

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

PHẠM BÌNH NGUYỄN

**PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA
SINH BỞI CÁC YẾU TỐ
TRONG TAM GIÁC**

Chuyên ngành : **PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP**
Mã số : **60 46 40**

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

ĐÀ NẴNG - NĂM 2011

Công trình được hoàn thành tại
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

Người hướng dẫn khoa học: **GS.TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU**

Phản biện 1: **PGS.TSKH TRẦN QUỐC CHIẾN**

Phản biện 2: **PGS.TS TRẦN ĐẠO DŨNG**

Luận văn được bảo vệ trước Hội đồng chấm Luận văn tốt nghiệp Thạc sĩ khoa học tại Đại học Đà Nẵng vào ngày 17 tháng 08 năm 2011

Có thể tìm hiểu Luận văn tại

- Trung tâm Thông tin - Học liệu Đại học Đà Nẵng
- Thư viện trường Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng

Mở đầu

1. LÝ DO CHỌN ĐỀ TÀI

Trong chương trình toán học bậc Trung học Phổ thông, các bài toán về Lượng giác chiếm một vị trí rất quan trọng. Việc chứng minh các hệ thức đã biết theo một cách khác không theo cách biến đổi thông thường và tìm ra các hệ thức mới là rất cần thiết. Điều này giúp chúng ta rèn luyện tư duy và có hệ thống bài tập cho việc giảng dạy, bồi dưỡng học sinh giỏi cũng như trong các kỳ thi. Dựa trên nhận xét: *Một tam giác hoàn toàn được xác định bởi ba yếu tố độc lập, ba yếu tố đó có thể được coi là ba nghiệm của một phương trình bậc ba tương ứng*. Các yếu tố độc lập đó đều có thể biểu diễn qua p, R, r , tức phương trình bậc ba tìm được sẽ có hệ số chứa p, R, r .

Luận văn nhằm hiểu về các phương trình bậc ba sinh bởi các yếu tố trong tam giác và nêu cách giải quyết các vấn đề liên quan. Trên cơ sở đó xây dựng một số hệ thức lượng giác mới dựa vào tính chất của phương trình bậc ba và các bất đẳng thức quen biết.

Phương trình bậc ba là một vấn đề cổ điển của toán học sơ cấp, đây cũng là một trong những phần toán sơ cấp đẹp và thú vị. Nội dung xuyên suốt của luận văn là các phương trình bậc ba sinh bởi các yếu tố trong tam giác.

2. MỤC ĐÍCH NGHIÊN CỨU

Hệ thống và tổng quan các bài toán về "Phương trình bậc ba sinh bởi các yếu tố trong tam giác", phương trình bậc ba sinh bởi các cung và góc đặc biệt.

3. ĐỐI TƯỢNG VÀ PHẠM VI NGHIÊN CỨU

Nghiên cứu các bài toán về phương trình bậc ba sinh bởi các yếu tố trong tam giác và hệ thống các kiến thức liên quan.

Nghiên cứu từ các tài liệu, giáo trình của GS.TSKH Nguyễn Văn Mậu, các tài liệu bồi dưỡng học sinh giỏi, tủ sách chuyên toán, Tạp chí toán học và tuổi trẻ,...

4. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

Nghiên cứu gián tiếp qua các trang web:

www.mathlinks.ro

www.mathnfriend.net

www.vnmath.com

Nghiên cứu trực tiếp từ các tài liệu của Thầy hướng dẫn, của các đồng nghiệp cũng như các bạn học viên trong lớp.

5. CẤU TRÚC CỦA LUẬN VĂN

Ngoài phần mở đầu và kết luận, luận văn gồm bốn chương

Chương 1. Các kiến thức cơ bản về phương trình bậc ba

Chương 2. Phương trình bậc ba của các yếu tố trong tam giác

Chương 3. Bất đẳng thức trong tam giác và nhận dạng tam giác

Chương 4. Các đẳng thức trong tam giác

Chương 1

Các kiến thức bổ trợ liên quan

1.1 Một số định lý quan trọng của hình học phẳng

1.2 Các định lý cơ bản trong tam giác

1.3 Phương pháp giải phương trình bậc ba

1.4 Các tính chất nghiệm của phương trình bậc ba

Phương trình bậc ba

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \quad (1.1)$$

có ba nghiệm x_1, x_2, x_3 (kể cả nghiệm phức) thỏa mãn các tính chất sau:

Tính chất 1.1 ([4]). $T_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -a$;

Tính chất 1.2 ([4]). $T_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = b$;

Tính chất 1.3 ([4]). $T_3 = x_1x_2x_3 = -c$.

Tính chất 1.4 ([4]).

$$T_4 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = -\frac{b}{c}.$$

Tính chất 1.5 ([4]).

$$T_5 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2 - 2b.$$

Tính chất 1.6 ([4]).

$$T_6 = (x_1 + x_2)(x_2 + x_3)(x_3 + x_1) = -ab + c.$$

Tính chất 1.7 ([4]).

$$T_7 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -a^3 + 3ab - 3c.$$

Tính chất 1.8 ([4]).

$$T_8 = (x_1 + x_2 - x_3)(x_2 + x_3 - x_1)(x_3 + x_1 - x_2) = a^3 - 4ab + 8c.$$

Tính chất 1.9 ([4]).

$$T_9 = \frac{x_1 + x_2}{x_3} + \frac{x_2 + x_3}{x_1} + \frac{x_3 + x_1}{x_2} = \frac{ab - 3c}{c} = \frac{ab}{c} - 3.$$

Tính chất 1.10 ([4]).

$$T_{10} = x_1^2 x_2^2 + x_2^2 x_3^2 + x_3^2 x_1^2 = b^2 - 2ac.$$

Tính chất 1.11 ([4]).

$$T_{11} = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = a^4 - 4a^2b + 2b^2 + 4ac.$$

Tính chất 1.12 ([4]). Với mọi k, l ta có

$$T_{12} = (k + lx_1)(k + lx_2)(k + lx_3) = k^3 - k^2la + kl^2b - l^3c.$$

Tính chất 1.13 ([4]).

$$T_{13} = \frac{1}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_2 x_3} + \frac{1}{x_3 x_1} = \frac{a}{c}.$$

Tính chất 1.14 ([4]).

$$T_{14} = \frac{x_1}{x_2 x_3} + \frac{x_2}{x_3 x_1} + \frac{x_3}{x_1 x_2} = \frac{2b - a^2}{c}.$$

Tính chất 1.15 ([4]).

$$T_{15} = \frac{x_1 x_2}{x_3} + \frac{x_2 x_3}{x_1} + \frac{x_3 x_1}{x_2} = 2a - \frac{b^2}{c}.$$

Tính chất 1.16 ([4]).

$$T_{16} = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} = \frac{b^2 - 2ac}{c^2}.$$

Tính chất 1.17 ([4]).

$$T_{17} = (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 = 2(a^2 - 3b).$$

Tính chất 1.18 ([4]).

$$T_{18} = \frac{1}{x_1 + x_2} + \frac{1}{x_2 + x_3} + \frac{1}{x_3 + x_1} = \frac{a^2 + b}{-ab + c}.$$

Nhận xét 1.1 ([4]). Nếu x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm của phương trình (1.1) thì

$$\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}$$

là nghiệm của phương trình

$$t^3 + \frac{b}{c}t^2 + \frac{a}{c}t + \frac{1}{c} = 0. \quad (1.2)$$

Nhận xét 1.2. Nếu x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm của phương trình (1.1) thì

$$x_1^2, x_2^2, x_3^2$$

là nghiệm của phương trình

$$t^3 - (a^2 - 2b)t^2 + (b^2 - 2ac)t - c^2 = 0. \quad (1.3)$$

Nhận xét 1.3. Nếu x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm của phương trình (1.1) thì

$$(x_1 + x_2), (x_2 + x_3), (x_3 + x_1)$$

là nghiệm của phương trình

$$t^3 + 2at^2 + (a^2 + b)t + (ab - c) = 0. \quad (1.4)$$

Nhận xét 1.4. Nếu x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm của phương trình (1.1) thì

$$(x_1x_2 + x_2x_3), (x_2x_3 + x_3x_1), (x_3x_1 + x_1x_2)$$

là nghiệm của phương trình

$$t^3 - 2bt^2 + (b^2 + ac)t + (c^2 - abc) = 0. \quad (1.5)$$

Nhận xét 1.5. Nếu x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm của phương trình (1.1) thì

$$x_1x_2, x_2x_3, x_3x_1$$

là nghiệm của phương trình

$$t^3 - bt^2 + act - c^2 = 0. \quad (1.6)$$

Chương 2

Phương trình bậc ba của các yếu tố trong tam giác

2.1 Phương trình bậc ba với nghiệm là các yếu tố độ dài trong tam giác

Bài toán 2.1 ([4]). *Độ dài ba cạnh của tam giác ABC (giả sử lần lượt là a, b, c) là các nghiệm của phương trình*

$$t^3 - 2pt^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)t - 4pRr = 0. \quad (2.1)$$

Bài toán 2.2 ([4]). $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4pRr}t^2 + \frac{1}{2Rr}t - \frac{1}{4pRr} = 0. \quad (2.2)$$

Bài toán 2.3. a^2, b^2, c^2 là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - 2(p^2 - r^2 - 4Rr)t^2 + [(p^2 + r^2 + 4Rr)^2 - 16p^2Rr]t - 16p^2R^2r^2 = 0. \quad (2.3)$$

Bài toán 2.4. $a + b, b + c, c + a$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - 4pt^2 + (5p^2 + r^2 + 4Rr)t - 2p(p^2 + r^2 + 2Rr) = 0. \quad (2.4)$$

Bài toán 2.5. ab, bc, ca là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - (p^2 + r^2 + 4Rr)t^2 + 8p^2Rrt - 16p^2R^2r^2 = 0. \quad (2.5)$$

Bài toán 2.6. $\frac{1}{ab}, \frac{1}{bc}, \frac{1}{ca}$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - \frac{1}{2Rr}t^2 + \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{16p^2R^2r^2}t - \frac{1}{16p^2R^2r^2} = 0. \quad (2.6)$$

Bài toán 2.7. $\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - \frac{(p^2 + r^2 + 4Rr)^2 - 16p^2Rr}{16p^2R^2r^2}t^2 + \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{8p^2R^2r^2}t - \frac{1}{16p^2R^2r^2} = 0. \quad (2.7)$$

Bài toán 2.8. $\frac{1}{a+b}, \frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - \frac{5p^2 + r^2 + 4Rr}{2p(p^2 + r^2 + 2Rr)}t^2 + \frac{2}{p^2 + r^2 + 2Rr}t - \frac{1}{2p(p^2 + r^2 + 2Rr)} = 0. \quad (2.8)$$

Bài toán 2.9. $(a+b)(b+c), (b+c)(c+a), (c+a)(a+b)$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - (5p^2 + r^2 + 4Rr)t^2 + 8p^2(p^2 + r^2 + 2Rr)t - 4p^2(p^2 + r^2 + 2Rr)^2 = 0. \quad (2.9)$$

Bài toán 2.10. $p-a, p-b, p-c$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - pt^2 + (r^2 + 4Rr)t - pr^2 = 0. \quad (2.10)$$

Bài toán 2.11. $\frac{1}{p-a}, \frac{1}{p-b}, \frac{1}{p-c}$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - \frac{4R+r}{pr}t^2 + \frac{1}{r^2}t - \frac{1}{pr^2} = 0. \quad (2.11)$$

Bài toán 2.12. $(p-a)^2, (p-b)^2, (p-c)^2$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - (p^2 - 2r^2 - 8Rr)t^2 + [(r^2 + 4Rr)^2 - 2p^2r^2]t - p^2r^4 = 0. \quad (2.12)$$

Bài toán 2.13. $(p-a)(p-b), (p-b)(p-c), (p-c)(p-a)$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - (r^2 + 4Rr)t^2 + p^2r^2t - p^2r^4 = 0. \quad (2.13)$$

Bài toán 2.14. $\frac{1}{(p-a)^2}, \frac{1}{(p-b)^2}, \frac{1}{(p-c)^2}$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - \frac{(r+4R)^2 - 2p^2}{p^2r^2}t^2 + \frac{p^2 - 2r^2 - 8Rr}{p^2r^4}t - \frac{1}{p^2r^4} = 0. \quad (2.14)$$

Bài toán 2.15. $\frac{1}{(p-a)(p-b)}, \frac{1}{(p-b)(p-c)}, \frac{1}{(p-c)(p-a)}$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - \frac{1}{r^2}t + \frac{r^2 + 4Rr}{p^2r^4}t - \frac{1}{p^2r^4} = 0. \quad (2.15)$$

Bài toán 2.16. h_a, h_b, h_c là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{2R}t^2 + \frac{2p^2r}{R}t - \frac{2p^2r^2}{R} = 0. \quad (2.16)$$

Bài toán 2.17. $\frac{1}{h_a}, \frac{1}{h_b}, \frac{1}{h_c}$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - \frac{1}{r}t^2 + \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4p^2r^2}t - \frac{R}{2p^2r^2} = 0. \quad (2.17)$$

Bài toán 2.18. $h_a h_b, h_b h_c, h_c h_a$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - \frac{2p^2r}{R}t^2 + \frac{p^2r^2}{R} \cdot \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{R}t - \frac{4p^4r^4}{R^2} = 0. \quad (2.18)$$

Bài toán 2.19. r_a, r_b, r_c là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - (4R + r)t^2 + p^2t - p^2r = 0. \quad (2.19)$$

Bài toán 2.20. $\frac{1}{r_a}, \frac{1}{r_b}, \frac{1}{r_c}$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - \frac{1}{r}t^2 + \frac{4R + r}{p^2r}t - \frac{1}{p^2r} = 0. \quad (2.20)$$

Bài toán 2.21. r_a^2, r_b^2, r_c^2 là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - [(4R + r)^2 - 2p^2]t^2 + [p^4 - 2p^2r(4R + r)]t - p^4r^2 = 0. \quad (2.21)$$

Bài toán 2.22. $r_a + r_b, r_b + r_c, r_c + r_a$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - 2(4R + r)t^2 + [(4R + r)^2 + p^2]t - p^2(4R + r) + p^2r = 0. \quad (2.22)$$

Bài toán 2.23. $r_a r_b + r_b r_c, r_b r_c + r_c r_a, r_c r_a + r_a r_b$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - 2p^2t^2 + [p^4 + p^2r(4R + r)]t + p^4r^2 - p^4r(4R + r) = 0. \quad (2.23)$$

Bài toán 2.24. $r_a r_b, r_b r_c, r_c r_a$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - p^2 t^2 + p^2 r(4R + r)t - p^4 r^2 = 0. \quad (2.24)$$

Bài toán 2.25. $\frac{1}{r_a^2}, \frac{1}{r_b^2}, \frac{1}{r_c^2}$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - \frac{p^2 - 2r(4R + r)}{p^2 r^2} t^2 + \frac{(4R + r)^2 - 2p^2}{p^4 r^2} t - \frac{1}{p^4 r^2} = 0. \quad (2.25)$$

Bài toán 2.26. $\frac{1}{r_a + r_b}, \frac{1}{r_b + r_c}, \frac{1}{r_c + r_a}$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - \frac{(4R + r)^2 + p^2}{p^2(4R + r) - p^2 r} t^2 + \frac{2(4R + r)}{p^2(4R + r) - p^2 r} t - \frac{1}{p^2(4R + r) - p^2 r} = 0. \quad (2.26)$$

Bài toán 2.27. $\frac{1}{r_a r_b}, \frac{1}{r_b r_c}, \frac{1}{r_c r_a}$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - \frac{4R + r}{p^2 r} t^2 + \frac{1}{p^2 r^2} t - \frac{1}{p^4 r^2} = 0. \quad (2.27)$$

2.2 Phương trình bậc ba sinh bởi các biểu thức lượng giác trong tam giác

Bài toán 2.28. $\sin A, \sin B, \sin C$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - \frac{p}{R} t^2 + \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4R^2} t - \frac{pr}{2R^2} = 0. \quad (2.28)$$

Bài toán 2.29. $\frac{1}{\sin A}, \frac{1}{\sin B}, \frac{1}{\sin C}$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{2pr} t^2 + \frac{2R}{r} t - \frac{2R^2}{pr} = 0. \quad (2.29)$$

Bài toán 2.30. $\sin^2 A, \sin^2 B, \sin^2 C$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{2R^2} t^2 + \left[\left(\frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4R^2} \right)^2 - \frac{p^2 r}{R^3} \right] t - \frac{p^2 r^2}{4R^4} = 0. \quad (2.30)$$

Bài toán 2.31. $\sin A + \sin B, \sin B + \sin C, \sin C + \sin A$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - \frac{2p}{R}t^2 + \frac{5p^2 + r^2 + 4Rr}{4R^2}t - \frac{p}{R} \frac{p^2 + r^2 + 2Rr}{4R^2} = 0. \quad (2.31)$$

Bài toán 2.32. $\sin A \sin B, \sin B \sin C, \sin C \sin A$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4R^2}t^2 + \frac{p^2r}{2R^3}t - \frac{p^2r^2}{4R^4} = 0. \quad (2.32)$$

Bài toán 2.33 ([4]). $\cos A, \cos B, \cos C$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - \frac{R+r}{R}t^2 + \frac{p^2 + r^2 - 4R^2}{4R^2}t - \frac{p^2 - (2R+r)^2}{4R^2} = 0. \quad (2.33)$$

Bài toán 2.34. $\frac{1}{\cos A}, \frac{1}{\cos B}, \frac{1}{\cos C}$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - \frac{p^2 + r^2 - 4R^2}{p^2 - (2R+r)^2}t^2 + \frac{4R(R+r)}{p^2 - (2R+r)^2}t - \frac{4R^2}{p^2 - (2R+r)^2} = 0. \quad (2.34)$$

Bài toán 2.35. $(\cos A + \cos B), (\cos B + \cos C), (\cos C + \cos A)$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - \frac{2(R+r)}{R}t^2 + \frac{p^2 + 5r^2 + 8Rr}{4R^2}t - \frac{r}{4R^3}(p^2 + r^2 + 2Rr) = 0. \quad (2.35)$$

Bài toán 2.36. $\sin^2 \frac{A}{2}, \sin^2 \frac{B}{2}, \sin^2 \frac{C}{2}$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - \frac{2R-r}{2R}t^2 + \frac{p^2 + r^2 - 8Rr}{16R^2}t - \frac{r^2}{16R^2} = 0. \quad (2.36)$$

Bài toán 2.37. $\cos^2 \frac{A}{2}, \cos^2 \frac{B}{2}, \cos^2 \frac{C}{2}$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - \frac{4R+r}{2R}t^2 + \frac{p^2 + (4R+r)^2}{16R^2}t - \frac{p^2}{16R^2} = 0. \quad (2.37)$$

Bài toán 2.38. $\frac{1}{\sin^2 \frac{A}{2}}, \frac{1}{\sin^2 \frac{B}{2}}, \frac{1}{\sin^2 \frac{C}{2}}$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - \frac{p^2 + r^2 - 8Rr}{r^2}t^2 + \frac{8R(2R-r)}{r^2}t - \frac{16R^2}{r^2} = 0. \quad (2.38)$$

Bài toán 2.39. $\frac{1}{\cos^2 \frac{A}{2}}, \frac{1}{\cos^2 \frac{B}{2}}, \frac{1}{\cos^2 \frac{C}{2}}$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - \frac{p^2 + (4R + r)^2}{p^2}t^2 + \frac{8R(4R + r)}{p^2}t - \frac{16R^2}{p^2} = 0. \quad (2.39)$$

Bài toán 2.40 ([4]). $\cot A, \cot B, \cot C$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{2pr}t^2 + t - \frac{p^2 - (2R + r)^2}{2pr} = 0. \quad (2.40)$$

Bài toán 2.41. $\tan A, \tan B, \tan C$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - \frac{2pr}{p^2 - (2R + r)^2}t^2 + \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{p^2 - (2R + r)^2}t - \frac{2pr}{p^2 - (2R + r)^2} = 0. \quad (2.41)$$

Bài toán 2.42. $\tan \frac{A}{2}, \tan \frac{B}{2}, \tan \frac{C}{2}$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - \frac{4R + r}{p}t^2 + t - \frac{r}{p} = 0. \quad (2.42)$$

Bài toán 2.43. $\cot \frac{A}{2}, \cot \frac{B}{2}, \cot \frac{C}{2}$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - \frac{p}{r}t^2 + \frac{4R + r}{r}t - \frac{p}{r} = 0. \quad (2.43)$$

Bài toán 2.44. $\tan^2 \frac{A}{2}, \tan^2 \frac{B}{2}, \tan^2 \frac{C}{2}$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - \frac{(4R + r)^2 - 2p^2}{p^2}t^2 + \frac{p^2 - 2r^2 - 8Rr}{p^2}t - \frac{r^2}{p^2} = 0. \quad (2.44)$$

Bài toán 2.45. $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2}, \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2}, \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2}$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - t^2 + \frac{4Rr + r^2}{p^2}t - \frac{r^2}{p^2} = 0. \quad (2.45)$$

Bài toán 2.46. $\cot^2 \frac{A}{2}, \cot^2 \frac{B}{2}, \cot^2 \frac{C}{2}$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - \frac{p^2 - 2r^2 - 8Rr}{r^2}t^2 + \frac{(4R + r)^2 - 2p^2}{r^2}t - \frac{p^2}{r^2} = 0. \quad (2.46)$$

Bài toán 2.47. $\cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2}, \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}, \cot \frac{C}{2} \cot \frac{A}{2}$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - \frac{4R+r}{r}t^2 + \frac{p^2}{r^2}t - \frac{p^2}{r^2} = 0. \quad (2.47)$$

Bài toán 2.48. $a \sin A, b \sin B, c \sin C$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{R}t^2 + \left[\left(\frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{2R} \right)^2 - \frac{4rp^2}{R} \right]t - \frac{2p^2r^2}{R} = 0. \quad (2.48)$$

2.3 Phương trình bậc ba của các cung và góc đặc biệt

Bài toán 2.49 ([5]). $\cos \frac{\pi}{7}, \cos \frac{3\pi}{7}, \cos \frac{5\pi}{7}$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{8} = 0. \quad (2.49)$$

Bài toán 2.50. $\frac{1}{\cos \frac{\pi}{7}}, \frac{1}{\cos \frac{3\pi}{7}}, \frac{1}{\cos \frac{5\pi}{7}}$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - 4t^2 - 4t + 8 = 0. \quad (2.50)$$

Bài toán 2.51. $\cos^2 \frac{\pi}{7}, \cos^2 \frac{3\pi}{7}, \cos^2 \frac{5\pi}{7}$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - \frac{5}{4}t^2 + \frac{3}{8}t - \frac{1}{64} = 0. \quad (2.51)$$

Bài toán 2.52. $\sin^2 \frac{\pi}{7}, \sin^2 \frac{3\pi}{7}, \sin^2 \frac{5\pi}{7}$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - \frac{7}{4}t^2 + \frac{7}{8}t - \frac{7}{64} = 0. \quad (2.52)$$

Bài toán 2.53. $\frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{7}}, \frac{1}{\cos^2 \frac{3\pi}{7}}, \frac{1}{\cos^2 \frac{5\pi}{7}}$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - 24t^2 + 80t - 64 = 0. \quad (2.53)$$

Bài toán 2.54. $\cos \frac{2\pi}{7}, \cos \frac{4\pi}{7}, \cos \frac{6\pi}{7}$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{8} = 0. \quad (2.54)$$

Bài toán 2.55. $\frac{1}{\cos \frac{2\pi}{7}}, \frac{1}{\cos \frac{4\pi}{7}}, \frac{1}{\cos \frac{6\pi}{7}}$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 + 4t^2 - 4t - 8 = 0. \quad (2.55)$$

Bài toán 2.56. $\cos^2 \frac{2\pi}{7}, \cos^2 \frac{4\pi}{7}, \cos^2 \frac{6\pi}{7}$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - \frac{5}{4}t^2 + \frac{3}{8}t - \frac{1}{64} = 0. \quad (2.56)$$

Bài toán 2.57. $\frac{1}{\cos^2 \frac{2\pi}{7}}, \frac{1}{\cos^2 \frac{4\pi}{7}}, \frac{1}{\cos^2 \frac{6\pi}{7}}$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - 24t^2 + 80t - 64 = 0. \quad (2.57)$$

Bài toán 2.58. $\cos^2 \frac{\pi}{14}, \cos^2 \frac{3\pi}{14}, \cos^2 \frac{5\pi}{14}$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - \frac{7}{4}t^2 + \frac{7}{8}t - \frac{7}{64} = 0. \quad (2.58)$$

Bài toán 2.59. $\tan^2 \frac{\pi}{7}, \tan^2 \frac{3\pi}{7}, \tan^2 \frac{5\pi}{7}$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - 21t^2 + 35t - 7 = 0. \quad (2.59)$$

Bài toán 2.60. $\cot^2 \frac{\pi}{7}, \cot^2 \frac{3\pi}{7}, \cot^2 \frac{5\pi}{7}$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - 5t^2 + 3t - \frac{1}{7} = 0. \quad (2.60)$$

Bài toán 2.61 ([5]). $\cos \frac{2\pi}{9}, \cos \frac{4\pi}{9}, \cos \frac{8\pi}{9}$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - \frac{3}{4}t + \frac{1}{8} = 0. \quad (2.61)$$

Bài toán 2.62. $\frac{1}{\cos \frac{2\pi}{9}}, \frac{1}{\cos \frac{4\pi}{9}}, \frac{1}{\cos \frac{8\pi}{9}}$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - 6t^2 + 8 = 0. \quad (2.62)$$

Bài toán 2.63. $\cos^2 \frac{2\pi}{9}, \cos^2 \frac{4\pi}{9}, \cos^2 \frac{8\pi}{9}$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{9}{16}t - \frac{1}{64} = 0. \quad (2.63)$$

Bài toán 2.64. $\sin^2 \frac{2\pi}{9}, \sin^2 \frac{4\pi}{9}, \sin^2 \frac{8\pi}{9}$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{9}{16}t - \frac{3}{64} = 0. \quad (2.64)$$

Bài toán 2.65. $\frac{1}{\cos^2 \frac{2\pi}{9}}, \frac{1}{\cos^2 \frac{4\pi}{9}}, \frac{1}{\cos^2 \frac{8\pi}{9}}$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - 36t^2 + 96t - 64 = 0. \quad (2.65)$$

Bài toán 2.66. $\tan^2 \frac{2\pi}{9}, \tan^2 \frac{4\pi}{9}, \tan^2 \frac{8\pi}{9}$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - 33t^2 + 27t - 3 = 0. \quad (2.66)$$

Bài toán 2.67. $\cot^2 \frac{2\pi}{9}, \cot^2 \frac{4\pi}{9}, \cot^2 \frac{8\pi}{9}$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - 9t^2 + 11t - \frac{1}{3} = 0. \quad (2.67)$$

Bài toán 2.68. $\cos \frac{\pi}{9}, \cos \frac{5\pi}{9}, \cos \frac{7\pi}{9}$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - \frac{3}{4}t - \frac{1}{8} = 0. \quad (2.68)$$

Bài toán 2.69. $\frac{1}{\cos \frac{\pi}{9}}, \frac{1}{\cos \frac{5\pi}{9}}, \frac{1}{\cos \frac{7\pi}{9}}$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 + 6t^2 - 8 = 0. \quad (2.69)$$

Chương 3

Bất đẳng thức trong tam giác và nhận dạng tam giác

3.1 Nhận dạng tam giác đều

3.2 Nhận dạng tam giác vuông

3.3 Nhận dạng tam giác cân

Chương 4

Các đẳng thức trong tam giác

4.1 Các đẳng thức liên quan đến yếu tố độ dài trong tam giác

Bài toán 4.1. *Áp dụng tính chất 1.2 vào phương trình (2.1) ta được*

$$ab + bc + ca = p^2 + r^2 + 4Rr.$$

Bài toán 4.2. *Áp dụng tính chất 1.3 vào phương trình (2.1) ta được*

$$abc = 4pRr.$$

Bài toán 4.3. *Áp dụng tính chất 1.4 vào phương trình (2.1) ta được*

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4pRr}.$$

Bài toán 4.4. *Áp dụng tính chất 1.5 vào phương trình (2.1) ta được*

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(p^2 - r^2 - 4Rr).$$

Bài toán 4.5. *Áp dụng tính chất 1.6 vào phương trình (2.1) ta được*

$$(a + b)(b + c)(c + a) = 2p(p^2 + r^2 + 2Rr).$$

Bài toán 4.6. *Áp dụng tính chất 1.7 vào phương trình (2.1) ta được*

$$a^3 + b^3 + c^3 = 2p(p^2 - 3r^2 - 6Rr).$$

Bài toán 4.7. *Áp dụng tính chất 1.8 vào phương trình (2.1) ta được*

$$(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) = 8pr^2.$$

Bài toán 4.8. Áp dụng tính chất 1.9 vào phương trình (2.1) ta được

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = \frac{p^2 + r^2 - 2Rr}{2Rr}.$$

Bài toán 4.9. Áp dụng tính chất 1.10 vào phương trình (2.1) ta được

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = (p^2 + r^2 + 4Rr)^2 - 16p^2Rr.$$

Bài toán 4.10. Áp dụng tính chất 1.11 vào phương trình (2.1) ta được

$$a^4 + b^4 + c^4 = 2(p^2 - r^2 - 4Rr)^2 - 8p^2r^2.$$

Bài toán 4.11. Áp dụng tính chất 1.12 vào phương trình (2.1) ta được

$$(k+la)(k+lb)(k+lc) = k^3 + 2pk^2l + (p^2 + r^2 + 4Rr)kl^2 + 4pRrl^3.$$

Với k, l là hai số thực bất kì.

Bài toán 4.12. Áp dụng tính chất 1.13 vào phương trình (2.1) ta được

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = \frac{1}{2Rr}.$$

Bài toán 4.13. Áp dụng tính chất 1.14 vào phương trình (2.1) ta được

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab} = \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{2pRr}.$$

Bài toán 4.14. Áp dụng tính chất 1.15 vào phương trình (2.1) ta được

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} = \frac{(p^2 + r^2 + 4Rr)^2}{4pRr} - 4p.$$

Bài toán 4.15. Áp dụng tính chất 1.16 vào phương trình (2.1) ta được

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{(p^2 + r^2 + 4Rr)^2 - 16p^2Rr}{16p^2R^2r^2}.$$

Bài toán 4.16. Áp dụng tính chất 1.17 vào phương trình (2.1) ta được

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 2(p^2 - 3r^2 - 12Rr)$$

Bài toán 4.17. Áp dụng tính chất 1.18 vào phương trình (2.1) ta được

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = \frac{5p^2 + r^2 + 4Rr}{2p(p^2 + r^2 + 2Rr)}.$$

4.2 Các đẳng thức liên quan đến các biểu thức lượng giác trong tam giác

Bài toán 4.18. *Áp dụng tính chất 1.1 vào phương trình (2.28) ta được*

$$\sin A + \sin B + \sin C = \frac{p}{R}.$$

Bài toán 4.19. *Áp dụng tính chất 1.2 vào phương trình (2.28) ta được*

$$\sin A \sin B + \sin B \sin C + \sin C \sin A = \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4R^2}.$$

Bài toán 4.20. *Áp dụng tính chất 1.3 vào phương trình (2.28) ta được*

$$\sin A \sin B \sin C = \frac{pr}{2R^2}.$$

Bài toán 4.21. *Áp dụng tính chất 1.4 vào phương trình (2.28) ta được*

$$\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} = \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{2pr}.$$

Bài toán 4.22. *Áp dụng tính chất 1.5 vào phương trình (2.28) ta được*

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{2R^2}.$$

Bài toán 4.23. *Áp dụng tính chất 1.6 vào phương trình (2.28) ta được*

$$(\sin A + \sin B)(\sin B + \sin C)(\sin C + \sin A) = \frac{p(p^2 + r^2 + 2Rr)}{4R^3}.$$

Bài toán 4.24. *Áp dụng tính chất 1.7 vào phương trình (2.28) ta được*

$$\sin^3 A + \sin^3 B + \sin^3 C = \frac{p(p^2 - 3r^2 - 6Rr)}{4R^3}.$$

Bài toán 4.25. *Áp dụng tính chất 1.8 vào phương trình (2.28) ta được*

$$(\sin A + \sin B - \sin C)(\sin B + \sin C - \sin A)(\sin C + \sin A - \sin B) = \frac{pr^2}{R^3}.$$

Bài toán 4.26. Áp dụng tính chất 1.9 vào phương trình (2.28) ta được

$$\frac{\sin A + \sin B}{\sin C} + \frac{\sin B + \sin C}{\sin A} + \frac{\sin C + \sin A}{\sin B} = \frac{p^2 + r^2 - 2Rr}{2Rr}.$$

Bài toán 4.27. Áp dụng tính chất 1.10 vào phương trình (2.28) ta được

$$\sin^2 A \sin^2 B + \sin^2 B \sin^2 C + \sin^2 C \sin^2 A = \left(\frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4R^2}\right)^2 - \frac{p^2 r}{R^3}.$$

Bài toán 4.28. Áp dụng tính chất 1.11 vào phương trình (2.28) ta được

$$\sin^4 A + \sin^4 B + \sin^4 C = \frac{(p^2 - r^2 - 4Rr)^2 - 4p^2 r^2}{8R^4}.$$

Bài toán 4.29. Áp dụng tính chất 1.12 vào phương trình (2.28) ta được

$$(k+l \sin A)(k+l \sin B)(k+l \sin C) = k^3 + \frac{p}{R} k^2 l + \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4R^2} k l^2 + \frac{pr}{2R^2} l^3.$$

Với k, l là hai số thực bất kì.

Bài toán 4.30. Áp dụng tính chất 1.13 vào phương trình (2.28) ta được

$$\frac{1}{\sin A \sin B} + \frac{1}{\sin B \sin C} + \frac{1}{\sin C \sin A} = \frac{2R}{r}.$$

Bài toán 4.31. Áp dụng tính chất 1.14 vào phương trình (2.28) ta được

$$\frac{\sin A}{\sin B \sin C} + \frac{\sin B}{\sin C \sin A} + \frac{\sin C}{\sin A \sin B} = \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{pr}.$$

Bài toán 4.32. Áp dụng tính chất 1.15 vào phương trình (2.28) ta được

$$\frac{\sin A \sin B}{\sin C} + \frac{\sin B \sin C}{\sin A} + \frac{\sin C \sin A}{\sin B} = \frac{(p^2 + r^2 + 4Rr)^2 - 16p^2 Rr}{8pR^2 r}.$$

Bài toán 4.33. Áp dụng tính chất 1.16 vào phương trình (2.28) ta được

$$\frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B} + \frac{1}{\sin^2 C} = \frac{(p^2 + r^2 + 4Rr)^2 - 16p^2 Rr}{4p^2 r^2}.$$

Bài toán 4.34. Áp dụng tính chất 1.17 vào phương trình (2.28) ta được

$$(\sin A - \sin B)^2 + (\sin B - \sin C)^2 + (\sin C - \sin A)^2 = \frac{p^2 - 3r^2 - 12Rr}{2R^2}.$$

Bài toán 4.35. Áp dụng tính chất 1.18 vào phương trình (2.28) ta được

$$\frac{1}{\sin A + \sin B} + \frac{1}{\sin B + \sin C} + \frac{1}{\sin C + \sin A} = \frac{R(5p^2 + r^2 + 4Rr)}{p(p^2 + r^2 + 2Rr)}.$$

4.3 Các đẳng thức liên quan đến các cung và góc đặc biệt

Bài toán 4.36. *Áp dụng tính chất 1.1 vào phương trình (2.49) ta được*

$$\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2}.$$

Bài toán 4.37. *Áp dụng tính chất 1.2 vào phương trình (2.49) ta được*

$$\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} \cos \frac{5\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} = -\frac{1}{2}.$$

Bài toán 4.38. *Áp dụng tính chất 1.3 vào phương trình (2.49) ta được*

$$\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{3\pi}{7} \cos \frac{5\pi}{7} = -\frac{1}{8}.$$

Bài toán 4.39. *Áp dụng tính chất 1.4 vào phương trình (2.49) ta được*

$$\frac{1}{\cos \frac{\pi}{7}} + \frac{1}{\cos \frac{3\pi}{7}} + \frac{1}{\cos \frac{5\pi}{7}} = 4.$$

Bài toán 4.40. *Áp dụng tính chất 1.5 vào phương trình (2.49) ta được*

$$\cos^2 \frac{\pi}{7} + \cos^2 \frac{3\pi}{7} + \cos^2 \frac{5\pi}{7} = \frac{5}{4}.$$

Bài toán 4.41. *Áp dụng tính chất 1.6 vào phương trình (2.49) ta được*

$$\left(\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7}\right)\left(\cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7}\right)\left(\cos \frac{5\pi}{7} + \cos \frac{\pi}{7}\right) = -\frac{1}{8}.$$

Bài toán 4.42. *Áp dụng tính chất 1.7 vào phương trình (2.49) ta được*

$$\cos^3 \frac{\pi}{7} + \cos^3 \frac{3\pi}{7} + \cos^3 \frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2}.$$

Bài toán 4.43. *Áp dụng tính chất 1.8 vào phương trình (2.49) ta được*

$$\begin{aligned} & \left(\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} - \cos \frac{5\pi}{7}\right)\left(\cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} - \cos \frac{\pi}{7}\right) \\ & \left(\cos \frac{5\pi}{7} + \cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{3\pi}{7}\right) = -\frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Bài toán 4.44. Áp dụng tính chất 1.9 vào phương trình (2.49) ta được

$$\frac{\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7}}{\cos \frac{5\pi}{7}} + \frac{\cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7}}{\cos \frac{\pi}{7}} + \frac{\cos \frac{5\pi}{7} + \cos \frac{\pi}{7}}{\cos \frac{3\pi}{7}} = -1.$$

Bài toán 4.45. Áp dụng tính chất 1.10 vào phương trình (2.49) ta được

$$\cos^2 \frac{\pi}{7} \cos^2 \frac{3\pi}{7} + \cos^2 \frac{3\pi}{7} \cos^2 \frac{5\pi}{7} + \cos^2 \frac{5\pi}{7} \cos^2 \frac{\pi}{7} = \frac{3}{8}.$$

Bài toán 4.46. Áp dụng tính chất 1.11 vào phương trình (2.49) ta được

$$\cos^4 \frac{\pi}{7} + \cos^4 \frac{3\pi}{7} + \cos^4 \frac{5\pi}{7} = \frac{13}{16}.$$

Bài toán 4.47. Áp dụng tính chất 1.12 vào phương trình (2.49) ta được

$$(k + l \cos \frac{\pi}{7})(k + l \cos \frac{3\pi}{7})(k + l \cos \frac{5\pi}{7}) = k^3 + \frac{1}{2}k^2l - \frac{1}{2}kl^2 - \frac{1}{8}l^3.$$

Với k, l là hai số thực bất kì.

Bài toán 4.48. Áp dụng tính chất 1.13 vào phương trình (2.49) ta được

$$\frac{1}{\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{3\pi}{7}} + \frac{1}{\cos \frac{3\pi}{7} \cos \frac{5\pi}{7}} + \frac{1}{\cos \frac{5\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7}} = -4.$$

Bài toán 4.49. Áp dụng tính chất 1.14 vào phương trình (2.49) ta được

$$\frac{\cos \frac{\pi}{7}}{\cos \frac{3\pi}{7} \cos \frac{5\pi}{7}} + \frac{\cos \frac{3\pi}{7}}{\cos \frac{5\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7}} + \frac{\cos \frac{5\pi}{7}}{\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{3\pi}{7}} = -10.$$

Bài toán 4.50. Áp dụng tính chất 1.15 vào phương trình (2.49) ta được

$$\frac{\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{3\pi}{7}}{\cos \frac{5\pi}{7}} + \frac{\cos \frac{3\pi}{7} \cos \frac{5\pi}{7}}{\cos \frac{\pi}{7}} + \frac{\cos \frac{5\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7}}{\cos \frac{3\pi}{7}} = -3.$$

Bài toán 4.51. *Áp dụng tính chất 1.16 vào phương trình (2.49) ta được*

$$\frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{7}} + \frac{1}{\cos^2 \frac{3\pi}{7}} + \frac{1}{\cos^2 \frac{5\pi}{7}} = 24.$$

Bài toán 4.52. *Áp dụng tính chất 1.17 vào phương trình (2.49) ta được*

$$\left(\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{3\pi}{7}\right)^2 + \left(\cos \frac{3\pi}{7} - \cos \frac{5\pi}{7}\right)^2 + \left(\cos \frac{5\pi}{7} - \cos \frac{\pi}{7}\right)^2 = \frac{7}{2}.$$

Bài toán 4.53. *Áp dụng tính chất 1.18 vào phương trình (2.49) ta được*

$$\frac{1}{\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7}} + \frac{1}{\cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7}} + \frac{1}{\cos \frac{5\pi}{7} + \cos \frac{\pi}{7}} = 2.$$

Kết luận

Bất đẳng thức nói chung và bất đẳng thức tam giác nói riêng là một đề tài khó và tương đối rộng lớn. Và đã có nhiều tác giả nghiên cứu về đề tài này cũng như có nhiều công cụ để giải quyết một bài toán bất đẳng thức tam giác. Tuy nhiên, trong luận văn này tác giả trình bày một công cụ tương đối mới để giải quyết một bài toán bất đẳng thức tam giác. Luận văn đã đạt được một số kết quả sau:

Trình bày cách giải phương trình bậc ba, các tính chất nghiệm của phương trình bậc ba, đặc biệt là những nhận xét để đưa ra một phương trình bậc ba mới liên quan đến nghiệm của phương trình bậc ba ban đầu.

Trình bày một lớp các phương trình bậc ba mà nghiệm của của phương trình là các yếu tố độ dài trong tam giác, nghiệm của phương trình là các biểu thức lượng giác trong tam giác, nghiệm của phương trình là các cung và góc đặc biệt.

Hệ thống các bất đẳng thức trong tam giác liên quan đến ba biến p, R, r . Trình bày các bài toán nhận dạng tam giác đều, tam giác vuông, tam giác cân.

Trình bày cách thức xây dựng một đẳng thức trong tam giác liên quan đến các yếu tố độ dài trong tam giác, liên quan đến các biểu thức lượng giác, liên quan đến cung và góc đặc biệt.

Cũng như các công cụ toán học khác, phương trình bậc ba và các tính chất nghiệm của phương trình bậc ba không thể giải quyết tất cả các bài toán bất đẳng thức trong tam giác, tuy nhiên nó đưa ra một cách thức mới để chứng minh cũng như xây dựng các đẳng thức và bất đẳng thức trong tam giác.