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-a\right|<\varepsilon\right]\geq1-\delta\ .$$

Nếu ε, δ được chọn nhỏ đến mức: sự khác biệt nhỏ thua ε được coi như đồng nhất, biến cố có xác suất lớn hơn 1 – δ coi là luôn xuất hiện thì mặc dù $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ có tính chất ngẫu nhiên, ta có thể xem nó là hằng số *a* khi *n* khá lớn. Điều đó thể hiện sự "ổn định" của trung bình số học của các biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối có phương sai hữu hạn.

3.3 Một số bài toán về luật số lớn.

Bài toán 3.3.1. Tiến hành 10000 phép thử độc lập, như nhau. Ở mỗi phép thử, *A* xuất hiện với xác suất 0,3. Tìm xác suất để độ lệch tuyệt đối giữa tần suất xuất hiện *A* trong 10000 phép thử trên so với xác suất của *A* không quá 0,01.

Bài toán 3.3.2. Cho $X_1, X_2, \ldots, X_{12}$ là dãy các biến ngẫu nhiên độc lập với $EX_i = 16$, $DX_i = 1$, ($i = \overline{1,12}$).

Sử dụng bất đẳng thức Chebyshev để tìm các hằng số *a* và *b* sao cho:

$$P\left[a \le \sum_{i=1}^{12} X_i \le b\right] \ge 0,99 .$$

Bài tập 3.3.3. Cho $X_1, X_2, \ldots, X_{10000}$ là dãy các biến ngẫu nhiên độc lập có phân bố đều trên đoạn $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Chứng minh rằng:

$$P\left[\left|\sum_{i=1}^{10^4} X_i\right| \ge 500\right] \le \frac{1}{300} .$$

Bài toán 3.3.4. Giả sử tiền điện của một gia đình phải trả trong một tháng là một biến ngẫu nhiên với trung bình 16USD và độ lệch chuẩn 1USD. Sử dụng bất đẳng thức Chebyshev, hãy xác định số *M* nhỏ nhất để với xác suất 0,99 số tiền điện phải trả trong 1 năm (12 tháng) không vượt quá *M*.

Bài toán 3.3.5. Giả sử X là biến ngẫu nhiên với $EX = 5$ và $DX = 0{,}16$. Chứng minh rằng:

a) $P[3 < X < 7] \geq 0{,}96$;

b) $P[2 < X < 8] \geq 0{,}982$;

c) $P\left[3 < \dfrac{X_1 + X_2 + ... + X_9}{9} < 7\right] \geq 0{,}995$;

trong đó $X_1, X_2, \ldots, X_9$ là các biến ngẫu nhiên độc lập có cùng phân bố với X.

Bài tập 3.3.6. Cho $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ là dãy các số dương thỏa mãn điều kiện

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}{n^2} = 0.$$

Xét dãy (X_n) xác định như sau: với mỗi k, X_k nhận các giá trị: 0, $\pm\dfrac{a_k}{2k+1}$, $\pm\dfrac{2a_k}{2k+1}$, ..., $\pm\dfrac{ka_k}{k+1}$ với cùng xác suất $\dfrac{1}{2k+1}$.

Chứng minh rằng dãy (X_k) tuân theo luật số lớn.

Bài toán 3.3.7. Cho dãy các biến ngẫu nhiên độc lập (X_n) xác định bởi

$$P\left[X_k = \pm\sqrt{\ln k}\right] = \frac{1}{2}.$$

Dãy đó có tuân theo luật số lớn hay không?

KẾT LUẬN

Trong luận văn này, tác giả đã tập trung vào việc nghiên cứu luật số lớn và một số ứng dụng của nó trong lý thuyết xác suất và đạt được những kết quả sau:

1. Nhằm mục đích tổng quan về một số vấn đề cơ bản nhất của lý thuyết xác suất: trình bày các định nghĩa cơ bản, các mệnh đề, các hệ quả, các ví dụ minh họa về lý thuyết xác suất.

2. Nghiên cứu khái niệm tổng quát của luật số lớn, mối quan hệ của hội tụ theo xác suất và luật số lớn, dạng Chebyshev của luật số lớn, bất đẳng thức Chebyshev, Định lý Chebyshev, Định lý Bernoulli, định lý poisson, định lý Khinchine, định lý Markov, điều kiện cần và đủ cho luật số lớn, luật mạnh số lớn, định lý Kolmogorov.

3. Nghiên cứu một số ứng dụng của luật số lớn: định nghĩa thống kê về xác suất, dùng luật số lớn để đánh giá trung bình của các biến ngẫu nhiên, một số bài toán về luật số lớn.

Mặc dù tác giả đã cố gắng nổ lực và nghiêm túc trong việc nghiên cứu và học hỏi các vấn đề liên quan trong luận án, tuy nhiên do hạn chế về mặc thời gian cũng như chuyên môn và luận văn cũng là bước đầu cho việc nghiên cứu khoa học đối với bản thân tác giả, cho nên các kết quả đạt được còn rất khiêm tốn và có một số khía cạnh chưa có điều kiện để đi sâu hơn. Đó cũng là mục tiêu đặt ra cho tác giả trong thời gian tới.