BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

NGUYỄN VĂN VINH

CÁC CẤU TRÚC TẬP HỢP

Chuyên ngành : PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP

Mã số : 60 46 40

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

ĐÀ NẴNG - 2011

Công trình được hoàn thành tại
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

Người hướng dẫn khoa học: **TS. CAO VĂN NUÔI**

Phản biện 1: PGS.TSKH Trần Quốc Chiến
Phản biện 2: TS. Hoàng Quang Tuyến

Luận văn tốt nghiệp thạc sĩ Phương pháp toán sơ cấp họp tại Đại học Đà Nẵng vào ngày 26 tháng 11 năm 2011.
Luận văn sẽ được bảo vệ trước Hội đồng chấm.

Có thể tìm hiểu luận văn tại:
- Trung tâm Thông tin - Học liệu, Đại học Đà Nẵng.
- Thư viện trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng.

MỞ ĐẦU

1. LÝ DO CHỌN ĐỀ TÀI

Lý thuyết tập hợp là nền tảng của toán học. Nghiên cứu toán học ta phải nghiên cứu lý thuyết tập hợp. Lý thuyết tập hợp giúp tất cả các ngành toán học trong mọi thời đại từ cổ điển đến hiện đại trình bày một cách rõ ràng, mạch lạc và rất khoa học.

Luận văn "Các cấu trúc tập hợp" trình bày các cấu trúc cơ bản của tập hợp và các ứng dụng hữu ích của nó. Người ta có thể xây dựng độ đo trên các cấu trúc của tập hợp, xây dựng hàm đo được và các tính chất của nó. Từ đó có thể dùng lý thuyết này nghiên cứu kinh tế lượng hiện đại, nghiên cứu các vấn đề về xác suất hiện đại, các vấn đề của toán học hiện đại, ...

Trong thực tế nhiều bài toán kinh tế lượng hiện đại, nhiều bài toán xác suất hiện đại không thể giải quyết và phát triển được bằng các kiến thức tập hợp sơ cấp. Chính vì thế đề tài nghiên cứu cơ sở lý thuyết tập hợp, các cấu trúc tập hợp là rất quan trọng, giúp cho việc nghiên cứu toán học hiện đại được thuận lợi hơn.

Đề tài "Các cấu trúc tập hợp" đáp ứng một phần nào đó mong muốn của bản thân về một đề tài phù hợp nhằm tạo điều kiện sau này có thể tìm hiểu sâu hơn về toán học hiện đại.

2. MỤC ĐÍCH NGHIÊN CỨU

Luận văn "Các cấu trúc tập hợp" nhằm tìm hiểu các khái niệm về các cấu trúc tập hợp như: vành Boole, σ-vành, đại số, σ-đại số, xây dựng độ đo trên cấu trúc tập hợp và các tính chất của nó, xây dựng hàm đo được và các tính chất của nó. Từ đây giúp cho việc nghiên cứu các vấn đề của toán học hiện đại được thuận lợi hơn.

3. ĐỐI TƯỢNG VÀ PHẠM VI NGHIÊN CỨU

Nghiên cứu từ các tài liệu, giáo trình về lý thuyết tập hợp, cấu trúc đại số trong và ngoài nước. Đối tượng chính của luận văn này là tập trung vào các cấu trúc tập hợp và các ứng dụng của nó.

4. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

Nghiên cứu trực tiếp từ các tài liệu chuyên khảo trong và ngoài nước kết hợp các tài liệu của các môn học có liên quan.

5. Ý NGHĨA KHOA HỌC VÀ THỰC TIỄN CỦA ĐỀ TÀI

Tạo được một đề tài phù hợp cho việc tìm hiểu các cấu trúc tập, độ đo trên các cấu trúc tập hợp. Từ đó giúp chúng ta nghiên cứu các bài toán kinh tế lượng hiện đại, các bài toán xác suất hiện đại, các vấn đề của toán học hiện đại. Đây là đề tài rất phù hợp cho việc giảng dạy ở trường đại học và nghiên cứu toán học hiện đại.

6. CẤU TRÚC CỦA LUẬN VĂN

Ngoài phần mở đầu và kết luận, luận văn gồm có 3 chương:

Chương 1. Cơ sở lý thuyết tập hợp

Hệ thống lại các kiến thức về tập hợp, các tiên đề cơ bản của tập hợp.

Chương 2. Các cấu trúc tập hợp và độ đo

Trình bày các cấu trúc tập hợp như: vành Boole, σ-vành, vành sinh, đại số, σ-đại số, độ đo trên vành, σ-vành, độ đo trên đại số, σ-đại số và các tính chất của nó.

Chương 3. Hàm đo được

Nghiên cứu các hàm đo được và các tính chất của nó.

Chương 1
CƠ SỞ LÝ THUYẾT TẬP HỢP

1.1 Các khái niệm cơ bản của tập hợp

1.1.1 Khái niệm tập hợp

1.1.2 Bộ phận của tập hợp

1.1.3 Tập hợp rỗng

1.1.4 Tập hợp các bộ phận của một tập hợp

1.2 Các phép toán trên tập hợp

1.2.1 Hiệu của hai tập hợp

1.2.2 Phần bù của một tập hợp

1.2.3 Hiệu đối xứng của hai tập hợp

1.2.4 Hợp và giao của hai tập hợp

1.2.5 Tích Descartes của hai tập hợp

1.2.6 Hợp, giao và tích Descartes của một họ các tập hợp

1.3 Quan hệ tập hợp

1.3.1 Quan hệ hai ngôi

1.3.2 Quan hệ tương đương

1.3.3 Quan hệ thứ tự

1.4 Sơ lược về các tiên đề của lý thuyết tập hợp

1.4.1 Khái niệm nguyên thủy

Chúng ta không định nghĩa tập hợp; ta gọi đó là khái niệm nguyên thủy. Khái niệm thuộc vào cũng là khái niệm nguyên thủy.

1.4.2 Tiên đề quảng tính

$(\forall A)(\forall B)[A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B]$

Trực giác điều đó có nghĩa là một tập hợp hoàn toàn được xác định bởi các phần tử của nó; hai tập hợp A và B bằng nhau nếu và chỉ nếu mọi phần tử của A là phần tử của B và ngược lại.

1.4.3 Tiên đề tuyển lựa hay nội hàm

$(\forall A)(\exists B)(\forall x)[x \in A \bigwedge P(x) \Leftrightarrow x \in B]$

Trực giác điều này có nghĩa cho một công thức P(x) trên một tập hợp biến x, tồn tại tập hợp B mà các phần tử của A có tính chất P(x) (nghĩa là làm cho P(x) đúng). Tập hợp B khi đó được xác định duy nhất bởi tiên đề quảng tính.

1.4.4 Tiên đề cặp

$(\forall A)(\forall B)(\exists C)(\forall x)[x \in C \Leftrightarrow (x = A \bigvee x = B)$

Trực giác điều này có nghĩa là cho hai tập hợp A và B, có một tập hợp C có hai phần tử A và B và chỉ có chúng. Tập hợp đó là duy nhất theo tiên đề quảng tính.

1.4.5 Tiên đề hợp

$(\forall A)(\exists B)(\forall x)[x \in B \Leftrightarrow (\exists C(C \in A \bigwedge x \in C))]$

Trực giác điều đó có nghĩa là cho một tập hợp A mà các phần tử gồm những tập hợp ký hiệu là C, có một tập hợp B mà các phần tử là các tập hợp thuộc vào một trong các tập hợp C của bộ A. Tập hợp đó là duy nhất theo tiên đề quảng tính và gọi là hợp của các tập hợp của bộ A.

1.4.6 Tiên đề hợp các bộ phận

$(\forall A)(\exists B)(\forall X)(X \in B \Leftrightarrow X \subset A)$

Trực giác điều này có nghĩa là cho một tập hợp A, có một tập hợp B mà các phần tử là các bộ phận của A. Tập hợp đó là duy nhất theo tiên đề quảng tính và gọi là hợp các bộ phận của tập hợp A. Ký hiệu là $\mathcal{P}(A)$.

1.4.7 Tiên đề chọn

$(\forall I)[(I \neq \phi),[(\forall i \in I, X_i \neq \phi) \Rightarrow \prod X_i \neq \phi, \forall i \in I]]$

Trực giác điều này có nghĩa nếu (X_i) với $i \in I$ là một họ không rỗng những tập hợp không rỗng thế thì tích Descartes của họ đó là một tập hợp không rỗng.

1.4.8 Tiên đề vô hạn

Định nghĩa 1.1. *Với mọi tập hợp X, ta gọi là cái kế tiếp của tập hợp X là tập hợp được ký hiệu và xác định như sau:*

$x^+ = X \bigcup \{x\}$ *với* $x \in X$.

Tiên đề vô hạn như sau:

$(\forall A) [\phi \in A \bigwedge (\forall x) (x \in A \Rightarrow x^+ \in A]$

Trực giác điều đó có nghĩa là tồn tại một tập hợp chứa tập hợp rỗng và chứa cái kế tiếp của mỗi phần tử của nó.

1.4.9 Tiên đề thay thế

$[(\forall \mathrm{X}) (\exists \mathrm{Y}) (\forall \mathrm{y}) ((\mathrm{x} \in \mathrm{A}) \bigwedge \mathrm{S}(\mathrm{x}; \mathrm{y}) \Rightarrow \mathrm{y} \in \mathrm{Y})]$
$\Rightarrow [(\exists \mathrm{B}) (\forall \mathrm{y}) (\mathrm{y} \in \mathrm{B} \Leftrightarrow (\exists \mathrm{x}) (\mathrm{x} \in \mathrm{A} \bigwedge \mathrm{S}(\mathrm{x}; \mathrm{y})))]$.

Nói một cách khác, giả sử S(x; y) là một phát biểu phụ thuộc vào hai biến x và y và A là một tập hợp. Ta giả sử x thuộc tập hợp A, lớp { y; S(x; y)} là một tập hợp. Thế thì tồn tại một tập hợp chứa đúng các phần tử y sao cho S(x; y) là có đúng ít nhất một phần tử x thuộc tập hợp A.

Chương 2

CÁC CẤU TRÚC TẬP HỢP VÀ ĐỘ ĐO

2.1 Các cấu trúc tập hợp

2.1.1 Vành Boole (Boolean ring)

Định nghĩa 2.1. *Một vành (vành Boole) các tập hợp là một lớp $\Re$ các tập hợp thỏa mãn nếu $A \in \Re$, $B \in \Re$ thì $A \bigcup B \in \Re$ và $A \setminus B \in \Re$.*

Ví dụ 2.1. *Cho X là một tập hợp, ta ký hiệu $\mathcal{P}(X)$ là lớp tất cả các tập hợp con của tập hợp X. Khi đó $\mathcal{P}(X)$ là một vành Boole.*

Mệnh đề 2.1. *Cho $\Re$ là một vành Boole. Khi đó $\phi \in \Re$ và các phép toán hiệu đối xứng, giao của hai tập hợp là đóng trong $\Re$.*

2.1.2 Đại số Boole (Boolean algebra), σ-đại số

Định nghĩa 2.2. *Cho X là một tập khác rỗng. Một lớp $\Re$ các tập hợp con của X được gọi là một đại số, nếu*
1) $X \in \Re$;
2) *Nếu* $A \in \Re$ *thì* $A^c \in \Re$ $(A^c = X\setminus A)$;
3) *Nếu* $A_k \in \Re$, $k = 1, 2, ..., n$ *thì* $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \Re$.

Nghĩa là, $\Re$ là một đại số khi và chỉ khi $\Re$ chứa X, kín đối với mọi phép toán hữu hạn về tập hợp.

Định nghĩa 2.3. *Cho X là một tập khác rỗng. Một lớp $\Re$ các tập hợp con của X được gọi là một σ-đại số, nếu*
1) $x \in \Re$;
2) *Nếu* $A \in \Re$ *thì* $A^c \in \Re$ $(A^c = X\setminus A)$;
3) *Nếu* $A_k \in \Re$, $k = 1, 2, ...$ *thì* $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \Re$.

Nghĩa là, $\Re$ là một σ-đại số khi và chỉ khi $\Re$ chứa X, kín đối với mọi phép toán hữu hạn hay đếm được về tập hợp.

Ví dụ 2.2. *Họ tất cả các tập con của tập hợp X khác rỗng là một σ-đại số.*

Ví dụ 2.3. *Giả sử A là một tập hợp con của tập hợp X. Khi đó $\{A, \phi, A^C, X\}$ là một σ-đại số.*

Ví dụ 2.4. *Lấy $\Omega = Q \bigcap [0; 1]$. Ký hiệu C là lớp các khoảng $[a; b] \bigcap \Omega$, $[a; b) \bigcap \Omega$, $(a; b] \bigcap \Omega$, $(a; b) \bigcap \Omega$, với a, $b \in \Omega$. Xét hệ A gồm tất cả các hợp của một số hữu hạn các khoảng trên. Khi đó A là một đại số.*

Mệnh đề 2.2. *Cho $\Re$ là một vành Boole các tập hợp con của tập hợp X, vành $\Re$ là một đại số khi và chỉ khi $X \in \Re$.*

2.1.3 σ-đại số Borel

Định nghĩa 2.4. *Cho một không gian tôpô X; σ-đại số sinh ra bởi họ tất cả các tập hợp mở trong X được gọi là σ-đại số Borel của không gian X. Ký hiệu là: $\mathfrak{B}(X)$.*

Các phần tử của $\mathfrak{B}$(X) gọi là các tập hợp Borel trong không gian X. Vì $\mathfrak{B}$(X)là một σ-đại số nên ta có:

1) Nếu A là một tập hợp Borel thì A^c cũng là một tập hợp Borel. Đặc biệt, mỗi tập hợp đóng là một tập hợp Borel.

2) Nếu A_1, A_2, ... , A_n là những tập hợp Borel thì $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ là các tập hợp Borel. Đặc biệt, hợp của một họ đếm được những tập hợp đóng là một tập hợp Borel, giao của một họ đếm được các tập hợp mở là một tập hợp Borel.

Chú ý:

1) σ-đại số Borel của một không gian tôpô X cũng là σ-đại số sinh ra bởi họ tất cả các tập hợp đóng trong X.

2) σ-đại số Borel của một không gian $\Re$ cũng là σ-đại số sinh ra bởi họ tất cả các tập hợp mở trong $\Re$.

2.1.4 Vành sinh (generated ring), σ-vành (σ - ring)

Định nghĩa 2.5. *Cho $\mathcal{E}$ là lớp các tập hợp bất kỳ. Vành nhỏ nhất chứa $\mathcal{E}$ được gọi là vành sinh bởi $\mathcal{E}$ và được ký hiệu là $\Re(\mathcal{E})$*

Định lý 2.1. *Nếu $\mathcal{E}$ là lớp các tập hợp bất kỳ thì tồn tại vành sinh bởi lớp $\mathcal{E}$ duy nhất $\Re(\mathcal{E})$.*

Định lý 2.2. *Nếu $\mathcal{E}$ là một lớp các tập hợp bất kỳ thì mỗi tập hợp trong $\mathcal{R}(\mathcal{E})$ được phủ bởi một họ hữu hạn các tập hợp trong $\mathcal{E}$.*

Định lý 2.3. *Nếu $\mathcal{E}$ là một lớp đếm được các các tập hợp thì $\mathcal{R}(\mathcal{E})$ là đếm được.*

Định nghĩa 2.6. *Một lớp không rỗng S các tập hợp được gọi là một σ-vành nếu nó thỏa mãn:*
1) Nếu $E \in S$ và $F \in S$ thì $E \setminus F \in S$.
2) Nếu $\{E_n\} \in S$ với mọi $n \in \mathbb{Z}_+$ thì $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{Z}_+} E_n \in S$.

Định nghĩa 2.7. *Cho một lớp bất kỳ các tập hợp $\mathcal{E}$, σ-vành nhỏ nhất chứa lớp $\mathcal{E}$ được gọi là σ-vành sinh bởi lớp $\mathcal{E}$ và được ký hiệu là $\sigma(\mathcal{E})$.*

Định lý 2.4. *Nếu $\mathcal{E}$ là một lớp bất kỳ các tập hợp và E là một tập hợp bất kỳ trong $\sigma(\mathcal{E})$ thì tồn tại một lớp đếm được $\mathcal{D}$ của $\mathcal{E}$ sao cho $E \in \sigma(\mathcal{D})$.*

Định lý 2.5. *Nếu $\mathcal{E}$ là lớp bất kỳ các tập hợp con của tập hợp X và A là tập hợp con bất kỳ của X thì:*
$$\sigma(\mathcal{E}) \bigcap A = \sigma(\mathcal{E} \bigcap A)$$

2.2 Các lớp đơn điệu

Định nghĩa 2.8. *Cho $\{E_n\}$ là một dãy các tập hợp con của tập hợp X, tập hợp E^* gồm tất cả các phần tử của X thuộc E_n với vô hạn các giá trị của n được gọi là giới hạn trên của dãy $\{E_n\}$ và ký hiệu:*
$$E^* = \overline{\lim}\ E_n = \limsup E_n$$

Định nghĩa 2.9. *Cho $\{E_n\}$ là một dãy các tập hợp con của tập hợp X, tập hợp E_* gồm tất cả các phần tử của X thuộc E_n trừ một số hữu hạn các giá trị của n được gọi là giới hạn dưới của dãy $\{E_n\}$ và ký hiệu:*
$$E_* = \underline{\lim}\ E_n = \liminf E_n$$

Nếu xảy ra trường hợp $E^* = E_*$ thì ta ký hiệu $E^* = E_* = \lim E_n$ và gọi là giới hạn của dãy $\{E_n\}$.
Dãy các tập hợp $\{E_n\}$ được gọi là tăng (đồng biến) nếu $E_n \subset E_{n+1}$, $\forall$ n $\in \mathbb{Z}_+$.
Dãy các tập hợp $\{ E_n \}$ được gọi là giảm (nghịch biến) nếu $E_{n+1} \subset E_n$, $\forall$ n $\in \mathbb{Z}_+$.
Một dãy các tập hợp tăng hay giảm được gọi là dãy đơn điệu.

Chú ý 1. *Một dãy các tập hợp đơn điệu thì luôn tồn tại giới hạn của dãy đó.*

Định nghĩa 2.10. *Một lớp không rỗng $\mathcal{M}$ các tập hợp được gọi là đơn điệu nếu mọi dãy đơn điệu các tập hợp $\{E_n\}$ trong $\mathcal{M}$ ta có $limE_n \in \mathcal{M}$.*

Định nghĩa 2.11. *Lớp đơn điệu nhỏ nhất chứa lớp $\mathcal{E}$ được gọi lớp đơn điệu sinh bởi lớp $\mathcal{E}$ và được ký hiệu là $\mathcal{M}(\mathcal{E})$*

Định lý 2.6. *Một lớp $\mathcal{E}$ là một σ - vành khi và chỉ khi nó là vành đơn điệu.*

Định lý 2.7. *Nếu $\mathcal{E}$ là một vành thì $\mathcal{M}(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E})$. Nếu A là lớp đơn điệu và $\mathcal{E}$ là vành sao cho $\mathcal{E} \subset A$ thì $\sigma(\mathcal{E}) \subset A$.*

2.3 Độ đo trên các vành

2.3.1 Các khái niệm

Một hàm tập là một ánh xạ từ một lớp các tập hợp vào tập số thực $\mathbb{R}$. Một hàm tập μ xác định trên lớp $\mathcal{E}$ các tập hợp được gọi là cộng tính nếu $\forall$ E $\in \mathcal{E}$, $\forall$ F $\in \mathcal{E}$ và $E \bigcap F = \phi$ thì $\mu(E \bigcup F) = \mu(E) + \mu(F)$.

Hàm tập μ: $\mathcal{E} \to \mathbb{R}$ được gọi là hữu hạn cộng tính nếu:

$\forall$ $E_i \in \mathcal{E}$, i $= \overline{1,n}$; n $< \infty$,$E_i \bigcap E_j \doteq \phi$, $\forall$ i $\neq$ j : $\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i \in \mathcal{E}$ thì

$$\mu\ (\bigcup_{i=1}^{n} E_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i).$$

Hàm tập μ: $\mathcal{E} \to \mathbb{R}$ được gọi là σ-cộng tính (cộng tính đếm được) nếu:

$\forall$ $E_i \in \mathcal{E}$, i$\in \mathbb{N}$; $E_i \bigcap E_j \doteq \phi$, $\forall$ i $\neq$ j : $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{E}$ thì

$$\mu\ (\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

Định nghĩa 2.12. *Hàm tập μ có giá trị thực mở rộng, xác định trên vành $\mathcal{E}$ được gọi là độ đo trên vành $\mathcal{E}$ nếu:*

1) Với mọi $E \in \mathcal{E}$ thì $\mu(E) \geq 0$ và $\mu(\phi) \doteq 0$.

2) Hàm tập μ là σ-cộng tính.

Định nghĩa 2.13. *Cho độ đo μ xác định trên vành $\mathcal{E}$. tập $E \in \mathcal{E}$ được gọi là có độ đo hữu hạn nếu $\mu(E) < \infty$. Tập E được gọi là có độ đo σ-hữu hạn nếu tồn tại một dãy các tập $\{E_n\}$, với $n \in \mathbb{Z}_+$ trong $\mathcal{E}$ sao cho $E \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ và $\mu(E_n) < \infty$, $\forall$ $n \in \mathbb{Z}_+$.*

Định nghĩa 2.14. *Độ đo μ xác định trên vành $\mathcal{E}$ các tập hợp con của tập hợp X được gọi là:*

- hữu hạn trên $\mathcal{E}$ nếu với mọi tập hợp $E \in \mathcal{E}$ thì $\mu(E) < \infty$.

- σ - hữu hạn trên $\mathcal{E}$ nếu mọi tập $E \in \mathcal{E}$ đều có độ đo σ-hữu hạn.

Định nghĩa 2.15. *Độ đo μ xác định trên đại số $\mathcal{E}$ các tập hợp con của tập hợp X được gọi là:*

- hữu hạn hoàn toàn nếu $\mu(X) < \infty$.

- σ - hữu hạn hoàn toàn nếu tập hợp X có độ đo σ - hữu hạn.

Định nghĩa 2.16. *Độ đo μ xác định trên σ - đại số được gọi là đầy đủ nếu $\forall\ E \in \mathcal{E}$, $F \subset E$ và $\mu(E) = 0$ thì $F \in \mathcal{E}$.*

2.3.2 Các tính chất của độ đo

Định lý 2.8. *Cho μ là một độ đo trên vành $\mathcal{E}$. Khi đó ta có:*

1) Nếu $E \in \mathcal{E}$, $F \in \mathcal{E}$ và $E \subset F$ thì $\mu(E) \leq \mu(F)$.

2) Nếu $E \in \mathcal{E}$, $F \in \mathcal{E}$ và $E \subset F$, $F \backslash E \in \mathcal{E}$, $\mu(E) < \infty$ thì $\mu(E \backslash F) = \mu(E)$ - $\mu(F)$.

Định lý 2.9. *Cho μ là độ đo trên σ - vành $\mathcal{E}$. Khi đó ta có:*

1) Nếu $E \in \mathcal{E}$, $\{E_n\} \subset \mathcal{E}$ với $n \in \mathbb{Z}_+$ và $E \subset \bigcup\limits_{n \in \mathbb{Z}_+} E_n$ thì

$$\mu(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

2) Nếu $E \in \mathcal{E}$, $\{E_n\} \subset \mathcal{E}$ với $n \in \mathbb{Z}_+$, $E_i \bigcap E_j = \phi$ với mọi $i \neq j$ và $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i \subset \mathcal{E}$ thì

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \leq \mu(E).$$

Định lý 2.10. *Cho μ là độ đo trên σ-vành $\mathcal{E}$. Nếu dãy các tập hợp $\{E_n\} \subset \mathcal{E}$ là dãy tăng thì $\mu(\lim\limits_{n\to\infty} E_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n)$.*

Định lý 2.11. *Cho μ là độ đo trên σ - vành $\mathcal{E}$. Nếu dãy các tập hợp $\{E_n\} \subset \mathcal{E}$ là dãy giảm và tồn tại $m \in \mathbb{Z}_+$ sao cho $\mu(E_m) < \infty$ thì $\mu(\lim\limits_{n\to\infty} E_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n)$.*

Định nghĩa 2.17. *Hàm tập μ xác định trên lớp $\mathcal{E}$ được gọi là liên tục dưới tại tập hợp E nếu mọi dãy tăng các tập hợp $\{E_n\}$ trong $\mathcal{E}$ thỏa mãn: nếu $\lim\limits_{n\to\infty} E_n = E$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n) = \mu(E)$. Tương tự hàm tập μ được gọi là liên tục trên tại tập hợp E nếu mọi dãy giảm các tập hợp $\{E_n\}$ thỏa mãn: nếu $\lim\limits_{n\to\infty} E_n = E$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n) = \mu(E)$.*

Định lý 2.12. *Cho μ là hàm tập hữu hạn, cộng tính, không âm trên vành $\mathcal{E}$. Nếu μ là liên tục trên tại mọi tập hợp E trong $\mathcal{E}$, hay liên tục trên tại ϕ thì μ là một độ đo trên vành $\mathcal{E}$.*

2.4 Độ đo ngoài (Outer measures)

Định nghĩa 2.18. *Một lớp không rỗng các tập hợp $\mathcal{E}$ được gọi là lớp di truyền nếu với mọi tập hợp $E \in \mathcal{E}$ và $F \subset E$ thì $F \in \mathcal{E}$.*

Định nghĩa 2.19. *σ-vành di truyền nhỏ nhất chứa lớp $\mathcal{E}$ được gọi là σ-vành di truyền sinh bởi lớp $\mathcal{E}$ và được ký hiệu là $\mathcal{H}(\mathcal{E})$.*

Định nghĩa 2.20. *Một hàm tập μ^* có giá trị thực trên tập số thực mở rộng, xác định trên lớp $\mathcal{E}$ được gọi là:*

1) Dưới cộng tính nếu với mọi tập hợp $E \in \mathcal{E}$, $F \in \mathcal{E}$ và $E \bigcup F \in \mathcal{E}$ thì:

$$\mu^*(E \bigcup F) \leq \mu^*(E) + \mu^*(F).$$

2) Dưới cộng tính hữu hạn nếu với mọi hữu hạn tập E_1, E_2, ..., E_n và $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \in \mathcal{E}$ thì:

$$\mu^*(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu^*(E_i).$$

3) σ - dưới cộng tính (dưới cộng tính đếm được) nếu với mọi dãy các tập hợp $\{E_i\}$ mà $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{E}$ thì:

$$\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i).$$

4) Đơn điệu nếu $E \in \mathcal{E}$, $F \in \mathcal{E}$ và $E \subset F$ thì: $\mu(E) \leq \mu(F)$.

Định nghĩa 2.21. *Một hàm tập μ^* nhận giá trị trên tập số thực mở rộng, xác định trên σ - vành di truyền $\mathcal{H}$ được gọi một độ đo ngoài nếu nó không âm, đơn điệu, σ - dưới cộng tính và $\mu^*(\phi) = 0$.*

Định lý 2.13. *Nếu μ là một độ đo trên vành $\mathcal{E}$ và nếu với mọi tập hợp $E \in \mathcal{H}(\mathcal{E})$ đặt:*

$$\mu^*(E) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i): E_i \in \mathcal{E}, \forall\ i: E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\}.$$

thì μ^* là một độ đo ngoài trên $\mathcal{H}(\mathcal{E})$ và là một mở rộng của μ. Nếu μ là (hoàn toàn) σ - hữu hạn thì μ^* cũng vậy.

Độ đo ngoài μ^* được gọi là độ đo cảm sinh bởi độ đo μ.

2.5 Các tập đo được

Định nghĩa 2.22. *Cho μ^* là độ đo ngoài trên σ-vành di truyền $\mathcal{H}$. Một tập hợp $A \in \mathcal{H}$ được gọi là μ^*-đo được nếu với mọi tập hợp $E \in \mathcal{H}$ ta có:*

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \bigcap E) + \mu^*(A \bigcap E^c)$$

Định lý 2.14. *Cho μ^* là một độ đo ngoài trên σ-vành di truyền $\mathcal{H}$ và nếu $\overline{S}$ là lớp các tập hợp μ^*-đo được thì $\overline{S}$ là một vành.*

Chú ý 2. *Cho μ^* là một độ đo ngoài trên σ-vành di truyền $\mathcal{H}$. Tập $E \in \mathcal{H}$ là μ^* đo được nếu và chỉ nếu:*

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \bigcap E) + \mu^*(A \bigcap E^c).$$

Định lý 2.15. *Nếu μ^* là một độ đo ngoài trên σ-vành di truyền $\mathcal{H}$ và nếu $\overline{S}$ là lớp tất cả các tập hợp μ^* đo được thì $\overline{S}$ là một σ-vành. Nếu $A \in \mathcal{H}$ và nếu $\{E_n\}$ là dãy rời nhau các tập hợp trong $\overline{S}$ với $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_n = E$ thì:*

$$\mu^*(A \bigcap E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A \bigcap E_n).$$

Định lý 2.16. *Nếu μ^* là độ đo ngoài trên σ-vành di truyền $\mathcal{H}$ và nếu $\overline{S}$ là lớp tất cả các tập hợp μ^* đo được thì mỗi tập hợp có độ đo ngoài bằng 0 thuộc vào $\overline{S}$ và hàm tập $\overline{\mu}$ xác định trên $\overline{S}$ được cho bởi công thức: $\overline{\mu}(E) = \mu^*(E)$, $\forall$ $E \in \overline{S}$ là một độ đo đủ trên $\overline{S}$. Độ đo $\overline{\mu}$ được gọi là độ đo cảm sinh bởi độ đo ngoài μ^*. Độ đo $\overline{\mu}$ là hạn chế của độ đo ngoài μ^* trên $\overline{S}$ và được ký hiệu: $\overline{\mu} = \mu^* \mid_{\overline{S}}$.*

2.6 Độ đo cảm sinh

Trong phần này ta luôn giả sử μ là độ đo trên vành $\mathcal{E}$, μ^* là độ đo ngoài cảm sinh bởi độ đo μ trên $\mathcal{H}(\mathcal{E})$ (σ-vành di truyền sinh bởi $\mathcal{E}$) và $\overline{\mu}$ là độ đo cảm sinh bởi μ^* trên σ - vành $\overline{S}$ các tập hợp μ^*-đo được. Ta cũng ký hiệu $\sigma(\mathcal{E})$ là σ - vành sinh bởi $\mathcal{E}$.

Định lý 2.17. *Mọi tập hợp trong $\sigma(\mathcal{E})$ là các tập hợp μ^* đo được.*

Định lý 2.18. *Nếu $E \subset \mathcal{H}(\mathcal{E})$ thì:*
$$\mu^*(E) = \inf\{\overline{\mu}(F) : E \subset F \in \overline{S}\}$$
$$= \inf\{\overline{\mu}(F) : E \subset F \in \sigma(\mathcal{E})\}.$$
Nghĩa là, độ đo ngoài cảm sinh bởi $\overline{\mu}$ trên $\sigma(\mathcal{E})$ và độ đo ngoài cảm sinh bởi $\overline{\mu}$ trên $\overline{S}$ là trùng nhau.

Định nghĩa 2.23. *Tập hợp $F \in \sigma(\mathcal{E})$ được gọi là một phủ đo được của tập hợp $E \in \mathcal{H}(E)$ nếu mọi tập hợp $G \in \sigma(\mathcal{E})$ mà $G \subset E \backslash F$ thì $\overline{\mu}(G) = 0$.*

Định lý 2.19. *Nếu một tập hợp $E \in \mathcal{H}(\mathcal{E})$ có độ đo ngoài σ- hữu hạn thì tồn tại một phủ đo được $F \in \sigma(\mathcal{E})$ sao cho $\mu^*(E) = \overline{\mu}(F)$*

Định lý 2.20. *Nếu F_1, F_2 là các phủ đo được của $E \in \mathcal{H}(\mathcal{E})$ thì $\overline{\mu}(F_1 \triangle F_2) = 0$, nếu F là phủ đo được của E thì $\mu^*(E) = \overline{\mu}(F)$.*

Định lý 2.21. *Nếu độ đo μ trên σ-vành là σ - hữu hạn thì $\overline{\mu}\mid_{\sigma(\mathcal{E})}$ và $\overline{\mu}\mid_{\overline{S}}$ cũng là σ - hữu hạn.*

2.7 Khuếch, đầy đủ và xấp xỉ một độ đo

Cho μ là độ đo σ-hữu hạn trên σ - vành S, μ^* là độ đo ngoài được cảm sinh bởi độ đo μ. Độ đo $\overline{\mu} = \mu^*\mid_{\overline{S}}$, trong đó $\overline{S}$ là lớp tất cả các tập hợp μ^* - đo được, được gọi là một đầy đủ của độ đo μ.

Định lý 2.22. *Nếu μ là độ đo σ - hữu hạn trên vành $\mathcal{E}$, thì tồn tại một độ đo duy nhất $\overline{\mu}$ trên σ - vành $\sigma(\mathcal{E})$ sao cho $\mu = \overline{\mu}\mid_{\mathcal{E}}$.*

Định lý 2.23. *Cho μ là độ đo trên σ - vành $\mathcal{K}$ và đặt:*
$$\overline{\mathcal{K}} = \{E \triangle N : E \in \mathcal{K}, \exists B \in \mathcal{K}, N \subset B, \mu(B) = 0\}.$$
Khi đó $\overline{\mathcal{K}}$ là một σ - vành và hàm tập $\overline{\mu}$ xác định bởi $\overline{\mu}(E \triangle N) = \mu(E)$ là một độ đo đủ trên $\overline{\mathcal{K}}$.

Định lý 2.24. *Nếu μ là độ đo σ - hữu hạn trên vành $\mathcal{E}$ và μ^* là độ đo ngoài được cảm sinh bởi độ đo μ thì tính đủ của độ đo mở rộng của μ trên $\sigma(\mathcal{E})$ đồng nhất với tính đủ của μ^* trên lớp tất cả các tập hợp μ^* - đo được.*

Định lý 2.25. *Nếu μ là độ đo σ - hữu hạn trên vành $\mathcal{E}$, thì với mọi tập hợp E có độ đo hữu hạn trong $\sigma(\mathcal{E})$ và với mọi số dương ϵ, tồn tại tập hợp $E_0 \in \mathcal{E}$ sao cho: $\mu(E \triangle E_0) \leq \epsilon$.*

2.8 Độ đo trong (Inter measures)

Cho μ là độ đo trên σ - vành $\mathcal{S}$ và $\mathcal{H}(\mathcal{S})$ là σ-vành di truyền sinh bởi σ - vành $\mathcal{S}$. Tương tự như độ đo ngoài μ^* được cảm sinh bởi độ đo μ ta định nghĩa độ đo trong μ_* xác định trên $\mathcal{H}(\mathcal{S})$ như sau:

$$\mu_*(E) = \sup\{\mu(F) : E \supset F \in \mathcal{S}\}, E \in \mathcal{H}(\mathcal{S})$$

Định lý 2.26. *Nếu $E \in \mathcal{H}(\mathcal{S})$ thì:*

$$\mu_*(E) = \sup\{\overline{\mu}(F) : E \supset F \in \overline{\mathcal{S}}\}.$$

Định nghĩa 2.24. *Tập hợp $F \in S$ được gọi là hạt nhân của đo được của tập hợp $E \subset \mathcal{H}(S)$ nếu $F \subset E$ và mọi tập hợp $G \in S$ mà $G \subset E \backslash F$ thì $\mu(G) = 0$.*

Định lý 2.27. *Mọi tập hợp $E \in \mathcal{H}(S)$ có một hạt nhân đo được.*

Định lý 2.28. *Nếu $E \in \mathcal{H}(S)$ và F là hạt nhân đo được của E thì $\mu(F) = \mu_*(E)$, nếu F_1 và F_2 đều là các hạt nhân đo được của E thì $\mu(F_1 \triangle F_2) = 0$.*

Định lý 2.29. *Nếu $\{E_n\}$ là dãy các tập hợp rời nhau trong $\mathcal{H}(S)$ thì:*

$$\mu_*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_*(E_n).$$

Định lý 2.30. *Nếu $A \in \mathcal{H}(S)$ và nếu $\{E_n\}$ là dãy các tập hợp rời nhau với $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_n = E$ thì:*

$$\mu_*(A \bigcap E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_*(A \bigcap E_n).$$

Định lý 2.31. *Nếu $E \in \overline{S}$ thì $\mu^*(E) = \mu_*(E) = \overline{\mu}(E)$. Ngược lại nếu $E \in \mathcal{H}(S)$ và $\mu^*(E) = \mu_*(E) < \infty$ thì $E \in \overline{S}$*

Định lý 2.32. *Nếu $E \in \mathcal{H}(S), F \in \mathcal{H}(S)$ và $E \bigcap F = \phi$ thì:*

$$\mu_*(E \bigcup F) \leq \mu_*(E) + \mu^*(F) \leq \mu^*(E \bigcup F).$$

Định lý 2.33. *Nếu $E \in \overline{S}$ thì với mọi tập hợp con $A \subset X$ ta có:*

$$\mu_*(A \bigcap E) + \mu^*(A^c \bigcap E) = \overline{\mu}(E).$$

2.9 Độ đo Lebesgue (Lebesgue measure)

Ta áp dụng lý thuyết tổng quát về độ đo vào tập hợp số thực $\mathbb{R}$ để xây dựng độ đo Lebesgue. Trong mục này ta dùng các ký hiệu sau:

- $\mathbb{P}$ là lớp tất cả các nửa đoạn bị chặn dạng $[a; b)$
- $\sigma(\mathbb{P})$ là σ - vành sinh bởi $\mathbb{P}$.
- μ là hàm tập xác định trên $\mathbb{P}$ bởi $\mu([a; b))$ = b - a.

Các tập hợp thuộc $\sigma(\mathbb{P})$ được gọi là các tập Borel của $\mathbb{R}$. Theo các phần trước ta có thể thác triển độ đo μ trên vành sinh bởi $\mathbb{P}$ lên $\sigma(\mathbb{P})$, nên có thể xem như μ xác định trên $\sigma(\mathbb{P})$. Đầy đủ của độ đo μ là độ đo $\overline{\mu}$ trên σ - vành $\overline{\mathbb{P}}$ được gọi là độ đo Lebesgue trên $\mathbb{R}$. Các tập hợp thuộc $\overline{\mathbb{P}}$ được gọi là các tập hợp đo được Lebesgue, độ đo không đầy đủ μ trên lớp $\sigma(\mathbb{P})$ các tập hợp Borel cũng thường được gọi là độ đo Lebesgue. Do $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}[-n; n) \in \sigma(\mathbb{P})$ nên $\sigma(\mathbb{P})$ là một σ - đại số.

Định lý 2.34. *Mỗi tập hợp đếm được trong $\mathbb{R}$ là một tập hợp Borel có độ đo không (tập hợp A được gọi là có độ đo không nếu $\mu(A) = 0$).*

Định lý 2.35. *Gọi $\mathcal{U}$ là lớp tất cả các tập hợp mở trong $\mathbb{R}$. Khi đó ta có:*

$$\sigma(\mathbb{P}) = \sigma(\mathcal{U})$$

Định lý 2.36. *Nếu $E \subset \mathbb{R}$ thì:* $\mu^*(E) = \inf\{\mu(U) : E \subset U \in \mathcal{U}\}$.

Định lý 2.37. *Nếu T là một hàm từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$ được xác định bởi $T(x) = \alpha x + \beta$, trong đó $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ và $\alpha \neq 0$ thì:*

$\mu^*(E) = \mid \alpha \mid \mu^*(E)$ *và* $\mu_*(T(E)) = \mid \alpha \mid \mu_*(E)$.

Ngoài ra, tập T(E) là tập Borel hay là tập đo được Lebesgue nếu và chỉ nếu E là tập Borel hay là tập đo được Lebesgue tương ứng.

2.10 Độ đo trên σ-đại số

Định nghĩa 2.25. *Giả Sử $\mathcal{M}$ là một σ-đại số những tập hợp con của tập hợp X. Hàm số: $\mu : \mathcal{M} \to [0; \infty]$ gọi là độ đo nếu:*

1) $\mu(\phi) = 0$.

2) μ là σ - cộng tính, tức là nếu $A_1, A_2, ...$, là họ đếm được những tập hợp đôi một rời nhau thuộc $\mathcal{M}$ thì:

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Bộ ba $(X, \mathcal{M}, \mu)$ trong đó $\mathcal{M}$ là σ-đại số những tập hợp con của tập hợp X, $\mu : \mathcal{M} \to [0; \infty]$ là một độ đo, gọi là một không gian đo.

Nếu $A \in \mathcal{M}$ thì số $\mu(A)$ được là độ đo của tập hợp A. Độ đo μ được gọi là hữu hạn nếu $\mu(X) < \infty$. Độ đo μ gọi là σ - hữu hạn nếu $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n, X_n \in \mathcal{M}, \mu(X_n) < \infty$ với mọi số tự nhiên n. Hiển nhiên độ đo hữu hạn là độ đo σ - hữu hạn.

Ví dụ 2.5. *Hàm số xác định trên σ-đại số và đồng nhất bằng không là một độ đo. Đó là độ đo hữu hạn.*

Ví dụ 2.6. *Cho $\mathcal{M}$ là một σ - đại số những tập hợp con của tập hợp X, $x_0 \in X$. Hàm số $\mu : \mathcal{M} \to [0; \infty]$ xác định bởi:*

$$\mu(A) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x_0 \in A \in \mathcal{M} \\ 0 & \text{nếu } x_0 \notin A \in \mathcal{M} \end{cases}$$

là một độ đo hữu hạn.

Ví dụ 2.7. *Cho $\mathcal{M}$ là một σ - đại số những tập hợp con của tập hợp không rỗng X và $\mu(\phi) = 0$, $\mu(A) = \infty$ với $\phi \neq A \in \mathcal{M}$. Hàm số μ là một độ đo không σ - hữu hạn.*

Ví dụ 2.8. *Cho $\mathcal{M}$ là một σ - đại số những tập hợp con của tập hợp X. Gọi $\mu : \mathcal{M} \to [0; \infty]$ là hàm số xác định như sau: Nếu $A \in \mathcal{M}$ và A là một tập hợp hữu hạn thì $\mu(A)$ bằng số phần tử của tập hợp A; nếu $A \in \mathcal{M}$ và A là tập hợp vô hạn thì $\mu(A) = \infty$; μ là một độ đo, μ là hữu hạn khi và chỉ khi X là một tập hữu hạn; μ là σ - hữu hạn khi và chỉ khi X nhiều nhất là đếm được,*

Ví dụ 2.9. *Nếu μ là một độ đo xác định trên một σ - đại số $\mathcal{M}$ và $A \in \mathcal{M}$ thì họ $\mathcal{M}_A$ tất cả các tập hợp $E \in \mathcal{M}$ chứa trong A là một σ - đại số những tập hợp con của tập hợp A và $\mu_A = \mu \mid_{\mathcal{M}_A}$ là một độ đo trên $\mathcal{M}_A$.*

Định lý 2.38. *Giả sử μ là một độ đo xác định trên một σ - đại số $\mathcal{M}$. Khi đó:*

1) μ là cộng tính hữu hạn (gọi tắt là cộng tính), tức là $A_1, A_2, ..., A_m$ là những phần tử rời nhau của $\mathcal{M}$ thì:

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{m} \mu(A_i) \ .$$

2) Nếu $A, B \in \mathcal{M}$ *và* $A \subset B$ *thì* $\mu(A) \leq \mu(B)$*; nếu ngoài ra* $\mu(A) < \infty$ *thì* $\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$.

3) Nếu $A_1, A_2, ... \in \mathcal{M}$ *thì* $\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Hệ quả 2.1. *1) Tập hợp con của tập hợp đo được có độ đo không là tập hợp có độ đo không.*

2) Nếu $A, B \in \mathcal{M}, \mu(B) = 0$ *thì* $\mu(A \bigcup B) = \mu(A \backslash B) = \mu(A)$.

3) Hợp của một họ hữu hạn hoặc đếm được những tập hợp có độ đo không là một tập hợp có độ đo không.

Hệ quả 2.2. *Giả sử* μ *là độ đo* σ *- hữu hạn xác định trên một* σ*-đại số những tập hợp con của tập hợp* X*. Khi đó ta có:*

1) $X = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} Y_n$*, trong đó các tập hợp* Y_n *là đo được đôi một rời nhau và có độ đo* $\mu(Y_n)$ *hữu hạn.*

2) Nếu $A \in \mathcal{M}$ *thì* $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_n$*, các* A_n *đo được đôi một rời nhau và có độ đo hữu hạn.*

Định lý 2.39. *1) Nếu* $\{A_n\}$ *là một dãy đơn điệu tăng những tập hợp đo được, tức là* $A_1 \subset A_2 \subset ...$ *thì*

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

2) Nếu $\{A_n\}$ *là một dãy đơn điệu giảm những tập hợp đo được, tức là* $A_1 \supset A_2 \supset ...$ *và* $\mu(A_1)$ *hữu hạn thì*

$$\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Định nghĩa 2.26. *Độ đo* μ *gọi là đủ nếu mỗi tập hợp con của của một tập có độ đo không đều là một tập hợp đo được.*

Định lý 2.40. *Giả sử* $\mu : \mathcal{M} \to [0; \infty]$ *là một độ đo xác định trên một* σ *- đại số* $\mathcal{M}$ *những tập hợp con của tập hợp* X*. Gọi* $\mathcal{M}^{'}$ *là họ họ tất cả các tập hợp* A *có dạng:* $A = B \bigcup C$*; trong đó* $B \in \mathcal{M}$*, và* C *là tập hợp con của tập hợp* $D \subset \mathcal{M}$ *có độ đo* $\mu(D) = 0$*.*
Với mỗi tập hợp có dạng trên đặt:

$$\mu^{'}(A) = \mu(B).$$

Khi đó:

1) $\mathcal{M}^{'}$ *là một* σ *- đại số những tập hợp con của tập hợp* X*.*

2) μ' là độ đo đủ xác định trên $\mathcal{M}'$ và $\mu'(A) = 0$ khi và chỉ khi A là tập hợp con của tập hợp D nào đó thuộc $\mathcal{M}$ có độ đo $\mu(D) = 0$.

2.11 Thác triển độ đo

Định nghĩa 2.27. *Giả sử: $\lambda : \Sigma \to [0;\infty]$ là một hàm số xác định trên một đại số Σ những tập hợp con của tập hợp X, $\lambda(\phi) = 0$. Tập hợp $A \in \Sigma$ được gọi là một λ - tập hợp nếu với mọi tập hợp $E \in \Sigma$ ta đều có:*

$$\lambda(E) = \lambda(E \bigcap A) + \lambda(E \bigcap A^c).$$

Bổ đề 2.1. *Giả sử Σ là một đại số những tập hợp con của tập hợp X, $\lambda : \Sigma \to [0;\infty]$ là một hàm số sao cho $\lambda(\phi) = 0$. Khi đó ta có:*

1) Họ $\mathcal{M}$ các λ - tập hợp là một đại số.

2) Nếu $A_1, A_2, ..., A_n$ là những tập hợp đôi một rời nhau thuộc $\mathcal{M}$ thì với mọi tập hợp $E \in \Sigma$ ta có:

$$\lambda(E \bigcap (\bigcup_{i=1}^{n} A_i)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda(E \bigcap A_i)$$

3) λ là cộng tính trên $\mathcal{M}$.

Định nghĩa 2.28. *Hàm số $\mu^* : 2^X \to [0;\infty]$ xác định trên σ - đại số tất cả các tập hợp con của tập hợp X gọi là một độ đo ngoài nếu:*

1) $\mu^*(\phi) = 0$

2) $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ với $A \subset B \subset X$.

3) $\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$, với $A_1, A_2, ... \subset X$.

Định lý 2.41. *(Caratheodory)*
Nếu μ^* là một độ đo ngoài thì họ $\mathcal{M}$ các μ^* - tập hợp là một σ - đại số và $\mu = \mu^* |_{\mathcal{M}}$ là một độ đo.

Bổ đề 2.2. *Giả sử Σ là một đại số những tập hợp con của tập hợp X, $m : \Sigma \to [0;\infty]$ là một hàm σ - cộng tính, $m(\phi) = 0$.*

Với mỗi $A \subset X$, đặt:

$$\mu^*(A) = \inf \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n).$$

trong đó cận dưới đúng lấy theo tất cả các họ đếm được $\{E_n\}$ những tập hợp thuộc Σ sao cho $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Khi đó ta có:

1) μ^* là một độ đo ngoài.
2) Mỗi tập hợp thuộc Σ là một μ^*-tập hợp.
3) $\mu^* \mid_\Sigma = m$.

Định lý 2.42. *(Định lý Hahn về thác triển độ đo) Giả sử $m : \Sigma \to [0; \infty]$ là một hàm số σ - cộng tính xác định trên một đại số Σ những tập hợp con của tập hợp X, $m(\phi) = 0$. Khi đó tồn tại một độ đo $\mu : \mathcal{M} \to [0; \infty]$ xác định trên σ - đại số $\mathcal{M}$ sinh ra bởi Σ sao cho: $\mu \mid_\Sigma = m$. Nếu m là σ - hữu hạn thì μ được xác định một cách duy nhất.*
μ là độ đo thác triển của độ đo m từ Σ lên $\mathcal{M}$.

Định nghĩa 2.29. *Giả sử X là một không gian tôpô, Σ là một đại số những tập hợp con của tập hợp X, $m : \Sigma \to [0; \infty)$ là hàm cộng tính hoặc σ - cộng tính, m được gọi là chính quy nếu mọi $A \in \Sigma$ và một số dương ϵ, tồn tại một tập hợp $F \in \Sigma$ có bao đóng $\overline{F}$ chứa trong A và tồn tại một tập hợp $G \in \Sigma$ có phần trong G^0 chứa A sao cho $m(G \backslash F) < \epsilon$*

Định lý 2.43. *(Alexanhroff) Giả sử X là một không gian compac, Σ là một đại số những tập hợp con của tập hợp X, $m : \Sigma \to [0; \infty)$ là một hàm cộng tính hữu hạn và chính quy. Khi đó m là σ - cộng tính.*

Định lý 2.44. *Giả sử $m : \Sigma \to [0; \infty)$ là một hàm cộng tính hữu hạn và chính quy xác định trên một đại số Σ những tập hợp con của không gian compac X. Khi đó tồn tại một độ đo chính quy duy nhất $\mu : \mathcal{M} \to [0; \infty)$ xác định trên σ - đại số $\mathcal{M}$ sinh ra bởi Σ sao cho $\mu \mid_\Sigma = m$*

2.12 Độ đo Borel và độ đo Lebesgue

2.12.1 Độ đo Borel trong một khoảng đóng hữu hạn [a; b]

2.12.2 Độ đo Borel trong không gian $\mathcal{R}$

2.12.3 Độ đo Lebesgue trong không gian $\mathcal{R}$

2.12.4 Độ đo Borel và độ đo Lebesgue trong không gian $\mathcal{R}^k$

2.12.5 Độ đo Borel trong một không gian đóng hữu hạn

Chương 3

HÀM ĐO ĐƯỢC

3.1 Không gian đo

Định nghĩa 3.1. *Một không gian đo được là một tập hợp $X \neq \phi$ và một σ-vành $\mathcal{E}$ các tập hợp con của tập hợp X thỏa mãn tính chất $\bigcup\limits_{s \in S} S = X$ và ký hiệu là (X,S).*

Chú ý 3. *Nếu $\mathcal{E}$ là một σ-đại số những tập hợp con của tập hợp X khác rỗng thì (X,S) là một không gian đo được.*

Định nghĩa 3.2. *Một không gian đo được (X,S) được gọi là không gian đo nếu trên S có một độ đo μ; ta ký hiệu không gian đo là (X, S, μ)*

Định nghĩa 3.3. *Tập hợp X_0 trong không gian đo được (X, S, μ) được gọi là một tập đầy nếu với mọi tập hợp đo được $E \in S$ thì $\mu_*(E \backslash X_0) = 0$*

Định lý 3.1. *Nếu X_0 là một tập đầy trong không gian đo (X, S, μ) và đặt $S_0 = S \bigcap X_0, \mu_0(E \bigcap X_0) = \mu(E)$ thì $(X_0, S_, \mu_0)$ là một không gian đo.*

3.2 Hàm đo được (measure spaces)

Định nghĩa 3.4. *Một ánh xạ f từ không gian đo được (X, $\mathcal{X}$) và không gian đo được (Y, $\mathcal{Y}$) được gọi là ($\mathcal{X} - \mathcal{Y}$)- đo được nếu với mọi $B \in \mathcal{Y}$ thì $f^{-1}(B) \in \mathcal{X}$.*

Chú ý 4. *1) Nếu $X = \mathcal{R}^k$ và $S = \mathbb{B}(\mathcal{R}^k)$ thì f được gọi là đo được theo nghĩa Borel.*

2)Nếu $X = \mathcal{R}^k$ và $S = \mathcal{L}_k$ thì f được gọi là đo được theo nghĩa Lebesgue.

Định lý 3.2. *Giả sử A là một tập hợp đo được. Khi đó 4 điều kiện sau là tương đương:*

1) f là một hàm đo được trên A.

2) Với mọi $a \in \mathcal{R}$, tập hợp $\{x \in A : f(x) \geq a\}$ là đo được.

3) Với mọi $a \in \mathcal{R}$, tập hợp $\{x \in A : f(x) > a\}$ là đo được.

4) Với mọi $a \in \mathcal{R}$, tập hợp $\{x \in A : f(x) \leq a\}$ là đo được.

Hệ quả 3.1. *1) Nếu hàm số f đo được trên tập hợp A và B là tập hợp con đo được của A thì f đo được trên B.*

2) Nếu f là hàm đo được trên họ hữu hạn hay đếm được tập hợp $\{A_n\}$ thì f đo được trên $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ (với giả thiết f xác định trên $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$)

Định lý 3.3. *Giả sử (X, S) là một không gian đo được và $A \in S$. Khi đó ta có:*

1) Nếu f là hàm đo được trên A và $c \in \mathcal{R}$ thì cf cũng là hàm đo được trên A.

2) Tổng của hai hàm đo được hữu hạn trên A là một hàm đo được trên A.

3) Tích của hai hàm đo được hữu hạn trên A là một hàm đo được trên A.

Nếu f là hàm đo được trên A và α là một số dương thì $|f|^{\alpha}$ là một hàm đo được trên A; nếu $f(x) \neq 0$ thì với mọi $x \in A$ thì $\frac{1}{f}$ là hàm đo được trên A.

4) Nếu f và g là hai hàm đo được trên A thì $\max\{f, g\}$ và $\min\{f, g\}$ là những hàm đo được trên A.

5) Nếu $\{f_n\}$ là một dãy các hàm đo được trên A thì $\sup_n(f_n), \inf_n(f_n), \lim_{n\to\infty} \sup_n(f_n)$, $\lim_{n\to\infty} \inf_n(f_n)$ là những hàm đo được trên A. Đặc biệt nếu dãy hàm $\{f_n\}$ hội tụ trên A thì $\lim_{n\to\infty} f_n$ là một hàm đo được trên A.

6) Nếu f và g là hai hàm đo được trên A thì các tập hợp $\{x \in A : f(x) < g(x)\}, \{x \in A : f(x) \leq g(x)\}, \{x \in A : f(x) = g(x)\}$ đều thuộc S.

Hệ quả 3.2. *Nếu f là hàm số đo được trên tập hợp A thì các hàm số:*

$$f^{+}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{nếu } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{nếu } f(x) < 0 \end{cases}$$

$$f^{-}(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{nếu } f(x) < 0 \end{cases}$$

là những hàm đo được trên A.

Định lý 3.4. *Cho f là một hàm số thực đo được Borel trên tập số thực $\mathcal{R}$ và g là hàm đo được giá trị tực mở rộng trên không gian đo được (X, S) thì hàm gf được xác định bởi gf(x) = g[f(x)] là hàm đo được trên X.*

3.3 Cấu trúc của hàm đo được

Giả sử A là một tập hợp con của không gian X. Hàm số $\mathcal{X}_A$ xác định trên X cho bởi công thức:

$$\mathcal{X}_A = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \in A \\ 0 & \text{nếu } x \notin A \end{cases}$$

gọi là hàm đặc trưng của tập hợp A.

Hàm số $s : X \to [0; \infty]$ xác định trên một tập hợp X và lấy một số giá trị hữu hạn không âm gọi là một hàm số đơn giản trên X.

Ví dụ 3.1. *Hàm số Điritchlet xác định trên đoạn [0; 1]*

$$\mathcal{X}_A = \begin{cases} 1 & \textit{nếu } x \textit{ hữu tỉ} \\ 0 & \textit{nếu } x \textit{ vô tỉ} \end{cases}$$

là một hàm đơn giản trên [0; 1].

Giả sử $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ là các giá trị khác nhau của hàm số đơn giản s trên X. Đặt:

$A_i = \{x \in X : f(x) = \alpha_i\}, i = 1, 2, ..., n$

Các tập hợp A_i đôi một rời nhau và $s(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \mathcal{X}_{A_i}(x), x \in X$

Định lý 3.5. *Giả sử (X, S) là một không gian đo được, $A \in S$. Khi đó ta có:*

1) Hàm đặc trưng $\mathcal{X}_E$ của một tập hợp $E \subset A$ là đo được khi và chỉ khi $E \in S$.

2) Hàm đơn giản trên A, $s = \sum \alpha_i \mathcal{X}_{A_i}$, ($\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = A$ và các α_i đôi một khác nhau, các tập hợp A_i đôi một rời nhau) là đo được trên A khi và chỉ khi các tập hợp $A_1, A_2, ..., A_n \in S$.

Định lý 3.6. *Mỗi hàm số đo được không âm trên một tập hợp A đều là giới hạn của một dãy đơn điệu tăng những hàm đơn giản đo được trên A.*

Định lý 3.7. *Nếu $\{f_n\}$ là dãy hàm đo được và $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$ thì f(x) cũng là hàm đo được.*

3.4 σ-đại số sinh bởi hàm đo được

KẾT LUẬN

Trong luận văn " Các cấu trúc tập hợp" tôi đã đề cập và nghiên cứu các vấn đề sau:

1) Hệ thống lý thuyết tập hợp, trình bày lý thuyết tập hợp dưới dạng các tiên đề.

2) Nghiên cứu các cấu trúc tập hợp như: vành Boole, vành sinh, σ-vành, đại số, đại số Boole, σ-đại số, σ-đại số Borel; nghiên cứu độ đo trên các vành, độ đo trên đại số, σ-đại số, đại số Borel và thác triển một độ đo. Nghiên cứu các tính chất của độ đo.

3) Nghiên cứu hàm đo được, cấu trúc của hàm đo được.

Trong thời gian nghiên cứu nội dung này tôi đã rất cố gắng và nỗ lực song luận văn không tránh khỏi những hạn chế nhất định, rất mong sự quan tâm, góp ý kiến của quí thầy cô giáo, của quí đồng nghiệp, của quí bạn đọc để luận văn được hoàn thiện hơn.