BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

NGUYỄN VIẾT MINH

GIẢ JACOBIAN VÀ TỐI ƯU LIÊN TỤC

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 60 46 40

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Đà Nẵng - 2011

Công trình được hoàn thành tại
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TS. Phan Nhật Tĩnh

Phản biện 1 : TS. Lê Hải Trung

Phản biện 2 : TS. Hoàng Quang Tuyến

Luận văn được bảo vệ trước Hội đồng chấm Luận văn tốt nghiệp Thạc sĩ khoa học họp tại Đại học Đà Nẵng vào ngày 30 tháng 6 năm 2011.

** Có thể tìm hiểu luận văn tại :*
- Trung tâm Thông tin - Học liệu, Đại học Đà Nẵng
- Thư viện trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng.

Mở đầu

1. Lý do chọn đề tài

Bài toán tối ưu hóa là hình thức là làm tối ưu (nhỏ nhất hoặc lớn nhất) một hàm mục tiêu với các ràng buộc nhất định. Công cụ chính để nghiên cứu bài toán là phép tính vi phân của các hàm khả vi được xây dựng bởi Leibnitz và Newton vào thế kỉ 17. Trong những năm đầu của thế kỉ 21, hai nhà toán học V. Jeyakumar và Đ.T. Luc đã đề xuất khái niệm giả Jacobian như là một mở rộng của khái niệm Jacobian cho các hàm vectơ liên tục. Đây được xem như là một công cụ hiệu quả cho việc nghiên cứu các bài toán tối ưu liên tục. Như vậy, các vấn đề về phép tính các giả Jacobian và các ứng dụng của chúng trong bài toán tối ưu liên tục thực sự là một vấn đề hiện đại trong lý thuyết tối ưu, nó vừa mang tính thời sự, đồng thời lại mang tính kế thừa sâu sắc và đạt đến một trình độ khái quát cao. Từ những lí do đó, chúng tôi quyết định chọn đề tài với tên: **Giả Jacobian và tối ưu liên tục** để tiến hành nghiên cứu.

2. Mục đích nghiên cứu

Mục đích của luận văn là trình bày một cách có hệ thống, các kiến thức cơ bản và quan trọng nhất về giả Jacobian.

Chứng minh chặt chẽ, chi tiết các định lí, mệnh đề về mối quan hệ giữa Jacobian và các loại đạo hàm suy rộng khác đồng thời xét một số ví dụ điển hình của giả Jacobian trong tối ưu hóa.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu: đề tài nghiên cứu về giả Jacobian và tối ưu liên tục

Phạm vi nghiên cứu: nghiên cứu các tài liệu về giải tích lồi, giả Jacobian trong và ngoài nước

4. Phương pháp nghiên cứu

Thu thập các bài báo khoa học, các tài liệu của các tác giả nghiên cứu liên quan đến Giả Jacobian và tối ưu liên tục

Tham khảo thêm các tài liệu liên quan đến đề tài có trên mạng Internet

5. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài

Luận văn đã trình bày một cách có hệ thống về một dạng đạo hàm suy rộng cho lớp các hàm vectơ liên tục, đó là giả Jacobian. Đây là một dạng đạo hàm suy rộng có tính tổng quát cao. Ngoài ra luận văn còn đưa ra các điều kiện cực trị cho các bài toán tối ưu. Do đó, luận văn có thể xem như là một tài liệu tham khảo cho sinh viên sư phạm và hệ cử nhân toán.

6. Cấu trúc của luận văn

Ngoài phần mở đầu và kết luận, luận văn được chia làm 3 chương.

Chương 1 sẽ trình bày những kiến thức cơ bản về giả Jacobian. Trong chương này, ngoài việc chỉ ra các đạo hàm suy rộng thường gặp như Jacobian suy rộng Clarke, dưới vi phân của hàm lồi vô hướng, dưới vi phân Michel-Penot là những trường hợp riêng của giả Jacobian, chúng tôi cũng chứng tỏ rằng dưới vi phân của hàm vectơ lồi cũng là một giả Jacobian của hàm vectơ đó. Đây là kiến thức bổ trợ cho chương 2 và chương 3.

Chương 2 đề cập đến các quy tắc tính toán trong giả Jacobian, định lí giá trị trung bình, khai triển Taylor và một số tính chất cơ bản của nó.

Chương 3 sẽ trình bày các điều kiện cực trị (điều kiện tối ưu cấp một, điều kiện tối ưu cấp hai) cho các bài toán quy hoạch với các ràng buộc khác nhau (ràng buộc đẳng thức, ràng buộc bất đẳng thức,…).

Chương 1

Ma trận giả Jacobian

Trong chương này, chúng ta sẽ nhắc lại một số kiến thức đã biết có liên quan đến giải tích lồi, giải tích vectơ đồng thời nghiên cứu về khái niệm giả Jacobian, một dạng đạo hàm suy rộng của hàm vectơ liên tục. Bố cục chương này như sau. Trong mục 1.1 chúng ta sẽ nhắc lại một số kiến thức đã biết và đưa ra định nghĩa giả Jacobian, sau đó là các tính chất cơ bản của nó. Mục 1.2 nêu lên mối quan hệ giữa giả Jacobian và một số đạo hàm suy rộng khác cũng trong mục này đưa ra khái niệm giả Hessian của hàm vô hướng khả vi liên tục. Các khái niệm giả Jacobian lùi xa và giả Jacobian riêng được nêu ở mục 1.3. Mục 1.4 dành cho việc nghiên cứu một số tính chất của ánh xạ giả Jacobian

1.1. Định nghĩa và một số tính chất cơ bản

Cho $L(\ ^n,\ ^m)$ là không gian ma trận thực cấp $m\times n$, mỗi ma trận M là một toán tử tuyến tính từ $\ ^n \to\ ^m$, vì vậy với mỗi vectơ $x\in\ ^n$ có một ma trận $M(x)\in\ ^m$. Ma trận chuyển vị của M kí hiệu là M^{tr} và cũng coi như là một toán tử tuyến tính từ $\ ^m \to\ ^n$, đôi khi ta viết vM, với $v\in\ ^m$ thay vì viết $M^{tr}(v)$. Chúng ta trang bị trên $L(\ ^n,\ ^m)$ với chuẩn tuyến tính như sau

$$\|M\| = \underset{\|x\|\le 1}{Sup}\ \| M(x) \|.$$

Chuẩn ở đây tương đương với chuẩn Euclide

$$\|M\| = \sqrt{\|M_1\|^2 + \|M_2\|^2 + ... + \|M_n\|^2}\ ,$$

trong đó $M_1, M_2, \dots, M_n \in\ ^m$ là n cột của ma trận M. Hình cầu đóng đơn vị của không gian $L(\ ^n,\ ^m)$ được kí hiệu bằng B_{mn} .

Cho $\phi:\ ^n \to\ $ là một hàm số và $x,u\in\ ^n$. Đạo hàm theo hướng Dini trên của ϕ tại x theo hướng u kí hiệu $\phi^+(x,\ u)$, được xác định bởi

$$\phi^+(x,\ u) = \lim_{t\downarrow 0}\ \sup \frac{\phi(x+tu)-\phi(x)}{t}.$$

Tương tự như vậy, đạo hàm theo hướng Dini dưới của ϕ tại x theo hướng u kí hiệu $\phi^-(x,\ u)$; được xác định bởi

$$\phi^-(x,\ u) = \lim_{t\downarrow 0}\ \inf \frac{\phi(x+tu)-\phi(x)}{t}.$$

Các giới hạn trên có thể nhận giá trị thực mở rộng $-\infty$ và $+\infty$. Khi $\phi^+(x,\ u) = \phi^-(x,\ u)$, thì các giá trị đó được kí hiệu chung là $\phi^{/}(x,\ u)$ và gọi là đạo hàm theo hướng của ϕ tại x theo hướng u. Nếu điều này đúng với mọi hướng u thì hàm ϕ được gọi là khả vi theo hướng tại x.

1.1.1. Giả Jacobian

Định nghĩa 1.1.1. *Cho $f:\ ^n \to\ ^m$ là hàm vectơ liên tục. Tập đóng $\partial f(x) \subseteq L(\ ^n,\ ^m)$ gồm các ma trận cấp $m\times n$ được gọi là giả Jacobian của f tại x nếu với mọi $u\in\ ^n$ và với mọi $v\in\ ^m$, ta có*

$$(vf)^+(x,\ u) \le \sup_{M\in\partial f(x)} \langle v,\ M(u)\rangle. \qquad (1.1)$$

trong đó vf là hàm thực xác định bởi $vf := \langle v,\ f\rangle = \sum_{i=1}^{m} v_i f_i$.

Mỗi phần tử của $\partial f(x)$ được gọi là một ma trận giả Jacobian của f tại x. Nếu dấu đẳng thức ở (1.1) xảy ra thì $\partial f(x)$ được gọi là giả Jacobian chính quy của f tại x.

Mệnh đề 1.1.2. (*i*) *Một tập đóng $\partial f(x) \subseteq L(\ ^n,\ ^m)$ là một ma trận giả Jacobian của f tại x nếu và chỉ nếu với mọi $u\in\ ^n$ và với mọi $v\in\ ^m$, ta có*

$$(vf)^-(x;u) \ge \inf_{M\in\partial f(x)} \langle v,\ M(u)\rangle. \qquad (1.2)$$

(*ii*) *Nếu $\partial f(x) \subseteq L(\ ^n,\ ^m)$ là giả Jacobian của f tại x, thì mọi tập con đóng $A \subseteq L(\ ^n,\ ^m)$ chứa $\partial f(x)$ đều là giả Jacobian của*

f tại x.

(iii) Nếu $\left\{\partial_i f(x)\right\}_{i=1}^{\infty} \subseteq L({}^n, {}^m)$ *là một dãy giảm các giả Jacobian bị chặn của* f *tại* x, *thì* $\bigcap_{i=1}^{\infty} \partial_i f(x)$ *cũng là một giả Jacobian của* f *tại* x.

1.1.2. Đạo hàm Gâteaux, đạo hàm Fréchet và đạo hàm chặt

Giả sử rằng $f: {}^n \to {}^m$, ta nói rằng f khả vi Gâteaux tại x nếu có một ma trận M cấp $m \times n$ sao cho với mọi $u \in {}^n$, ta có

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x+tu) - f(x)}{t} = M(u).$$

Khi đó M được gọi là đạo hàm Gâteaux của f tại x.

Nếu f khả vi Gâteaux tại x thì đạo hàm Gâteaux M của nó trùng với ma trận Jacobian $\nabla f(x)$ của f tại x.

Khi ma trận M thỏa mãn $\lim_{u \to 0} \frac{f(x+u) - f(x) - M(u)}{\|u\|} = 0$. Nó được gọi là đạo hàm Fréchet của f tại x và f gọi là khả vi Fréchet tại x.

Mệnh đề 1.1.3. *Cho* $f: {}^n \to {}^m$ *là hàm vectơ liên tục, khả vi Gâteaux tại* x, *khi đó* $\{\nabla f(x)\}$ *là một giả Jacobian của* f *tại* x. *Ngược lại, nếu* f *là một giả Jacobian tại* x *chỉ gồm một phần tử thì* f *khả vi Gâteaux tại điểm đó và đạo hàm Gâteaux của nó trùng với ma trận giả Jacobian này.*

Mệnh đề 1.1.4. *Cho* $f: {}^n \to {}^m$ *là hàm vectơ liên tục, khả vi Gâteaux tại* x *và* $\partial f(x)$ *là một giả Jacobian bị chặn của* f *tại* x, *khi đó với mỗi* $v \in {}^m$ *có ma trận* M *của bao lồi* $\mathrm{co}\partial f(x)$ *sao cho* $[\nabla f(x)]^{tr}(v) = M^{tr}(v)$. *Trong trường hợp riêng khi m = 1 ta có* $\nabla f(x) \in \mathrm{co}\partial f(x)$.

1.1.3. Jacobian suy rộng Clarke

Hàm $\phi: {}^n \to$ được gọi là Lipschitz gần x nếu tồn tại lân cận U của x và một hằng số $k > 0$ sao cho

$$\|\phi(x_1) - \phi(x_2)\| \le k\|x_1 - x_2\| \quad \text{với mọi } x_1, x_2 \in U$$

Cho $u \in {}^n$, đạo hàm Clarke theo hướng của hàm số ϕ tại x theo hướng u được ký hiệu $\phi^{o}(x;u)$ và xác định bằng

$$\phi^{o}(x;\, u) := \lim_{t \downarrow 0} \sup_{x' \to x} \frac{\phi(x' + tu) - \phi(x')}{t}.$$

Dưới vi phân Clarke của ϕ tại x được kí hiệu $\partial^C \phi(x)$ và xác định bởi

$$\partial^C \phi(x) = \left\{\xi \in {}^n : \langle \xi, u \rangle \le \phi^{o}(x;u),\ \text{với } u \in {}^n\right\}.$$

Một chú ý của tính chất dưới vi phân này là một tập lồi, compact trong ^{n} và $\phi^{o}(x;u)$ thỏa mãn $\phi^{o}(x;u) = \max_{\xi \in \partial^C \phi(x)} \langle \xi, u \rangle$ với mọi $u \in {}^n$.

Giả sử $f: {}^n \to {}^m$ là hàm Lipschitz gần x. Khi đó Jacobian suy rộng Clarke của f tại x, kí hiệu là $\partial^C f(x)$ và xác định bởi

$$\partial^C f(x) := \mathrm{co}\left\{\lim_{i \to \infty} \nabla f(x_i) : x_i \in \Omega, x_i \to x\right\},$$

trong đó Ω là tập tất cả các điểm của U mà tại đó f khả vi.

Tập hợp $\partial^B f(x) := \left\{\lim_{i \to \infty} \nabla f(x_i) : x_i \in \Omega, x_i \to x\right\}$,

được gọi là B-dưới vi phân của f tại x.

Mệnh đề 1.1.5. *Cho* $f: {}^n \to {}^m$ *là hàm Lipschitz gần x. Khi đó Jacobian suy rộng Clarke* $\partial^C f(x)$ *của* f *tại x là một giả Jacobian của* f *tại điểm này.*

1.2. Giả vi phân và giả Hessian của những hàm vô hướng

Định nghĩa 1.2.1. *Cho* $f: {}^n \to$ *là hàm liên tục. Ta nói rằng tập con đóng* $\partial f(x) \subseteq {}^n$ *là một giả vi phân của hàm* f *tại x nếu xem như một tập con của* $L({}^n,)$ *thì nó là một giả Jacobian của* f *tại x.*

Như vậy $\partial f(x)$ là một giả vi phân của hàm f tại x khi và chỉ khi

$$f^{+}(x,u) \le \sup_{\xi \in \partial f(x)} \langle \xi, u \rangle \ \text{ và } \ f^{-}(x,u) \ge \inf_{\xi \in \partial f(x)} \langle \xi, u \rangle, \quad \forall u \in {}^n.$$

1.2.1. Dưới vi phân của hàm lồi

Cho $f: {}^n \to \cup\{\infty\}$ là một hàm vô hướng có giá trị thực mở rộng. Miền xác định hữu hiệu của f là tập

$$dom(f)=\left\{x\in\mathbb{R}^n : f(x)<+\infty\right\}$$

và trên đồ thị của nó là một tập hợp

$$epi(f)=\left\{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R} : f(x)\le t\right\}.$$

Dưới vi phân của f (theo định nghĩa của giải tích lồi) là một tập

$$\partial^{ca} f(x)=\left\{\xi\in\mathbb{R}^n : \langle\xi,u\rangle\le f'(x;u),\ \text{với mọi } u\in\mathbb{R}^n\right\}.$$

Mệnh đề 1.2.2. *Cho f là hàm lồi, x_0 là một điểm trong của miền xác định hữu hiệu của f, khi đó*

i) f Lipschitz gần x_0.

ii) Đạo hàm theo hướng của hàm f tại x_0 theo hướng $u\in\mathbb{R}^n$ tồn tại và được xác định bởi

$$f'(x_0;u)=\lim_{t\downarrow 0}\frac{f(x_0+tu)-f(x_0)}{t}=\inf_{t>0}\frac{f(x_0+tu)-f(x_0)}{t}.$$

Mệnh đề 1.2.3. *Giả sử rằng $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ là một hàm lồi và cho x là điểm thuộc miền xác định hữu hiệu của f. Dưới vi phân $\partial^{ca} f(x)$ của f tại x trùng với tập của vectơ $\xi\in\mathbb{R}^n$ xác định*

$$\langle\xi,u\rangle\le f(x+u)-f(x),\ \text{với mọi } u\in\mathbb{R}^n.$$

Dưới vi phân này cũng trùng với dưới vi phân của Clarke. Do đó dưới vi phân $\partial^{ca} f(x)$ cũng là một giả vi phân của f tại x.

1.2.2. Dưới vi phân Michel-Penot

Cho $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ là hàm liên tục. Đạo hàm theo hướng Michel-Penot trên của f tại x theo hướng u được xác định bởi

$$f^{\circ}(x;u):=\sup_{z\in\mathbb{R}^n}\limsup_{t\downarrow 0}\frac{f(x+tz+tu)-f(x+tz)}{t}$$

và đạo hàm theo hướng Michel-Penot dưới của f tại x theo hướng u được xác định bởi

$$f_{\circ}(x;u):=\inf_{z\in\mathbb{R}^n}\liminf_{t\downarrow 0}\frac{f(x+tz+tu)-f(x+tz)}{t}.$$

Dưới vi phân Michel-Penot của f tại x là tập hợp

$$\partial^{MP} f(x):=\left\{\xi\in\mathbb{R}^n : f^{\circ}(x;u)\ge\langle\xi,u\rangle\ \text{với mọi } u\in\mathbb{R}^n\right\}.$$

Mệnh đề 1.2.4. *Cho $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ là một hàm Lipschitz gần x. Khi đó tập hợp $\partial^{MP} f(x)$ là một giả vi phân của hàm f tại điểm này.*

1.2.3. Giả Hessian

Định nghĩa 1.2.5. *Cho $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ là hàm khả vi liên tục. Ánh xạ đạo hàm ∇f là hàm vectơ liên tục từ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}^n$. Tập con đóng $\partial^2 f(x)\subseteq L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ gồm các ma trận vuông cấp n được gọi là một giả Hessian của hàm f tại x nếu nó là một giả Jacobian của ∇f tại điểm này.*

Giả Hessian cũng có các tính chất như giả Jacobian.

Mệnh đề 1.2.6. *Cho $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ là hàm khả vi liên tục. Khi đó*

(*i*) *Nếu $\partial^2 f(x)\subseteq L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ là một giả Hessian của hàm f tại x, thì mọi tập con đóng $A\subseteq L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ chứa $\partial^2 f(x)$ là một giả Hessian của hàm f tại x.*

(*ii*) *Nếu f là khả vi Gâteaux hai lần tại x thì ma trận $\left\{\nabla^2 f(x)\right\}$ là một giả Hessian của hàm f tại x. Hơn nữa, f là khả vi Gâteaux hai lần tại x nếu và chỉ nếu nó có một giả Hessian chỉ gồm một phần tử tại x.*

1.3. Ma trận giả Jacobian lùi xa và giả Jacobian riêng

1.3.1. Ma trận giả Jacobian lùi xa

Cho $A\subseteq\mathbb{R}^n$ là một tập không rỗng. Nón lùi xa của tập hợp *A* kí hiệu A_∞ và được xác định bởi

$$A_\infty:=\left\{\lim t_i a_i : a_i\in A, t_i\downarrow 0\right\}.$$

Mỗi phần tử của A_∞ gọi là một hướng lùi xa của tập hợp A.

Giả sử rằng $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ là hàm vectơ liên tục. Cho $\partial f(x)$ là giả Jacobian của f tại *x*. Khi đó nón lùi xa của $\partial f(x)$, kí hiệu là $\left(\partial f(x)\right)_\infty$

được gọi là giả Jacobian lùi xa của f tại x. Mỗi phần tử của $\left(\partial f\left(x\right)\right)_\infty$ được gọi là một ma trận giả Jacobian lùi xa của f tại x.

Mệnh đề 1.3.1.

Bổ đề 1.3.2.

Bây giờ giả sử rằng $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ liên tục. Gọi $\partial f\left(x\right)$ là giả Jacobian của hàm f tại x. Khi đó $\left(\partial f\left(x\right)\right)_\infty$ biểu thị như một nón lùi xa của $\partial f\left(x\right)$. Phần tử của $\left(\partial f\left(x\right)\right)_\infty$ gọi là ma trận lùi xa của $\partial f\left(x\right)$.

Mệnh đề 1.3.3. *Giả sử rằng $\partial f\left(x\right)$ là một giả Jacobian của hàm f tại x. Khi đó (i) $\partial f\left(x\right)$ bị chặn nếu và chỉ nếu $\left(\partial f\left(x\right)\right)_\infty = \{0\}$;*

(ii) Nếu $\partial f\left(x\right)$ là tập lồi thì $\partial f\left(x\right) = \partial f\left(x\right) + \left(\partial f\left(x\right)\right)_\infty$;

(iii) Nếu $\partial f\left(x\right)$ là tập lồi và $0 \in \partial f\left(x\right)$ thì $\left(\partial f\left(x\right)\right)_\infty \subset \partial f\left(x\right)$.

1.3.2. Giả Jacobian riêng

Giả sử rằng $f:\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}\to\mathbb{R}^m$ là một hàm vectơ liên tục theo cả hai biến $(x,y)\in\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}$. Giả Jacobian $\partial_x f\left(x,y\right)\subset L\left(\mathbb{R}^{n_1},\mathbb{R}^m\right)$ của hàm $x\to f\left(x,y\right)$ với $y\in\mathbb{R}^{n_2}$ không đổi được gọi là giả Jacobian riêng của f tại (*x,y*) theo biến *x*, và $\partial_y f\left(x,y\right)\subset L\left(\mathbb{R}^{n_2},\mathbb{R}^m\right)$ của hàm $y\to f\left(x,y\right)$ được gọi là giả Jacobian riêng của f tại (*x,y*) theo biến *y*.

Cho tập con $Q\subset L\left(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2},\mathbb{R}^m\right)$, ta kí hiệu

$$\mathrm{Proj}_x Q := \left\{M\in L\left(\mathbb{R}^{n_1},\mathbb{R}^m\right): \text{sao cho } \exists N\in\left(\mathbb{R}^{n_2},\mathbb{R}^m\right),(MN)\in Q\right\},$$
$$\mathrm{Proj}_y Q := \left\{N\in L\left(\mathbb{R}^{n_2},\mathbb{R}^m\right): \text{sao cho } \exists M\in\left(\mathbb{R}^{n_1},\mathbb{R}^m\right),(MN)\in Q\right\}.$$

Mệnh đề 1.3.4. *Cho $f:\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}\to\mathbb{R}^m$ là một hàm vectơ liên tục. Nếu $\partial f\left(x,y\right)\subset L\left(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2},\mathbb{R}^m\right)$ là một giả Jacobian của hàm f tại (x,y) thì $\mathrm{Proj}_x\partial f\left(x,y\right)$ là một giả Jacobian riêng của f tại (x,y) theo biến x, và $\mathrm{Proj}_y\partial f\left(x,y\right)$ là một giả Jacobian riêng của f tại (x,y) theo biến y.*

Mệnh đề 1.3.5. *Cho $f:\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}\to\mathbb{R}^m$ là một hàm vectơ liên tục và cho $\partial f\left(x,y\right)\subset L\left(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2},\mathbb{R}^m\right)$ là một giả Jacobian của f tại (x,y). Khi đó ta có* $\mathrm{Proj}_x\left(\partial f\left(x,y\right)\right)_\infty \subset \left(\mathrm{Proj}_x\partial f\left(x,y\right)\right)_\infty$;

$$\mathrm{Proj}_y\left(\partial f\left(x,y\right)\right)_\infty \subset \left(\mathrm{Proj}_y\partial f\left(x,y\right)\right)_\infty.$$

1.4. Ánh xạ giả Jacobian nửa liên tục trên

1.4.1. Ánh xạ đa trị nửa liên tục trên

Một ánh xạ đa trị F từ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}^m$, kí hiệu là $F:\mathbb{R}^n\rightrightarrows\mathbb{R}^m$ là một ánh xạ từ $\mathbb{R}^n$ vào họ tất cả các tập con của $\mathbb{R}^m$

Đồ thị của ánh xạ đa trị F là tập hợp $\mathrm{graph}\left(F\right)\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ được xác định bởi $\mathrm{graph}\left(F\right):=\left\{\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m : y\in F\left(x\right)\right\}$.

Tập hợp $\mathrm{Im}\left(F\right):=\bigcup_{x\in\mathbb{R}^n} F\left(x\right)$, được gọi là ảnh của ánh xạ đa trị *F*.

F được gọi là bị chặn địa phương tại $x\in\mathbb{R}^n$ nếu tồn tại lân cận *U* của *x* sao cho tập hợp $F\left(U\right)=\bigcup_{x\in U}F\left(x\right)$ là tập bị chặn.

Ánh xạ đa trị *F* được gọi là nửa liên tục trên tại *x* nếu với mọi $\varepsilon>0$, tồn tại số $\delta>0$ sao cho

$$F\left(x+\delta B_n\right)\subseteq F\left(x\right)+\varepsilon B_m.$$

Khi *F* là ánh xạ đơn trị thì tính nửa liên tục trên theo định nghĩa trên chính là tính liên tục theo nghĩa thông thường.

Cho $F:\mathbb{R}^n\rightrightarrows\mathbb{R}^m$ là một ánh xạ đa trị. Giới hạn trên Kuratowski-Painleve của *F* tại *x* được xác định bởi

$$\limsup_{x'\to x} F\left(x'\right) := \left\{\lim y_i : y_i\in F\left(x_i\right), x_i\to x \text{ khi } i\to\infty\right\}.$$

Giới hạn trên này được kí hiệu $F\left(x\right)$. Từ các định nghĩa trên cho ta thấy rằng $F\left(x\right)$ là một tập đóng.

Mệnh đề 1.4.1. *Cho $F:\mathbb{R}^n\rightrightarrows\mathbb{R}^m$ là một ánh xạ đa trị nhận giá trị compact và nửa liên tục trên. Khi đó nếu A là một tập compact trong $\mathbb{R}^n$ thì $F\left(A\right)=\bigcup_{x\in A}F\left(x\right)$ cũng là tập compact trong $\mathbb{R}^m$.*

Mệnh đề 1.4.2. *Giả sử rằng F là bị chặn địa phương tại x, khi đó ánh xạ đa trị G xác định bởi*

$$G(x')=\begin{cases} F(x') & \text{nếu } x'\neq x \\ F(x) & \text{nếu } x'=x \end{cases}$$

là nửa liên tục trên tại x. Hơn nữa, nếu F bị chặn địa phương thì ánh xạ đa trị F là nhỏ nhất theo quan hệ bao hàm trong lớp các ánh xạ đa trị nửa liên tục trên nhận giá trị đóng và chứa F.

1.4.2. Ánh xạ giả Jacobian

Định nghĩa 1.4.3. *Cho $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ là một hàm vectơ liên tục và $\partial f(x)$ là một giả Jacobian cho trước của f tại x, với mọi $x\in\mathbb{R}^n$. Khi đó ánh xạ đa trị $x\mapsto\partial f(x)$ được gọi là ánh xạ giả Jacobian của f.*

Định lí 1.4.4. *Cho ∂f là một ánh xạ giả Jacobian của f. Khi đó các khẳng định sau đúng. (i)Nếu ∂f là bị chặn địa phương tại x thì ánh xạ giả Jacobian $\mathrm{l} f$ xác định bởi*

$$\mathrm{l} f(x')=\begin{cases} \partial f(x') & \text{nếu } x'\neq x \\ \partial f(x) & \text{nếu } x'=x \end{cases}$$

là nửa liên tục trên tại x.

(ii) Nếu ∂f là bị chặn địa phương, thì ∂f là nhỏ nhất trong tất cả các ánh xạ giả Jacobian nửa liên tục trên chứa ∂f.

Mệnh đề 1.4.5. *Cho $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ là Lipschitz địa phương . Nếu ∂f là một ánh xạ giả Jacobian nửa liên tục trên của f sao cho $\nabla f(x)\in\partial f(x)$ khi ∇f tồn tại, khi đó $\partial^B f(x)\subseteq\partial f(x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}^n$.*

Chương 2

Các quy tắc tính toán trên giả Jacobian

2.1. Quy tắc cơ bản

2.1.1. Tích vô hướng và tổng

Định lí 2.1.1. *Cho f và $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ là các hàm vectơ liên tục. Nếu $\partial f(x)$ và $\partial g(x)$ lần lượt là các giả Jacobian của f và g tại x thì*

(i) $\alpha\partial f(x)$ là giả Jacobian của f tại x với mọi $\alpha\in\mathbb{R}$;

(ii) $cl\left(\partial f(x)+\partial g(x)\right)$ là giả Jacobian của $f+g$ tại x.

Mệnh đề 2.1.2. *Giả sử rằng f và g là hai hàm Lipschitz địa phương từ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}$. Khi đó với mỗi $x\in\mathbb{R}^n$, ta có*

$$\partial^C(f+g)(x)\subseteq\partial^C f(x)+\partial^C g(x).$$

2.1.2. Tích Decartes

Với hàm vectơ $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ và $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^l$, kí hiệu $f\times g$ được sử dụng để chỉ hàm vectơ từ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}^{m+l}$, xác định bởi

$$(f\times g)(x)=\left(f(x),g(x)\right).$$

Định lí 2.1.3. *Cho $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ và $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^l$ là các hàm vectơ liên tục. Nếu $\partial f(x)\subseteq L\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m\right)$ và $\partial g(x)\subseteq L\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^l\right)$ lần lượt là các giả Jacobian của hàm f và g tại x thì $\partial f(x)\times\partial g(x)$ cũng là giả Jacobian của hàm $f\times g$ tại x.*

2.1.3. Tích và thương

Định lí 2.1.4. *Cho $f,g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ là hàm liên tục. Cho $\partial f(x)$ và $\partial g(x)$ lần lượt là các giả vi phân của f và g tại x. Nếu một trong các tập $\partial f(x)$ và $\partial g(x)$ bị chặn hoặc ít nhất một trong các giá trị $f(x)$ và $g(x)$ khác không khi cả hai tập $\partial f(x)$ và $\partial g(x)$ không bị chặn, thì bao đóng của tập hợp $f(x)\partial g(x)+g(x)\partial f(x)$ là giả vi phân của hàm tích fg tại x.*

Định lí 2.1.5. *Cho* $f,g: {}^n \to$ *là hàm liên tục với* $g(x)\neq 0$. *Cho* ∂f, ∂g *lần lượt là các giả vi phân của* f và g *tại x. Khi đó bao đóng của tập* $\dfrac{g(x)\partial f(x)-f(x)\partial g(x)}{g^2(x)}$*,là giả vi phân của hàm thương* $\dfrac{f}{g}$ *tại x.*

Mệnh đề 2.1.6. *Cho* $f,g: {}^n \to$ *là hàm Lipschitz địa phương. Thì ta có*

$$\partial^C(fg)(x)\subseteq f(x)\partial^C g(x)+g(x)\partial^C f(x)$$

$$\partial^C(f/g)(x)\subseteq \frac{g(x)\partial^C f(x)+f(x)\partial^C g(x)}{g^2(x)},\ \text{khi}\ g(x)\neq 0.$$

2.1.4. Hàm max và hàm min

Định nghĩa 2.1.7. *Cho* f_i, $i=1,\dots,k$ *là các hàm liên tục trên* ^{n}. *Khi đó hàm max và hàm min của chúng là các hàm* f và $g: {}^n \to$ *lần lượt được xác định như sau:* $f(x):=\max\{f_i(x): i=1,\dots,k\}$ *và* $g(x):=\min\{f_i(x): i=1,\dots,k\}$.

Kí hiệu $I(x)$ *là tập của tất cả các chỉ số* $i\in\{1,\dots,k\}$ *sao cho* $f_i(x)=f(x)$ *và* $J(x)$ *là tập của tất cả các chỉ số* $j\in\{1,\dots,k\}$, *sao cho* $f_j(x)=g(x)$.

Định lí 2.1.8. *Giả sử rằng* $\partial f_1(x),\dots,\partial f_k(x)$ *lần lượt là giả vi phân của hàm* $f_1,\dots,f_k$ *tại x. Thì* $\bigcup_{i\in I(x)}\partial f_i(x)$ *là một giả vi phân của hàm* f *tại x.*

Mệnh đề 2.1.9. *Giả sử rằng* $f_1,\dots,f_n$ *là hàm Lipschitz địa phương. Khi đó*

$$\partial^C f(x)\subseteq \mathrm{co}\left(\bigcup_{i\in I(x)}\partial^C f_i(x)\right).$$

2.2. Định lí giá trị trung bình và khai triển Taylor

2.2.1. Định lí giá trị trung bình

Định lí 2.2.1. *Cho* $a,b\in {}^n$ *và cho* $f: {}^n\to {}^m$ *là hàm vectơ liên tục. Giả sử rằng với mỗi* $x\in[a,b]$, $\partial f(x)$ *là một giả Jacobian của hàm* f *tại x. Khi đó* $f(b)-f(a)\in\overline{\mathrm{co}}\{\partial f([a,b])(b-a)\}$,

ở đây $\partial f([a,b])(b-a)=\{M(b-a): M\in\partial f(x), x\in[a,b]\}$.

Mệnh đề 2.2.2. *Cho* a, $b\in {}^n$ *và* $f: {}^n\to {}^m$ *là hàm vectơ liên tục, giả sử* ∂f *là ánh xạ giả Jacobian bị chặn và nửa liên tục trên của* f *trên đoạn* $[a,b]$. *Khi đó* $f(b)-f(a)\in\{\mathrm{co}\partial f([a,b])\}(b-a)$.

Mệnh đề 2.2.3. *Cho* $a,b\in {}^n$ *và* $f: {}^n\to {}^m$ *là hàm Lipschitz địa phương. Khi đó* $f(b)-f(a)\in\{\mathrm{co}\partial^C f([a,b])\}(b-a)$.

Mệnh đề 2.2.4. *Cho* $a,b\in {}^n$ *và* $f: {}^n\to$ *là hàm liên tục. Giả sử rằng với mỗi* $x\in[a,b]$, $\partial f(x)$ *là một giả vi phân của* f *tại x. Khi đó tồn tại* $c\in(a,b)$ *và dãy* $\{\xi_k\}\subset\mathrm{co}(\partial f(c))$ *sao cho*

$$f(b)-f(a)=\lim_{k\to\infty}\langle\xi_k, b-a\rangle.$$

2.2.2. Đặc trưng của hàm Lipschitz địa phương

Như phần trước đã nêu, ánh xạ đa trị $G: {}^n\rightrightarrows \mathrm{L}({}^n, {}^m)$ được gọi là bị chặn địa phương tại *x* nếu tồn tại một lân cận U của *x* và một số dương α sao cho $\|A\|\le\alpha$, với mọi $A\in G(U)$. Rõ ràng, nếu G là nửa liên tục trên tại *x* và bị chặn, thì G là bị chặn địa phương tại *x*.

Mệnh đề 2.2.5. *Cho* $f: {}^n\to {}^m$ *là hàm vectơ liên tục. Khi đó* f *có một ánh xạ giả Jacobian bị chặn địa phương tại x nếu và chỉ nếu* f *Lipschitz gần x.*

2.2.3. Khai triển Taylor

Định lí 2.2.6. *Cho* $f: {}^n\to$ *là hàm khả vi liên tục trên* ^{n} *và* $x,y\in {}^n$. *Giả sử với mỗi* $z\in[x,y]$, $\partial^2 f(z)$ *là giả Hessian của* f *tại điểm này. Khi đó tồn tại* $c\in(x,y)$ *sao cho*

$$f(y)\in f(x)+\langle\nabla f(x), y-x\rangle+\frac{1}{2}\overline{\mathrm{co}}\langle\partial^2 f(c)(y-x), y-x\rangle.$$

Hệ quả 2.2.7. *Cho* $f: {}^n\to$ *là hàm khả vi liên tục trên* ^{n} *và* $x,y\in {}^n$. *Giả sử với mỗi* $z\in[x,y]$, $\partial^2 f(z)$ *là giả Hessian lồi của* f *tại điểm này. Khi đó tồn tại* $c\in(x,y)$ *và* $M\in\partial^2 f(c)$ *sao cho*

$$f(y)=f(x)+\langle\nabla f(x), y-x\rangle+\frac{1}{2}\langle M(y-x), y-x\rangle.$$

Chương 3
Một số ứng dụng giả Jacobian trong tối ưu

Trong chương này, sử dụng các kết quả của những chương trước để nêu lên điều cần cực trị của các hàm vectơ liên tục. Bố cục chương này bao gồm các mục như sau. Mục 3.1 nêu lên các định lí điều kiện cần để hàm vectơ đạt cực trị địa phương. Mục 3.2 điều kiện tối ưu cấp một sẽ được đưa ra đối với bài toán tối ưu với dữ kiện là một hàm vectơ liên tục. Mục 3.3 dành cho việc nêu lên điều kiện tối ưu cấp hai cho bài toán tối ưu với dữ kiện là khả vi liên tục.

3.1. Điều kiện cần của cực trị của hàm vectơ liên tục

Cho $f : {}^n \to$ là hàm vectơ liên tục. Điểm x_0 được gọi là cực tiểu địa phương của f nếu có một lân cận U của x_0 trong ^{n} sao cho $f(x) \geq f(x_0)$ với mọi $x \in U$.

Sau đây là một số điều kiện cần cho cực tiểu địa phương.

Định lí 3.1.1. *Nếu x_0 là cực tiểu địa phương của f và $\partial f(x_0)$ là một giả vi phân của f tại x_0, thì*

$$0 \in \overline{\text{co}} \partial f(x_0).$$

Mệnh đề 3.1.2. *Nếu x_0 là cực tiểu địa phương của f, thì*

(i) $\nabla f(x_0) = 0$, khi f là hàm khả vi Gâteux tại x_0;

(ii) $0 \in \partial^{MP} f(x_0)$, khi f là hàm Lipschitz địa phương tại x_0.

Định lí 3.1.3. *Cho C là một tập lồi khác rỗng trong ^{n} và cho $f : {}^n \to$ là hàm vectơ liên tục. Nếu $x \in C$ là điểm cực tiểu địa phương của f trên C và $\partial f(x)$ là một giả vi phân của f tại x, thì*

$$\sup_{\xi \in \partial f(x)} \langle \xi, u \rangle \geq 0, \ \forall u \in T(C, x).$$

Trong đó $T(C,x) = \text{cl}\{t(c-x) : c \in C,\ t \geq 0\}$ là nón tiếp xúc của C tại x_0.

3.2. Điều kiện tối ưu cấp một

3.2.1. Bài toán với ràng buộc đẳng thức

Cho U là một tập con mở trong ^{n}, cho $f, h_1, \ldots h_m : U \to$ là các hàm nhận giá trị thực. Ta xét bài toán quy hoạch với m ràng buộc đẳng thức mà được kí hiệu là (*PE*):

Min $\qquad f(x)$

Với điều kiện $\qquad h_i(x) = 0, i = 1, \ldots, m$,

Hàm vectơ với các thành phần $h_i, h_2, \ldots, h_m$ được kí hiệu h. Hàm *f* được gọi là hàm mục tiêu và tập ràng buộc (hay tập chấp nhận được) của bài toán, kí hiệu là *C* được xác định bởi

$$C = \{x \in U : h_i(x) = 0,\ i = 1, \ldots, m\}.$$

Mỗi phần tử của *C* được gọi là điểm chấp nhận được.

Điểm $\bar{x} \in C$ được gọi là nghiệm địa phương của bài toán (*PE*) nếu tồn tại lân cận *V* của $\bar{x}$ sao cho $f(\bar{x}) \leq f(x)$ với mọi $x \in V \cap C$.

Ta kí hiệu:

$$\tilde{\partial} h(x) := \overline{\text{co}} \partial h(x) \bigcup \text{co}\left(\left(\partial h(x) \right)_\infty \setminus \{0\} \right).$$

Trong đó $\partial h(x)$ là giả Jacobian của *h* tại *x*. Định lí sau cho ta điều kiện cần để một điểm chấp nhận được là nghiệm địa phương của bài toán (PE). Đôi khi điều kiện này còn được xem như là quy tắc nhân tử Lagrange hay điều kiện tối ưu Fritz-John.

Định lí 3.2.1. *Xét bài toán (PE) trong đó f và h là các hàm liên tục trên U. Giả sử thêm rằng hàm $F = (f, h)$ có ∂F là ánh xạ giả jacobian nửa liên tục trên tại $\bar{x} \in U$ và $\bar{x}$ là một nghiệm địa phương của bài toán (PE). Khi đó tồn tại các số $\lambda_0 \geq 0,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ không đồng thời bằng 0 sao cho*

$$0 \in \lambda \circ \left(\overline{\text{co}} \partial F(\bar{x}) \bigcup \text{co}\left(\left(\partial F(\bar{x}) \right)_\infty \setminus \{0\} \right) \right),$$

trong đó $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_m)$.

Mệnh đề 3.2.2. Xét bài toán (PE), cho $F=(f,h)$ là hàm Lipschitz gần $\bar{x}\in U$ và $\bar{x}$ là một nghiệm địa phương của bài toán (PE). Khi đó tồn tại các số $\lambda_0 \geq 0,\ \lambda_1,...\lambda_m$ không đồng thời bằng 0 sao cho

$$0\in \partial^C(\lambda\circ F)(\bar{x}).$$

trong đó $\lambda=(\lambda_0,\lambda_1,...,\lambda_m)$.

Đối với các nhân tử Lagrange mà ở đó thành phần $\lambda_0=0$ sẽ rất ít được quan tâm, vì nó không chứa một thông tin nào có liên quan đến hàm mục tiêu *f*. Chính vì vậy mà người ta cố gắng đưa đến những kết quả mà ở đó nhân tử Lagrange có thành phần λ_0 khác không. Điều kiện để có nhân tử Lagrange như vậy thường được gọi là điều kiện Kuhn-Tucker hay điều kiện chính quy. Mệnh đề sau cho ta một điều kiện chính quy của bài toán (*PE*).

Mệnh đề 3.2.3. *Với các giả thuyết của định lí 3.2.1 và bổ sung thêm giả sử hệ m vectơ lấy từ m dòng cuối của các phần tử của* $\tilde{\partial}F(\bar{x})$ *đều độc lập tuyến tính. Khi đó tồn tại các số* $\lambda_1,...,\lambda_m$ *sao cho*

$$0\in \lambda\circ\tilde{\partial}F(\bar{x}) \quad \textit{với} \quad \lambda=(1,\lambda_1,...,\lambda_m).$$

Ví dụ 3.2.1.

Xét bài toán sau :

Min $\qquad x_3+x_4^2$

Với điều kiện $2x_1^{2/3}\operatorname{sgn}(x_1)+x_2^4-2x_3=0$

$\qquad\qquad 2x_1^{1/3}+x_2^2-\sqrt{2}x_4.$

Cho $f=(f_0,f_1,f_2)$, ở đây

$$f_0(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_3+x_4^2$$
$$f_1(x_1,x_2,x_3,x_4)=2x_1^{2/3}\operatorname{sgn}(x_1)+x_2^4-2x_3=0$$
$$f_2(x_1,x_2,x_3,x_4)=2x_1^{1/3}+x_2^2-\sqrt{2}x_4.$$

Ta đang quan tâm đến điểm *x* = 0, rõ ràng tại đó f liên tục nhưng không Lipschitz . Giả Jacobian của f tại 0 và nón suy thoái tại đó được xác định bằng

$$\partial f(0)=\left\{\begin{pmatrix}0&0&1&0\\2\alpha&0&-2&0\\2\alpha^2&0&0&-\sqrt{2}\end{pmatrix}:\alpha\geq 1\right\},$$

$$(\partial f(0))_\infty=\left\{\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&-2\\\beta&0&0\end{pmatrix}:\beta\geq 0\right\},$$

Do đó,

$$\tilde{\partial}f(0)=\overline{co}\left\{\begin{pmatrix}0&0&1&0\\2\alpha&0&-2&0\\2\alpha^2&0&0&-\sqrt{2}\end{pmatrix}:\alpha\geq 1\right\}\cup\left\{\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&-2\\\beta&0&0\end{pmatrix}:\beta\geq 0\right\}.$$

Rõ ràng, mỗi $M\in\overline{co}\partial f(0)$ có bậc tối đa. Vì vậy $(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2)\circ M\neq 0$, với mọi $(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2)\neq 0$. Nhưng với bất kì ma trận $N\in(\partial f(0))_\infty$, $(1,1,0)\circ N=0$. Do đó theo kết luận của định lí 3.1.1 thì *x* = 0 là một nghiệm tối ưu địa phương của bài toán.

3.2.2. Bài toán với ràng buộc đẳng thức và bất đẳng thức

Trong phần này ta sẽ nghiên cứu bài toán quy hoạch với ràng buộc đẳng thức và bất đẳng thức. Cho $f,g_i,h_j:{}^n\to\ $, $i=1,...,p;$ $j=1,...,q$ là các hàm nhận giá trị thực. Ta xét bài toán sau kí hiệu là (*P*)

Min $\qquad f(x)$

Với điều kiện $\quad g_i(x)\leq 0,\quad i=1,...p$

$\qquad\qquad\quad h_j(x)=0,\quad j=1,...q$

Ta kí hiệu $g=(g_1,...,g_p)$, $h=(h_1,...,h_q)$ và $F=(f,g,h)$. Dưới đây là một quy tắc nhân tử cho bài toán (*P*).

Định lí 3.2.4. *Giả sử* F *liên tục và có ánh xạ giả Jacobian* $\partial F(x)$ *là nửa liên tục trên tại* $\bar{x}\in{}^n$. *Nếu* $\bar{x}$ *là một nghiệm tối ưu địa phương của bài toàn (P), thì tồn tại vectơ khác không* $(\alpha,\beta,\gamma)\in\ \times{}^p\times{}^q$ *trong đó* $\alpha\geq 0,\beta=(\beta_1,...,\beta_p)$ *với* $\beta_i\geq 0$ *sao cho*

$$\beta_i g_i(\bar{x}) = 0, \quad i = 1,\dots,p$$

Và

$$0 \in (\alpha,\beta,\gamma) \circ \left(\overline{\text{co}} \partial F(\bar{x}) \cup \text{co}\left[\left(\partial F(\bar{x}) \right)_\infty \setminus \{0\} \right] \right).$$

Mênh đề 3.2.5. *Giả sử rằng F là Lipschitz địa phương và* $\bar{x}$ *là một nghiệm tối ưu địa phương của bài toán (P). Khi đó tồn tại một vectơ khác không* $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ *trong đó* $\alpha \geq 0$, $\beta = (\beta_1,\dots,\beta_p)$ *với* $\beta_i \geq 0$, $\gamma = (\gamma_1,\dots,\gamma_p)$ *sao cho*

$$\beta_i g_i(\bar{x}) = 0, \; i = 1,\dots,p$$

$$0 \in (\alpha,\beta,\gamma) \circ \partial^C F(\bar{x}).$$

Mênh đề 3.2.6. *Giả sử rằng F là Lipschitz địa phương và* $\bar{x}$ *là nghiệm tối ưu địa phương của bài toán (P). Giả sử rằng thêm rằng các điều kiện sau thỏa mãn.*

(i) Hệ q vectơ lấy từ q dòng cuối của mỗi phần tử của $\tilde{\partial} F(\bar{x})$ *đều độc lập tuyến tính.*

(ii) Với phần tử $M \in \tilde{\partial} F(\bar{x})$ *với các hàng là* $M_0, M_1,\dots, M_{p+q}$, *tồn tại vectơ* $v \in \mathbb{R}^n$ *sao cho*

$$\langle M_i, v \rangle < 0 \text{ nếu } g_i(\bar{x}) = 0, \; i \in \{1,\dots,p\},$$

$$\langle M_i, v \rangle = 0 \text{ với } j = p+1,\dots,p+q.$$

Khi đó tồn tại một vectơ $(\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ *trong đó* $\beta = (\beta_1,\dots,\beta_p)$ *với* $\beta_i \geq 0$, *sao cho*

$$\beta_i g_i = 0, \quad i = 1,\dots,p$$

và $$0 \in (1,\beta,\gamma)\left(\overline{co} \partial F(\bar{x}) \cup co\left[\left(\partial F(\bar{x}) \right)_\infty \setminus \{0\} \right] \right).$$

3.3. Điều kiện tối ưu cấp hai

3.3.1. Điều kiện cần

Cho $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ và $h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$. Ta xét bài toán quy hoạch (*P*) xác định bởi

$$\text{Min} \qquad f(x)$$

$$\text{Với điều kiện} \qquad g(x) \leq 0, \; h(x) = 0.$$

Ta đã biết phần trước rằng nếu f, g và h là các hàm khả vi liên tục và x_0 là một nghiệm tối ưu địa phương của bài toán (*P*), thì điều kiện Fritz John đúng, nghĩa là tồn tại vectơ khác không $(\lambda_0,\lambda,\mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ sao cho

$$\lambda_0 \nabla f(x_0) + \langle \lambda, \nabla g(x_0) \rangle + \langle \mu, \nabla h(x_0) \rangle = 0,$$

$$\lambda_0 \geq 0, \lambda_i \geq 0 \text{ và } \lambda_i g_i(x_0) = 0, i = 1,\dots,p.$$

Khi $\lambda_0 = 1$ ta thu được điều kiện tối ưu Kuhn-Tucker. Cho $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$. Ta kí hiệu

$$L(x) := f(x) + \langle \lambda, g(x) \rangle + \langle \mu, h(x) \rangle,$$

$$X := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0, \langle \lambda, g(x) \rangle = 0 \text{ và h}(x) = 0 \right\},$$

$$T(X,x_0) := \left\{ v \in \mathbb{R}^n : v = \lim t_i (x_i - x_0), x_i \in X, x_i \to x_0, t_i > 0 \right\},$$

$$T_0(X,x_0) := \left\{ v \in \mathbb{R}^n \text{ tồn tại } \delta > 0 \text{ sao cho } x_0 + tv \in X, \; t \in [0,\delta] \right\}.$$

Hàm Lagrange *L* liên kết với nhân tử (λ,μ), tập hợp *X* là tập tất cả các điểm chấp nhận được thỏa mãn $\lambda_i g_i(x) = 0, i = 1,\dots,p$, tập $T(X,x_0)$ là nón tiếp xúc của *X* tại x_0 và tập $T(X,x_0)$ là tập tất cả các hướng chấp nhận được của *X*. Ta thiết lập điều kiện tối ưu cấp hai cho bài toán (*P*). Các điều kiện này sẽ được biểu diễn bằng cách sử dụng ma trận giả Hessian và ma trận lùi xa.

Định lí 3.3.1. *Giả sử rằng các điều kiện sau thỏa mãn*

(i) Các hàm f, g *và* h *khả vi liên tục và* x_0 *là một nghiệm địa phương của bài toán (P);*

(ii) Điều kiện Kuhn-Tucker thỏa mãn tại x_0 *với* $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$;

(iii) $\partial^2 L(x_0)$ *là một giả Hessian của L tại* x_0. *Khi đó với mỗi* $u \in T_0(X,x_0)$ *tồn tại* $M \in \partial^2 L(x_0) \cup \left[\left(\partial^2 L(x_0) \right)_\infty \setminus \{0\} \right]$ *sao cho*

$$\langle u, M(u) \rangle \geq 0.$$

Hơn nữa, nếu L có ánh xạ giả Hessian $\partial^2 L$ *là nửa liên tục trên tại* x_0 *thì kết luận trên cũng đúng với mỗi* $u \in T(X,x_0)$.

Định lí 3.3.2. *Giả sử rằng bài toán (P) có một nghiệm địa phương là x_0. Cho điều kiện Kuhn-Tucker thỏa mãn tại x_0 với $(\lambda,\mu)\in {}^p\times {}^q$. Giả sử rằng với mỗi $x\in {}^n$, $\partial^2L(x,\lambda,\mu)$ là một giả Hessian của $L(.,\lambda,\mu)$ tại x. Nếu ánh xạ $\partial^2L(.,\lambda,\mu)$ bị chặn địa phương tại x_0, thì với mọi $u\in T(X,x_0)$ tồn tại $M\in\partial^2L(x_0,\lambda,\mu)$ sao cho* $\langle M(u),u\rangle\geq 0.$

Ví dụ 3.3.1.

Xét bài toán

Min $\quad x^{4/3}-y^4$

Với điều kiện $\quad -x^2+y^4\leq 0$,

Tập chấp nhận được của bài toán là

$$C=\left\{(x,y)\in {}^2:-x^2+y^4\leq 0\right\}.$$

Đặt $f(x,y)=x^{4/3}-y^4$ và $g(x,y)=-x^2+y^4$. Có thể thấy rằng $x_0=(0,0)$ là một nghiệm địa phương của bài toán. Ta có

$$\nabla f(x,y)=\left(\frac{4}{3}x^{1/3},-4x^3\right),\quad \nabla g(x,y)=\left(-2x,4y^3\right)$$

Suy ra $\nabla f(0,0)+\nabla g(0,0)=0$, có nghĩa là điều kiện Kuhn-Tucker thỏa mãn tại $x_0=(0,0)$. Hàm Lagrange được cho bởi

$L(x)=x^{4/3}-y^4-x^2+y^4=x^{4/3}-x^2$. Vì

ánh xạ gradient của L là $\nabla L(x,y)=\left(\frac{4}{3}x^{1/3}-2x,0\right)$ không Lipschitz gần $(0,0)$ nên Hessian suy rộng của L tại $(0,0)$ không tồn tại. Đặt

$$\partial^2L(x,y):=\left\{\begin{pmatrix}\frac{4}{9x^{2/3}}-2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}\quad \text{với } x\neq 0$$

và

$$\partial^2L(0,y):=\left\{\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & -\frac{1}{\alpha}\end{pmatrix}:\alpha\geq 2\right\}$$

Thì ∂^2L xác định như trên là một ánh xạ giả Hessian của L nửa liên tục trên tại $(0,0)$. Ta có $X:=\left\{(x,y)\in {}^2:x^2=y^4\right\}$. Nón tiếp xúc của X tại $x_0=(0,0)$ là $T(X,(0,0))=\left\{(0,\beta):\beta\in\ \right\}$ và nón lùi xa của $\partial^2L(0,0)$ là $\left(\partial^2L(0,0)\right)_\infty=\left\{\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}:\alpha\geq 0\right\}$. Với $u=(0,\beta)\in T(X,(0,0))$, chọn $M=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in\left(\partial^2L(0,0)\right)_\infty\setminus\{0\}$ thì $\langle u,M(u)\rangle\geq 0.$

3.3.2. Điều kiện đủ

Bây giờ ta xét điều kiện đủ cho nghiệm của bài toán (P). Tập nghiệm chấp nhận được của bài toán này kí hiệu là S, nón tiếp xúc của S tại $x\in S$ được kí hiệu bằng $T(S,x)$.

Định lí 3.3.4. *Giả sử các điều kiện sau đây thỏa mãn*

(i) Các hàm f,g và h là khả vi liên tục;

(ii) Điều kiện Kuhn-Tucker thỏa mãn tại x_0, với $(\lambda,\mu)\in {}^p\times {}^q$;

(iii) Ánh xạ Giả Hessian ∂^2L của L là nửa liên tục trên tại x_0 sao cho với mọi $u\in T(S,x_0)\setminus\{0\}$ và $M\in\partial^2L(x_0)\cup\left(\left[\partial^2L(x_0)\right]_\infty\setminus\{0\}\right)$, ta có $\langle u,M(u)\rangle>0$. Khi đó x_0 là nghiệm địa phương của bài toán.

Ví dụ 3.3.2.

Xét bài toán

Min $\quad -x^{4/3}-y^4$

Với điều kiện $\quad y^4-x^2=0$.

Tập chấp nhận được của bài toán là

$$C=\left\{(x,y)\in {}^2:y^4-x^2=0\right\}.$$

Đặt $f(x,y)=-x^{4/3}-y^4$ và $h(x,y)=y^4-x^2$. f và h là các hàm khả vi liên tục với $\nabla f(x,y)=\left(-\frac{4}{3}x^{1/3},-4x^3\right)$, $\nabla h(x,y)=\left(-2x,4y^3\right)$

Suy ra $\nabla f(0,0)+\nabla g(0,0)=0$, có nghĩa là điều kiện Kuhn-Tucker thỏa mãn tại $x_0=(0,0)$. Hàm Lagrange được cho bởi $L(x)=-x^{4/3}-y^4-x^2+y^4=-x^{4/3}-x^2$. Và ánh xạ gradient của L là $\nabla L(x,y)=\left(-\frac{4}{3}x^{1/3}-2x,0\right)$. Đặt

$$\partial^2 L(x,y):=\left\{\begin{pmatrix}-\frac{4}{9x^{2/3}}-2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\} \quad \text{với } x\neq 0$$

Và $$\partial^2 L(0,y):=\left\{\begin{pmatrix}-\alpha & 0\\ 0 & \frac{1}{\alpha}\end{pmatrix}:\alpha\geq 2\right\}$$

Khi đó $\partial^2 L$ xác định như trên là một ánh xạ giả Hessian của L nửa liên tục trên tại $(0,0)$. Ta có nón tiếp xúc của C tại $x_0=(0,0)$ là $T(C,(0,0))=\{(0,\beta):\beta\in\ \}$, với mỗi $u=(0,\beta)\in T(C,(0,0))$ mà $\beta\neq 0$ và với mỗi $M\in\partial^2 L(0,0)$ ta có

$$\langle u,M(u)\rangle=\frac{\beta^2}{\alpha}>0\text{, do } \alpha\geq 2.$$

Tuy nhiên, $(0,0)$ không phải là nghiệm địa phương của bài toán và điều này hoàn toàn hợp lí khi điều kiện đủ của bài toán không thỏa mãn đối với ma trận giả Hessian lùi xa. Thật vậy, ta có

$$\left(\partial^2 L(0,0)\right)_\infty=\left\{\begin{pmatrix}-\alpha & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}:\alpha\geq 0\right\}.$$

Chọn $M=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in\left(\partial^2 L(0,0)\right)_\infty\setminus\{0\}$ thì $\langle u,M(u)\rangle=0.$

Kết luận

Như vậy, luận văn đã trình bày một cách có hệ thống về một dạng đạo hàm suy rộng cho lớp các hàm vectơ liên tục, đó là giả Jacobian. Đây là một dạng đạo hàm suy rộng có tính tổng quát cao và mối quan hệ giữa giả Jacobian và các loại đạo hàm suy rộng khác cũng được trình bày trong luận văn này. Một phần không thể thiếu khi đề cập đến các khái niệm đạo hàm đó là các quy tắc tính toán và đối với giả Jacobian cũng vậy, chúng tôi đã lần lượt trình bày các quy tắc xác định giả Jacobian cho tổng, hiệu, tích, thương, tích Decartes của các hàm vectơ định lí giá trị trung bình, khai triển Taylor cho hàm vô hướng khả vi liên tục. Đây chính là những công cụ để đưa đến các ứng dụng trong tối ưu mà chúng tôi đã trình bày trong phần cuối của luận văn.

Chúng tôi cho rằng việc ứng dụng giả Jacobian vào các hàm vectơ liên tục là một vấn đề mở và có thể phát triển theo nhiều hướng khác nhau. Một trong các hướng đó là có thể mở rộng các điều kiện tối ưu cho các hàm vectơ thay vì các hàm vô hướng như đã trình bày trong luận văn.

Trên đây là toàn bộ luận văn, tác giả đã có rất nhiều có gắng nghiên cứu và thực hiện. Tuy nhiên, do những hạn chế nhất định về trình độ khoa học, thời gian thực hiện và phương pháp nghiên cứu nên chưa thể thực hiện hết tất cả các ý tưởng liên quan đến nội dung của luận văn. Hy vọng trong thời gian tới tác giả sẽ giải quyết vấn đề này trọn vẹn hơn. Tác giả mong muốn luận văn sẽ phục vụ thiết thực cho sinh viên sư phạm hệ cử nhân toán, xem như tài liệu tham khảo, ở hiện tại cũng như tương lai.