BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

oOo

Phạm Đức Mạnh

ỨNG DỤNG MỘT SỐ CÔNG THỨC NỘI SUY CỔ ĐIỂN GIẢI TOÁN Ở PHỔ THÔNG

Chuyên ngành: Phương pháp Toán Sơ Cấp

Mã số: 60 46 40

LUẬN VĂN THẠC SỸ KHOA HỌC

Đà Nẵng - 2011

Công trình được hoàn thành tại

ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

Người hướng dẫn khoa học :**TS. Trịnh Đào Chiến**

Phản biện 1: **TS. CAO VĂN NUÔI**

Phản biện 2: **GS.TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU**

Luận văn sẽ được bảo vệ tại Hội đồng chấm

Luận văn tốt nghiệp thạc sĩ khoa học họp tại Đà Nẵng vào ngày

17 tháng 08 năm 2011

Có thể tìm hiểu luận văn tại:

- Trung tâm thông tin - Học liệu, Đại học Đà Nẵng.
- Thư viện trường Đại học Sư Phạm, Đại học Đà Nẵng.

MỞ ĐẦU

1. Lí do chọn đề tài.

Trong quá trình tính toán của Toán học, đôi khi ta cần phải xác định giá trị của một hàm số $f(x)$ tại một điểm tùy ý cho trước, trong khi đó điều kiện mới chỉ cho biết một số giá trị rời rạc của hàm số và của đạo hàm hàm số đến một cấp nào đó của nó tại một số điểm $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ cho trước. Nhằm thuận tiện cho tính toán, người ta thường xây dựng hàm $f(x)$ là các đa thức đại số.

Các bài toán nội suy cổ điển ra đời từ rất sớm và đóng vai trò rất quan trọng trong thực tế. Các bài toán nội suy là một phần quan trọng của đại số và giải tích toán học. Chúng không chỉ là đối tượng nghiên cứu mà còn đóng vai trò như là một công cụ đắc lực của các mô hình liên tục cũng như các mô hình rời rạc của giải tích trong lý thuyết phương trình, lý thuyết xấp xỉ, lý thuyết biểu diễn,...

Trong chương trình Toán phổ thông, lý thuyết về vấn đề này chưa được đề cập, nhưng những ứng dụng sơ cấp của nó thường ẩn sau các định lý, những bài toán, những công thức quen thuộc. Trong các kỳ thi chọn học sinh giỏi các cấp, các bài toán liên quan đến bài toán nội suy thường ẩn dưới dạng các bài toán đa thức, các bài toán về khai triển, đồng nhất thức, ước lượng và tính giá trị cực trị của các tổng, tích, các bài toán xác định giới hạn của một biểu thức cho trước, .v.v... Đây thường là các bài toán rất khó.

Do đó, việc hình thành một chuyên đề chọn lọc những vấn đề cơ bản nhất về các bài toán nội suy, dưới góc độ toán phổ thông, đặc biệt là những ứng dụng của nó trong việc giải một số dạng toán khó là rất cần thiết. Luận văn sẽ phần nào đáp ứng nhu cầu này.

2. Mục đích của đề tài.

Với những vấn đề đặt ra ở trên, mục đích của đề tài là đề cập đến một số bài toán nội suy cổ điển và việc ứng dụng chúng để giải một số dạng toán khó như các bài toán về đa thức, các dạng toán về khai triển, đồng nhất thức, các bài toán xác định giới hạn của một biểu thức cho trước, các bài toán về tính chia hết của đa thức, ứng dụng vào tính giới hạn của một số dạng vô định,... , hệ thống lại một số dạng toán và sáng tác ra nhiều bài tập mới.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu.

Với mục đích như trên, luận văn tập trung vào nghiên cứu về các công thức nội suy: Công thức nội suy Lagrange; công thức nội suy Taylor, khai triển Taylor; công thức nội suy Newton, khai triển Taylor - Gontcharov trong phạm vi ứng dụng trong chương trình toán phổ thông, giải quyết một số bài toán khó trong chương trình phổ thông.

4. Phương pháp nghiên cứu

Dựa trên các tài liệu sưu tầm được, chủ yếu là tài liệu [2], [3]; luận văn tổng hợp lại các vấn đề phục vụ cho mục đích nghiên cứu, phù hợp với chuyên ngành Phương pháp toán sơ cấp.

Một phần quan trọng của luận văn là trên cơ sở lý thuyết đã nêu, luận văn sưu tầm và phân loại được một hệ thống bài tập, trong đó một số bài tập là đề thi học sinh giỏi quốc gia và quốc tế; và một số bài thi Olympic Toán Sinh Viên toàn quốc.

5. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài.

Do đó, nội dung nghiên cứu của luận văn mang tính khoa học, tính sư phạm và phần nào đóng góp vào thực tiễn dạy và học Toán ở phổ thông, phù hợp với chuyên ngành Phương pháp toán sơ cấp.

Sau khi được cho phép bảo vệ, thông qua và được góp ý để sửa chữa bổ sung, luận văn có thể dùng làm tài liệu tham khảo cho giáo viên, học sinh phổ thông và những ai quan tâm đến vấn đề này. Trong khuôn khổ một luận văn, có thể nhiều góc độ sâu sắc hơn về nội dung vấn đề mà luận văn chưa đề cập. Tác giả luận văn sẽ tiếp tục nghiên cứu và bổ sung thường xuyên để nội dung của luận văn ngày càng được cập nhật, có thể dùng làm tài liệu để bồi dưỡng học sinh giỏi bậc Trung học phổ thông.

6. Cấu trúc luận văn.

Từ phương pháp phân loại theo vấn đề, ngoài phần mở đầu và kết luận, luận văn được chia làm ba chương sau đây:

Chương 1. **Một số bài toán nội suy cổ điển**

Trong chương này, luận văn trình bày ngắn gọn và cơ bản nhất về một số kiến thức liên quan.

Chương 2. **Một số ứng dụng của công thức nội suy Lagrange**

Trong các công thức nội suy, công thức nội suy Lagrange có một vị trí đặc biệt, luận văn dành riêng hẳn một chương để nghiên cứu những ứng dụng của công thức này trong giải các bải toán khó ở phổ thông.

Chương 3. **Một số ứng dụng của công thức nội suy**

Taylor, khai triển Taylor; nội suy Newton và khai triển Taylor - Gontcharov.

Chương này luận văn trình bày ứng dụng của: nội suy Taylor , khai triển Taylor ; công thức nội suy Newton và khai triển Taylor - Gontcharov vào các vấn đề: ước lượng đa thức, xấp xỉ đa thức, xấp xỉ hàm số và đặc biệt là tính giới hạn.

Chương 1

MỘT SỐ BÀI TOÁN NỘI SUY CỔ ĐIỂN

1.1. Tính chất của đa thức.

Kí hiệu: $\deg P(x)$: Bậc của đa thức $P(x)$.

Quy ước:

- $\deg P(x) = 0$ thì $P(x) = c,\ c \in \mathbb{R}-$ đa thức hằng.
- $P(x)$ là đa thức không trên miền $D \subset \mathbb{R}$ nếu $P(x) = 0, \forall x \in D$. Nếu không chỉ rõ miền D, ta hiểu $D = \mathbb{R}$.

Định lý 1.1 ([3]). *Mỗi đa thức bậc n ($n \in \mathbb{Z}^+$) đều không có quá n nghiệm thực.*

Định lý 1.2 ([6]). *Hai đa thức có bậc không quá n ($n \in \mathbb{Z}^+$), có giá trị trùng nhau tại $n+1$ điểm phân biệt, thì chúng trùng* *nhau.*

Định lý 1.3 (Định lý Gauss, [3])**.** *Trong trường số phức C thì mọi đa thức bậc n $(n \in \mathbb{Z}^+)$ đều có đủ n nghiệm.*

Định lý 1.4 ([6])**.** *Trong trường số thực $\mathbb{R}$, mọi đa thức $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$; $(n \in \mathbb{Z}^+)$ đều có thể viết dưới dạng:*

$$P_n(x) = a_n \prod_{i=1}^{s} (x - d_i) \prod_{j=1}^{k} \left(x^2 + b_j x + c_j\right)$$

trong đó d_i là các nghiệm thực của đa thức $P_n(x)$; $b_j; c_j \in \mathbb{R}$; $s + 2k = n$; $b_j^2 - 4c_j < 0$ $s \in \mathbb{Z}^+, k \in \mathbb{Z}^+$.

Định nghĩa 1.1 ([2])**.** *Các đa thức $T_n(x)$ $(n \in \mathbb{N})$ được xác định bởi:*

$$\begin{cases} T_0(x) = 1;\ T_1(x) = x \\ T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x),\ n > 1 \end{cases}$$

*được gọi là các đa thức **Chebyshev** (loại 1).*

Tính chất 1.1 ([2])**.** $T_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$ (đa thức với hệ số nguyên) có bậc n và hệ số bậc cao nhất bằng 2^{n-1} là hàm số chẵn khi n chẵn và là hàm số lẻ khi n lẻ.

Tính chất 1.2 ([2])**.** $|T_n(x)| \leq 1, \forall x \in [-1; 1]$ và $|T_n(x)| = 1$ khi $x = \cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right), k \in \mathbb{Z}$.

1.2. Một số tính chất của đại số tổ hợp.

Quy ước: $a^0 = b^0 = 1; C_n^0 = 1, n \in \mathbb{Z}^+$.

Tính chất 1.3 ([7])**.** Công thức khai triển nhị thức Newton.

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} b^i$$

.

Tính chất 1.4 ([7])**.** $\sum\limits_{i=0}^{n} C_n^k = 2^k$.

1.3. Một số bài toán nội suy cổ điển.

1.3.1. Bài toán nội suy Lagrange.

Bài toán 1.1 (Bài toán nội suy Lagrange, [2])**.** *Cho n số thực $x_1; x_2; x_3; \ldots; x_n$ phân biệt và n số thực tùy ý $y_1; y_2; y_3; \ldots; y_n$. Hãy xác định đa thức $L(x)$ có bậc không quá $n-1$* ($\deg L(x) \leq n-1, n \in \mathbb{Z}^+$).

Định lý 1.5 ([2])**.** *Cho n ($n \in \mathbb{Z}^+$) số thực $x_1; x_2; x_3; \ldots; x_n$ phân biệt và n số $a_1; a_2; a_3; \ldots; a_n$ tùy ý. Thế thì tồn tại duy nhất đa thức $P_n(x)$ có bậc không quá $n-1$ thỏa điều kiện:*

$$P(x_j) = a_j; \forall j = \overline{1, n} \tag{1.1}$$

Đa thức đó có dạng

$$P(x) = \sum_{j=1}^{n} \left(a_j \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq i}}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \right) \tag{1.2}$$

Đa thức (1.2) được gọi là đa thức nội suy Lagrange hay công thức nội suy Lagrange, các số $x_1; x_2; x_3; \ldots; x_n$ được gọi là các nút nội suy.

1.3.2. Bài toán nội suy Taylor và khai triển Taylor.

1.3.2.1 Bài toán nội suy Taylor.

Bài toán 1.2 (Bài toán nội suy Taylor, [3])**.** *Cho số thực* x_1 *và* $n\,(n \in \mathbb{Z}^+)$ *giá trị thực tùy ý* $a_1; a_2; a_3; \ldots; a_n$. *Hãy xác định đa thức* $T(x)$ *có bậc không quá* $n-1$ $(\deg T(x) \leq n-1)$ *thỏa các điều kiện*

$$T^{(0)}(x_1) = a_1, \quad T^{(1)}(x_1) = a_2, \ \ldots \ T^{(n-1)}(x_1) = a_n. \tag{1.5}$$

Trong đó $T^{(0)}(x) \equiv T(x)$.

1.3.2.2 Công thức khai triển Taylor.

Định nghĩa 1.2 ([3])**.** *Đa thức:*

$$T_n(f, x) = \sum_{l=0}^{n} \frac{f^{(l)}(x_0)}{l!} (x-a)^l$$

được gọi là đa thức Taylor bậc n với tâm a của hàm f, khả vi cấp n tại điểm a.

1.3.2.3 Công thức Taylor dạng địa phương với phần dư Peano.

Định lý 1.6 ([3]). *Giả sử* $f : \mathbb{U}(a, \delta) \longrightarrow \mathbb{R}$ *là hàm khả vi liên tục đến cấp* $n-1$ *trong* $\delta-$ *lân cận* $\mathbb{U}(a, \delta)$ *của điểm a và có đạo hàm hữu hạn cấp n tại điểm a. Khi đó, hàm f có thể biểu diễn được dưới dạng:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}.(x-a) + o\left((x-a)^n\right)$$

khi $x \to a$.

1.3.2.4 Công thức Taylor đối với hàm $f(x)$ với phần dư R_{n+1} dưới dạng Schlomilch - Roche.

Định lý 1.7 ([3]). *Giả sử* $f : (a; b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *khả vi liên tục cấp n trên khoảng* $(a; b)$ *và có đạo hàm cấp* $n+1$ *tại mỗi điểm của khoảng* $(a; b)$ *có thể trừ ra điểm* $x_0 \in (a; b)$. *Khi đó, giữa điểm* x_0 *và điểm* $x \in (a; b)$ *bất kỳ, tồn tại điểm c sao cho*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_{n+1}(f, x), \tag{1.9}$$

trong đó

$$R_{n+1}(f,x)=\frac{1}{n!p}\left(\frac{x-x_0}{x-c}\right)^p.(x-c)^{n+1}.f^{(n+1)}(c),\ p\in\mathbb{R}^+. \quad (1.10)$$

1.3.3. Bài toán nội suy Newton và công thức khai triển Taylor - Gontcharov.

1.3.3.1 Bài toán nội suy Newton.

Bài toán 1.3 (Bài toán nội suy Newton, [3])**.** *Cho các số thực $x_0; x_1;\ x_2; x_3; \dots; x_n$ và $a_0; a_1; a_2; a_3; \dots; a_n$. Hãy xác định đa thức $N(x)$ có bậc không quá n, $\deg N(x)\le(n-1)$, và thỏa điều kiện:*

$$N^{(0)}(x)\equiv N(x),\ N^{(i)}(x_i)=a_i,\ i=1,2,3,\dots,n. \quad (1.15)$$

1.3.3.2 Khai triển Taylor - Gontcharov.

Định nghĩa 1.3 ([3])**.** *Cho bộ điểm $x_0; x_1; x_2; \dots; x_n$ và hàm số f khả vi cấp k tại điểm $x_k;\ k=0,1,2,\dots,n$. Đa thức $N(f,x)$ xác định bởi công thức*

$$\begin{aligned}N(f,x)&=f(x_0)+f^{'}(x_1).R_1(x_0,x)+f^{"}(x_2)R_2(x_0,x_1,x)+\cdots\\&\quad+f^{(n)}(x_n)R_n(x_0,x_1,x_2,\dots,x_{n-1},x), \quad (1.18)\end{aligned}$$

được gọi là đa thức nội suy Newton theo bộ nội suy $x_0,x_1,x_2,\dots,x_n$ của hàm f.

Công thức (1.18) được gọi là công thức khai triển Taylor - Gontcharov. Biểu thức $R_{n+1}(f, x)$ được gọi là phần dư của công thức khai triển Taylor - Gontcharov.

Chương 2

MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA CÔNG THỨC NỘI SUY LAGRANGE

2.1. Các đồng nhất thức cảm sinh từ công thức nội suy Lagrange.

Bài toán 2.1. *Chứng minh với ba số nguyên bất kỳ, đôi một khác nhau a, b, c thì số A xác định như sau cũng là số nguyên.*

$$A = \frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)}.$$

Bài toán 2.2. *Phân tích đa thức sau thành nhân tử*

$$x^3y + y^3z + z^3x - x^3z - y^3x - z^3y.$$

2.2. Ứng dụng công thức nội suy Lagrange vào giải toán.

Bài toán 2.3. *Xác định các đa thức bậc hai nhận các giá trị bằng* $3, 1, 7$ *tại* x *bằng* $-1, 0, 3$ *tương ứng.*

Bài toán 2.4. *Cho* $a_1; a_2; a_3; \ldots; a_n$ *đôi một khác nhau. Chứng minh rằng nếu đa thức* $f(x)$ *có bậc* $\deg f(x) \leq n-2$ *thì* $T = 0$. *Với* T *xác định bởi*

$$\begin{aligned} T = & \frac{f(a_1)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)\ldots(a_1-a_n)} \\ & + \frac{f(a_2)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)\ldots(a_2-a_n)} + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{f(a_n)}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)(a_n-a_3)\ldots(a_n-a_{n-1})}. \end{aligned}$$

Bài toán 2.5. *Chứng minh rằng nếu đa thức bậc hai nhận giá trị nguyên tại ba điểm nguyên liên tiếp của biến số* x *thì đa thức nhận giá trị nguyên tại mọi* x *nguyên.*

Bài toán 2.6. *Cho* $a_1; a_2; a_3; \ldots; a_n$ *là* n *số thực đôi một khác nhau. Gọi* $A_i (i = 1, 2, 3, \ldots, n)$ *là phần dư của phép chia đa thức* $f(x)$ *cho* $x - a$. *Hãy tìm phần dư* $r(x)$ *trong phép chia đa thức* $f(x)$ *cho* $(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_n)$.

Bài toán 2.7. *Giả sử đa thức* $f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \cdots + c_nx^n$ *có giá trị hữu tỉ khi* x *hữu tỉ. Chứng minh rằng, tất cả các hệ số* $c_1; c_2; c_3; \ldots; c_n$ *cũng là số hữu tỉ.*

Bài toán 2.8 (Vô địch Châu Á - Thái Bình Dương, 2001). *Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc, một điểm được gọi là "điểm hỗn hợp" nếu một trong hai thành phần tọa độ của nó là số hữu tỉ, thành phần kia là số vô tỉ. Tìm tất cả các đa thức có hệ số thực sao cho đồ thị của đa thức đó không chứa bất kỳ điểm hỗn hợp nào.*

Bài toán 2.9. *Tìm tất cả các đa thức bậc ba* $P(x)$ *và* $Q(x)$ *thỏa mãn bốn điều kiện:*

a) *Cả hai đa thức nhận giá trị* 0 *hoặc* 1 *tại các điểm* $x = 1, 2, 3, 4$.

b) *Nếu* $P(1) = 0$ *hoặc* $P(2) = 1$ *thì* $Q(1) = Q(3) = 1$.

c) *Nếu* $P(2) = 0$ *hoặc* $P(4) = 0$ *thì* $Q(2) = Q(4) = 0$.

d) *Nếu* $P(3) = 1$ *hoặc* $P(4) = 1$ *thì* $Q(1) = 0$.

Bài toán 2.10. (Vô địch Mỹ, 1975)

Đa thức $P(x)$ *bậc* n *thỏa mãn các đẳng thức:* $P(k) = \dfrac{1}{C_{n+1}^k}$ *với* $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$. *Tính* $P(n+1)$.

Bài toán 2.11 (VMO - 1977). *Giả sử cho trước các số nguyên $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Chứng minh rằng giữa các giá trị của đa thức $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ tại các điểm $x_0; x_1; x_2; \cdots ; x_n$ luôn tìm được một số mà giá trị tuyệt đối của nó không bé hơn $\frac{n!}{2^n}$.*

Giải

Với $0 \leq i \leq n$, áp dụng công thức nội suy Lagrange, đa thức $P(x)$ có thể biểu diễn lại dưới dạng

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{i \neq j}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \right) P(x_j).$$

Giả sử khẳng định bài toán không đúng, nghĩa là

$$|P(x_j)| < \frac{n!}{2^n} \text{ với } j = 0, 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Khi đó hệ số cao nhất của $P(x)$ bằng tổng các hệ số cao nhất trong các tích $\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$ và thỏa điều kiện

$$\left| \sum_{j=0}^{n} P(x_j) \left(\prod_{i \neq j}^{n} \frac{1}{x_j - x_i} \right) \right| < \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{2^n} \left(\prod_{i \neq j}^{n} \frac{1}{|x_j - x_i|} \right)$$

$$\leq \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{2^n} \frac{1}{\prod\limits_{i<j} (j - i)} = \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!(n - j)!}$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^{n} C_n^j = 1$$

mâu thuẫn. Suy ra điều cần chứng minh.

2.3. Bài tập

Bài tập 2.1. Phân tích các phân thức sau thành tổng các phân thức đơn giản.

a) $$A = \frac{x^2}{(x-1)(x+2)(x+3)}.$$

b) $$B = \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}.$$

Bài tập 2.2. Chứng minh rằng, với mọi số thực α ta có:

$$\begin{aligned} A &= \frac{(\alpha-\sqrt{3})(\alpha-\sqrt{5})(\alpha-\sqrt{7})}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{7})} + \frac{(\alpha-\sqrt{2})(\alpha-\sqrt{5})(\alpha-\sqrt{7})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{3}-\sqrt{7})} \\ &+ \frac{(\alpha-\sqrt{2})(\alpha-\sqrt{3})(\alpha-\sqrt{7})}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{7})} + \frac{(\alpha-\sqrt{3})(\alpha-\sqrt{3})(\alpha-\sqrt{5})}{(\sqrt{7}-\sqrt{23})(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{5})} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Bài tập 2.3. Cho các số a, b, c đôi một khác nhau. Chứng minh rằng, $\forall x \in \mathbb{R}$ ta có:

$$a^2\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b^2\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + c^2\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} \equiv x^2.$$

Bài tập 2.4. Tính tổng

$$S = \frac{cos1^o}{(cos1^o - cos2^o)(cos1^o - cos3^o)} + \frac{cos2^o}{(cos2^o - cos1^o)(cos2^o - cos3^o)} + \frac{cos3^o}{(cos3^o - cos1^o)(cos3^o - cos2^o)}.$$

Bài tập 2.5. Cho $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$ là m giá trị tùy ý, đôi một khác nhau. Đặt:

$$S_n = \frac{x_1^n}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\ldots(x_1 - x_m)} + \frac{x_2^n}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)\ldots(x_2 - x_m)} + \cdots + \frac{x_m^n}{(x_m - x_12)(x_m - x_2)\ldots(x_m - x_{m-1})}.$$

Chứng minh rằng:

a) $S_n = 0$ nếu $0 \leq n \leq m - 1$.

b) $S_{m-1} = 1$.

c) S_{m+k} bằng tổng các tích, mỗi tích có $k + 1$ thừa số (giống nhau hoặc khác nhau) lấy trong các số $x_1, x_2. \ldots, x_m$.

Bài tập 2.6. Chứng minh đẳng thức sau:

$$\sum_{m=0}^{2n+1} \frac{(-1)^m}{(2n+1-2m)!(2n+1-n)!} = (-1)^n \frac{2^{2n+1}}{((2n+1)!)^2}$$

Bài tập 2.7. Cho đa thức $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ thỏa điều kiện

$$|P(x)| \leq 1, \forall x \in [-1; 1].$$

Chứng minh rằng:

$$|a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n| \leq 2^{n-1}; \forall x \in [-1; 1].$$

Bài tập 2.8. Cho số nguyên tố p và dãy số nguyên r_i, trong đó

$$1 \leq r_1 \leq r_2 \leq r_3 \leq \cdots \leq r_m \leq p - 1$$

thỏa mãn điều kiện $r_i \equiv 1(modp); j = 1, 2, \cdots, m$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên $x \in \mathbb{Z}$ ta đều có

$$x^m - 1 \equiv (x - r_1)(x - r_2) \ldots (x - r_m)(modp).$$

Bài tập 2.9. Cho hàm số $f(x) = (x^2 - 1)(x - 1)(x - 2009)(x - 2010)$. Chứng minh phương trình $f"(x) = 0$ có ba nghiệm.

Chương 3

MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA CÔNG THỨC NỘI SUY TAYLOR, KHAI TRIỂN TAYLOR; NỘI SUY NEWTON VÀ KHAI TRIỂN TAYOR - GONTCHAROV

3.1. Ứng dụng của công thức nội suy Taylor và khai triển Taylor.

3.1.1. Khai triển Taylor.

Định lý 3.1 (Định lý Taylor, [3]). *Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm đến cấp $n-1$ trên $(a;b)$ và có đạo hàm cấp n tại $x_0 \in (a;b)$,* *khi đó với h đủ nhỏ ta có:*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o(h^n).$$

$R = o(h^n)$ được gọi là phần dư Peano.

Định lý 3.2 (Đa thức Taylor, [3]). *Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $[a;b]$ và $x_0 \in [a;b]$. Giả sử $f(x)$ có đạo hàm đến cấp n liên tục trên $[a;b]$ và có đạo hàm cấp $n+1$ trên $[a;b]$. Khi đó, với mỗi $x \in [a;b]$ tồn tại c nằm giữa x và x_0 sao cho:*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}. \tag{3.1}$$

3.1.2. Ứng dụng công thức nội suy Taylor vào giải toán.

3.1.2.1 Xác định đa thức thỏa điều kiện cho trước

Bài toán 3.1. *Cho hàm $f : [-1;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ là hàm khả vi đến cấp 3 và thỏa điều kiện $f(-1) = f(0) = 0,\ f(1) = 1,\ f'(0) = 0$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (-1;1)$ sao cho $f^{(3)}(c) \geq 3$.*

Bài toán 3.2 ([5]). *Cho hàm số f khả vi và $f(x)0 =$ có nghiệm trên $[a;b]$ (với $a < b$) và $\forall x \in [a;b] : |f'(x)| < |f(x)|$. Chứng minh rằng $f(x) \equiv 0, \forall x \in [a;b]$.*

Bài toán 3.3 ([5]). *Cho hàm số f khả vi vô hạn trên $\mathbb{R}$ và thỏa các điều kiện:*

1. $\exists M > 0$ *sao cho* $f^{(n)} \leq M, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$.
2. $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Chứng minh rằng khi đó $f(x) \equiv 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 3.4 ([5]). *Cho hàm số $f(x)$ có $f'''(x) > 0, \forall x > 0$ và đồ thị (C) của $f(x)$ có tiệm cận xiên $(d):\ y = ax + b$ khi $x \to +\infty$. Chứng minh rằng hàm số $g(x) = f(x) - ax - b$ có đạo hàm cấp 2 không dương với mọi $x > 0$.*

3.1.2.2 Ứng dụng vào tính giới hạn hàm số

Bài toán 3.5. *Cho hàm số* $f(x) = \ln(x+1)$.

a) *Chứng minh rằng với mọi $x > 0$, tồn tại duy nhất số thực c_x thỏa điều kiện $f(x) = x.f'(c_x)$.*

b) *Tính giới hạn* $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{c_x}{x}$.

Bài toán 3.6. *Cho hàm f khả vi đến cấp n trong lân cận của 0 và tồn tại $f^{(n+1)}(0) \neq 0$. Với mỗi h đủ bé để f xác định tại h,* *gọi $\theta h \in (0;1)$ là số được xác định bởi khai triển:*

$$f(h) = f(0)+hf'(0)+\cdots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(\theta(h)h). \quad (3.7)$$

Chứng minh rằng: $\lim\limits_{h\to 0}\theta(h) = \dfrac{1}{n+1}$.

Bài toán 3.7. *Tính giới hạn:* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin(x)) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$.

Bài toán 3.8. *Tính giới hạn:* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2\tan x} - e^x + x^2}{\arcsin x - \sin x}$.

Bài toán 3.9. *Tính giới hạn* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(\tan x) - \sin(\sin x)}{\tan x - \sin x}$.

Bài toán 3.10. *Tính giới hạn* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$.

Bài toán 3.11. *Tính giới hạn*

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x\sqrt{x}}\left(\sqrt{a}\arctan\sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{b}\arctan\sqrt{\frac{x}{b}}\right), a>0, b>0.$$

Bài toán 3.12. *Tính giới hạn* $\lim\limits_{x\to 0}\left[\cos(xe^x) - \ln(1-x) - x\right]^{\cot(x^3)}$.

3.2. Ứng dụng của công thức nội suy Newton và khai triển Taylor - Gontcharov.

Bài toán 3.13. *Tìm đa thức $P(x)$ có bậc không vượt quá 3 ($\deg P(x) \le 3$) thỏa điều kiện $P(-1) = 4; P'(0) = 0; P"(1) = 12, P^{(3)} = 6$.*

Bài toán 3.14. *Xác định tam thức bậc hai thỏa mãn điều kiện*

$$f^{(n)}(2n+1) = (-1)^n(2n^2 - n - 1),\ n = 0, 1, 2. \tag{3.12}$$

3.3. Bài tập.

Bài tập 3.1. Cho f là hàm số khả vi vô hạn lần trên $\left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{4}\right)$ sao cho phương trình $f(x) = 0$ có vô số nghiệm trên $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$ và $\sup\limits_{x\in(0;1)} =$ $o(n!)$ khi $n \to +\infty$. Chứng minh rằng $f(x) = 0, \forall x \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{4}\right)$.

Bài tập 3.2. Cho số thực dương a và số nguyên dương m. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\sqrt[m]{a^m + x} \geq a + \frac{x}{ma^{m-1}} + \frac{(1-m)x^2}{2m^2a^{2m-1}}, \forall x \geq 0.$$

Bài tập 3.3. Cho hàm số $f(x)$ có $f'''(x) > 0, \forall x > 0$ và đồ thị (C) của $f(x)$ có tiệm cận xiên $(d):\quad y = ax + b$ khi $x \to +\infty$. Chứng minh rằng tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x)$(với$x > 0$) luôn nằm phía trên tiệm cận xiên (d).

Bài tập 3.4. Cho hàm f thỏa mãn:

i) Khả vi vô hạn trên $\mathbb{R}$.

ii) Tồn tại $L > 0$ sao cho $|f^{(n)}(x)| \leq L, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$.

iii) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Chứng minh rằng $f \equiv 0$ trên $\mathbb{R}$.

Bài tập 3.5. Cho hàm f khả vi trên $\mathbb{R}$ sao cho với mỗi $k = 0, 1, 2$ thì

$$M_k = \sup |f^{(k)}(x)| : x \in \mathbb{R} < +\infty.$$

Chứng minh rằng $M_1 \leq \sqrt{2M_oM_2}$.

Bài tập 3.6. Cho f là hàm khả vi đến cấp 2 trên $(0; +\infty)$ và f'' bị chặn. Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

KẾT LUẬN

A. Những kết quả luận văn đã đạt được.

Trên cơ sở tổng hợp kiến thức từ nhiều nguồn tài liệu khác nhau, luận văn đã đạt được một số kết quả sau:

- Hệ thống một cách cơ bản nhất về các bài toán nội suy cổ điển: bài toán nội suy Lagrange, bài toán nội suy Newton và các công thức nội suy tương ứng, bài toán nội suy Taylor, các công thức khai triển liên quan đến công thức nội suy Taylor.

- Đối với công thức nội suy Lagrange, luận văn đã sưu tầm, hệ thống và phân loại được một số dạng bài tập. Trong đó, có nhiều bài tập khó được sử dụng trong các kỳ thi học sinh giỏi cấp quốc gia và quốc tế.

- Đối với công thức nội suy Taylor, công thức nội suy Newton, công thức khai triển Taylor, công thức khai triển Taylor

- Gontcharov, luận văn cũng đã sưu tầm, hệ thống lại một số dạng bài tập, đặc biệt là ứng dụng vào tính giới hạn hàm số ở dạng vô định.

B. Hướng mở rộng đề tài nghiên cứu.

Các công thức nội suy Lagrange, công thức nội suy Taylor, công thức nội suy Newton thực sự có nhiều ứng dụng rộng rãi trong toán học và đặc biệt trong nhiều lĩnh vực khác. Bên cạnh những nội dung mà luận văn đã trình bày, việc ứng dụng các công thức nội suy vào giải quyết những vấn đề khác, những dạng toán khác trong phạm vi chương trình Toán phổ thông vẫn còn rất rộng như: ứng dụng công thức nội suy vào đánh giá bất đẳng thức, đánh giá tương giao đồ thị của các hàm số, ước lượng các dãy số, tìm công thức tổng quát của dãy số, ... Tuy nhiên, trong khuôn khổ của luận văn, chúng tôi chưa có điều kiện nghiên cứu sâu hơn, rộng hơn về những ứng dụng của các công thức nội suy. Tác giả luận văn sẽ tiếp tục nghiên cứu, bổ sung thường xuyên để nội dung luận văn ngày càng cập nhật và mong muốn luận văn trở thành tài liệu có ích cho việc bồi dưỡng học sinh giỏi bậc Trung học phổ thông.