BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

NGUYỄN THỊ VIỆT THẢO

BÀI TOÁN TÔ MÀU VÀ ỨNG DỤNG GIẢI TOÁN SƠ CẤP

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP

Mã số: 60.46.40

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Đà Nẵng - năm 2011

Công trình được hoàn thành tại

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM, ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

Người hướng dẫn khoa học: PGS. TSKH Trần Quốc Chiến

Phản biện 1: TS. Cao Văn Nuôi

Phản biện 2: PGS. TS. Huỳnh Thế Phùng

Luận văn sẽ được bảo vệ trước Hội đồng chấm Luận văn tốt nghiệp Thạc sĩ khoa học họp tại Đại học Đà Nẵng vào ngày 26/11/2011

Có thể tìm hiểu luận văn tại:

- Trung tâm Thông tin - Học liệu, Đại học Đà Nẵng
- Thư viện trường ĐH Sư phạm, Đại học Đà Nẵng

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Khái niệm lý thuyết đồ thị được nhiều nhà khoa học độc lập nghiên cứu và có nhiều đóng góp trong lĩnh vực toán học ứng dụng. Sử dụng bài toán tô màu để giải toán là một phương pháp khá hay trong lý thuyết đồ thị. Phương pháp này không đòi hỏi nhiều về kiến thức và khả năng tính toán mà chủ yếu đòi hỏi sự sáng tạo trong việc đưa ra một mô hình cụ thể và linh hoạt trong cách tư duy, không thể áp dụng một cách máy móc được. Đó là điểm mạnh cũng như cái khó của bài toán tô màu.

Mong muốn của tác giả luận văn là có thể cung cấp cho người đọc một cái nhìn tổng quan nhưng cũng khá chi tiết về việc sử dụng tô màu như một nghệ thuật giải toán, hy vọng nó sẽ giúp ích phần nào cho việc bồi dưỡng học sinh chuyên ở các trường THPT, phát triển tư duy cho học sinh, mở ra một hướng nghiên cứu mới cho những ai quan tâm.

2. Mục đích nghiên cứu

Ứng dụng lí thuyết đồ thị nói chung và bài toán tô màu đồ thị nói riêng để giải các bài toán không mẫu mực, các bài toán thường gặp trong thực tế và một vài bài toán trong các kì thi Toán quốc tế.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

- Nghiên cứu tổng quan về lí thuyết đồ thị, tô màu đồ thị.
- Nghiên cứu lớp các bài toán ứng dụng tô màu đồ thị.

4. Phương pháp nghiên cứu

+ Nghiên cứu lí thuyết

Dựa vào các giáo trình đã được học, các tài liệu liên quan đến lí thuyết đồ thị và tô màu đồ thị.

+ Nghiên cứu thực tiễn

Nghiên cứu các bài toán trong các giáo trình và tài liệu tham khảo.

5. Chọn tên đề tài Bài toán tô màu và ứng dụng giải toán sơ cấp.

6. Cấu trúc luận văn Gồm ba chương

Chương 1: *Kiến thức cơ sở*
Chương 2: *Bài toán tô màu đồ thị*
Chương 3: *Ứng dụng*

CHƯƠNG 1. KIẾN THỨC CƠ SỞ

1.1 CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1.1.1 Các định nghĩa

1.1.2 Bậc của đồ thị

1.1.3 Các đơn đồ thị đặc biệt

1.1.4 Đồ thị đường

1.2 ĐƯỜNG ĐI, CHU TRÌNH VÀ TÍNH LIÊN THÔNG

1.2.1 Các định nghĩa

1.2.2 Các bài toán về đường đi

1.2.3 Một số định lí

1.3 ĐỒ THỊ PHẲNG

1.3.1 Bài toán mở đầu

1.3.2 Đồ thị phẳng

1.3.3 Công thức Euler

1.3.4 Định lí Kuratowski

CHƯƠNG 2. BÀI TOÁN TÔ MÀU ĐỒ THỊ

2.1 GIỚI THIỆU

2.2 TÔ MÀU ĐỈNH

2.2.1 Đồ thị đối ngẫu

2.2.2 Các khái niệm cơ bản

Định nghĩa 2.1 Tô màu đỉnh một đơn đồ thị là sự gán màu cho các đỉnh của nó sao cho không có hai đỉnh kề nhau được gán cùng một màu.

Định nghĩa 2.2 Sắc số của đồ thị G, ký hiệu là $\chi(G)$, là số màu tối thiểu cần thiết để tô màu các đỉnh của đồ thị (mỗi đỉnh một màu), sao cho hai đỉnh kề nhau tùy ý được tô bằng hai màu khác nhau.

2.2.3 Một số định lí

Định lí 2.1 Một chu trình độ dài lẻ luôn có sắc số bằng 3.

Định lí 2.2 *(Định lí Konig)* Một đơn đồ thị có thể tô bằng hai màu khi và chỉ khi nó không có chu trình độ dài lẻ.

Hệ quả 2.1 Tất cả các chu trình độ dài chẵn đều có sắc số bằng 2.

Định lí 2.3 Đồ thị đầy đủ K_n với n đỉnh luôn luôn có sắc số bằng n.

Định lí 2.4 Với mỗi số nguyên dương n, tồn tại một đồ thị không chứa K_3 và có sắc số bằng n.

Định lí 2.5 Nếu đồ thị G chứa đồ thị con đẳng cấu với đồ thị đầy đủ K_n thì $\lambda(G) \geq n$.

Định lí 2.6 $\chi(G) \leq P\ \Delta(G) + 1$ với mọi đồ thị G, trong đó $\Delta(G)$ là bậc đỉnh lớn nhất của G (đẳng thức xảy ra khi $G = K_n$ hoặc G là chu trình độ dài lẻ).

Định lí 2.7 (Brooks) Cho G là đơn đồ thị n đỉnh, liên thông khác K_n và không phải chu trình độ dài lẻ. Khi đó $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

2.3 THUẬT TOÁN TÔ MÀU ĐỈNH

i) Lập danh sách các đỉnh đồ thị.

$$E' := [v_1, v_2, \ldots, v_n]$$

theo thứ tự bậc giảm dần: $d(v_1) \geq d(v_2) \geq \ldots \geq d(v_n)$.

Đặt i:=1

ii) Tô màu i cho đỉnh đầu tiên trong danh sách. Duyệt lần lượt các đỉnh tiếp theo và tô màu i cho đỉnh không kề đỉnh đã được tô màu i.

iii) Nếu tất cả các đỉnh đã được tô màu thì kết thúc: Đồ thị đã được tô màu bằng i màu. Ngược lại sang bước iv).

iv) Loại khỏi E’ các đỉnh đã tô màu, đặt i:=i+1, và quay lại bước ii).

2.4 TÔ MÀU ĐỒ THỊ PHẲNG

2.4.1 Một số định lí về sắc số của đồ thị phẳng

Định lí 2.8 Mọi bản đồ tạo bởi các đường thẳng trên mặt phẳng có thể tô bằng hai màu.

Định lí 2.9 Điều kiện cần và đủ để bản đồ có thể tô bằng hai màu là mọi đỉnh của đồ thị phẳng tương ứng có bậc chẵn lớn hơn hoặc bằng 2.

Định lí 2.10 (Kempe – Heawood) Mọi đồ thị phẳng không có đỉnh nút đều có sắc số không lớn hơn 5.
Định lý 2.11 (Appel - Haken)(Định lí bốn màu - 1976)

Mọi đồ thị phẳng không có đỉnh nút đều có sắc số không quá bốn.

2.4.2 Một ví dụ tìm sắc số đồ thị

2.5 TÔ MÀU CẠNH

Định nghĩa 2.3 Tô màu cạnh một đơn đồ thị là sự gán màu cho các cạnh của nó sao cho không có hai cạnh kề được gán cùng một màu

Định nghĩa 2.4 Sắc số cạnh của đồ thị G, kí hiệu là χ' (G) là số màu ít nhất cần dùng để tô trên các cạnh của đồ thị, mỗi cạnh một màu sao cho hai cạnh kề nhau tùy ý được tô bằng hai màu khác nhau.

Ta có thể chuyển bài toán sắc số cạnh về bài toán sắc số . Ta có $\chi'(G) = \chi(L(G))$

Định lí 2.12 Nếu G là đồ thị lưỡng phân thì χ' (G) = Δ(G). Đặc biệt, sắc số cạnh của đồ thị lưỡng phân đủ $K_{m,n}$ là max{m, n}.

Định lí 2.13 (Định lí Vizing) Với mọi đơn đồ thị G, $\Delta(G) \le \chi'(G) \le \Delta(G)+1$

Định lí 2.14 i) Nếu *n* chẵn thì $\chi'(K_n) = \Delta(K_n) = n-1$
ii) Nếu *n* lẻ thì $\chi'(K_n) = \Delta(K_n)+1 = n$

2.6 NGUYÊN LÝ DIRICHLET

2.6.1 Mở đầu

2.6.2 Nguyên lý Dirichlet tổng quát

2.7 SỐ RAMSEY

Định nghĩa 2.5 Cho hai số nguyên $i \ge 2, j \ge 2$. Số nguyên dương n gọi là có tính chất (i,j)-Ramsey, nếu K_n với mỗi cạnh được tô bằng một trong hai màu xanh hoặc đỏ thì (a) K_n chứa hoặc K_i đỏ hoặc K_j xanh và (b) K_n chứa hoặc K_j đỏ hoặc K_i xanh.

Định nghĩa 2.6 Số Ramsey R(i,j) là số nguyên dương nhỏ nhất có tính chất (i,j)-Ramsey.

Mệnh đề 2.2 R(3,3) = 6

Mệnh đề 2.3 R(2,j) = j $\forall$ j $\ge$ 2

Mệnh đề 2.6 (Định lý Ramsey) $R(i,j)$ tồn tại với mọi $i \geq 2$, $j \geq 2$.
Mệnh đề 2.8 $R(3,4) = 9$
Mệnh đề 2.9 $R(3,5) = 14$
Mệnh đề 2.10 $R(4,4) = 18$
Mệnh đề 2.11 $R(2,2,....,2;2) = 2$.
Mệnh đề 2.12 $R(3,3,3;2) = 17$

CHƯƠNG 3. ỨNG DỤNG

3.1 ỨNG DỤNG TÔ MÀU ĐỒ THỊ ĐỂ GIẢI QUYẾT CÁC VẤN ĐỀ THỰC TẾ

Bài toán 3.1.1

Một sở thú nhập về 6 loại thú khác nhau, mà ta kí hiệu là A, B, C, D, E, F. Một số loại trong số đó có thể sống cùng trong một chuồng, một số loài sẽ ăn thịt loài khác nếu nhốt chung chuồng. Bảng sau đây cho biết những loài nào không thể sống chung với nhau:

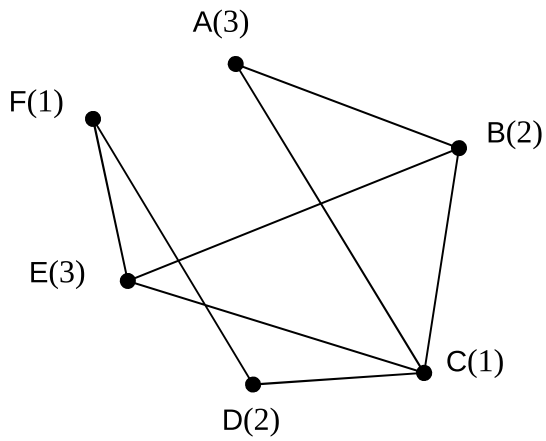
Loại	A	B	C	D	E	F
Không thể sống với	B, C	A, C, E	A, B, D, E	C, F	B, C, F	D, E

Hỏi cần ít nhất bao nhiêu chuồng để có thể nhốt tất cả các loại thú đó?

Giải

Ta sẽ mô hình hóa bằng đồ thị và đưa về bài toán tô màu như sau: Mỗi đỉnh của đồ thị là một loài thú, hai đỉnh được nối với nhau bằng một cạnh nếu hai loài thú không thể nhốt chung một chuồng.

Áp dụng thuật toán tô màu đồ thị ở mục 2.3, ta tìm ra được số lượng chuồng ít nhất cần có là 3. (**Hình 3.4**)



Hình 3.4

Như vậy, ta thu được lời giải cho bài toán **3.1.1** như sau:

Chuồng 1	Chuồng 2	Chuồng 3
C và F	B và D	A và E

Bài toán 3.1.2 ***Phân chia tần số***

Bài toán 3.1.3 ***Lập thời gian biểu***

Trong một trường đại học có m giảng viên x_1, x_2, …x_m giảng dạy n lớp y_1, y_2, … y_n, mỗi lớp được dạy trong p_i tiết. Tại một thời điểm, mỗi giảng viên chỉ có thể dạy nhiều nhất 1 lớp và mỗi lớp chỉ được dạy nhiều nhất bởi một giảng viên. Ban giám hiệu muốn lập một thời gian biểu sao cho sử dụng ít thời gian nhất thỏa mãn yêu cầu trên.

Bài toán 3.1.4 ***Bài toán nữ sinh Lucas***.

Bài toán 3.1.5 ***Tô màu bản đồ***.

Bài toán 3.1.6 ***Các thanh ghi chỉ số***.

3.2 MỘT SỐ BÀI TẬP LIÊN QUAN ĐẾN SẮC SỐ CỦA ĐỒ THỊ

Bài toán 3.2.1

Chứng minh không thể dùng hai màu để tô các đỉnh của một thất giác đều được.

Giải

Xét đồ thị G(V, E) với các đỉnh là các đỉnh của thất giác và các cạnh là các cạnh của thất giác. Do G(V, E) là một chu trình có độ dài 7 – độ dài lẻ- nên có sắc số bằng 3, vì thể không thể dùng hai màu để tô các đỉnh của một thất giác đều được.

Bài toán 3.2.2

Chứng minh với mọi số tự nhiên n, luôn tồn tại đồ thị G (V, E) có sắc số bằng n.

Bài toán 3.2.3

Cho G là một đơn đồ thị phẳng. Chứng minh rằng G có thể tô đúng bằng hai màu khi và chỉ khi G là đồ thị lưỡng phân.

Bài toán 3.2.4

Chứng minh rằng một đơn đồ thị phẳng liên thông có thể tô đúng các miền bằng hai màu khi và chỉ khi đó là một đồ thị Euler.

3.3 ỨNG DỤNG TÔ MÀU ĐỒ THỊ TRONG GIẢI TOÁN

3.3.1 Một số khẳng định về tô màu đồ thị

Khẳng định 3.1

Cho G(V, E) là đồ thị đầy đủ với các cạnh được tô bằng màu xanh hoặc đỏ. Khi đó tổng số đỉnh mà mỗi đỉnh là mút của một số lẻ cạnh màu đỏ là số chẵn.

Ví dụ 3.1

Trong lớp 10/1, An có số bạn thân là một số lẻ. Chứng minh rằng có một học sinh khác An mà số bạn thân cũng là một số lẻ.

Giải

Ta xây dựng đồ thị đầy đủ G(V, E) mô tả bài toán:

- Tập đỉnh V: Lấy n điểm trong mặt phẳng tương ứng với n học sinh và dùng thứ tự của n học sinh đó kí hiệu các đỉnh.

- Tập cạnh E: Hai đỉnh được nối với nhau bằng một cạnh màu xanh khi hai học sinh tương ứng với hai đỉnh đó không thân nhau, bằng một cạnh màu đỏ khi hai học sinh tương ứng với hai đỉnh đó thân nhau.

Giải toán trên đồ thị.

Đồ thị G(V, E) trên là đồ thị màu đầy đủ với các cạnh được tô màu xanh hoặc đỏ. Từ giả thiết suy ra, đồ thị G(V, E) có một đỉnh là mút của một số lẻ cạnh màu đỏ. Theo khẳng định 3.1 thì đồ thị G(V, E) còn có ít nhất một đỉnh là mút của một số lẻ cạnh màu đỏ. Suy ra có một học sinh khác An có số bạn thân là số lẻ.

Ví dụ 3.2

Trong một lớp học có một em học sinh có số bạn thân là một số lẻ. Chứng minh rằng trong lớp có 2 em có số bạn thân chung là một số chẵn.

Giải

Gọi A là học sinh chơi thân với một số lẻ bạn trong lớp. Các học sinh chơi thân với A là A_1, A_2, A_3, … A_{2n+1}. Xét G(V, E) là đồ thị màu đầy đủ với tập đỉnh là A_1, A_2, A_3, … A_{2n+1}.

Hai đỉnh nối với nhau bằng một cạnh màu đỏ nếu hai học sinh tương ứng chơi thân với nhau, bằng màu xanh nếu không chơi thân với nhau. Đồ thị G(V, E) có lẻ đỉnh. Theo khẳng định 3.1, tổng số đỉnh mà mỗi đỉnh là mút của lẻ cạnh màu đỏ là một số chẵn, suy ra đồ thị màu đầy đủ G(V, E) phải có đỉnh là mút của chẵn cạnh màu đỏ. Gọi đỉnh đó là A_i. Khi đó, A và A_i có số bạn thân chung là một số chẵn.

Khẳng định 3.2

G (V, E) là đồ thị đầy đủ với các cạnh được tô bởi màu xanh hoặc màu đỏ. Khi đó tồn tại ít nhất hai đỉnh của đồ thị mà số cạnh màu đỏ tại hai đỉnh này bằng nhau.

Ví dụ 3.3

Có 10 đội bóng thi đấu với nhau theo thể thức mỗi đội lần lượt đấu với các đội còn lại. Chứng minh rằng ở bất kỳ thời điểm nào ta cũng tìm được ít nhất hai đội có số trận đã đấu như nhau.

Giải

Ta xây dựng đồ thị màu đầy đủ G(V, E) mô tả bài toán.

Tập đỉnh V: Lấy 10 điểm trên mặt phẳng tương ứng với 10 đội bóng và dùng thứ tự của mỗi đội đó để kí hiệu các đỉnh.

Tập cạnh E: Hai đỉnh được nối với nhau bằng một cạnh màu xanh khi hai đội bóng tương ứng với hai đỉnh đó chưa đấu với nhau, bằng một cạnh màu đỏ khi hai đội bóng tương ứng với hai đỉnh đó đã thi đấu với nhau.

Giải toán trên đồ thị: Đồ thị G(V, E) được xây dựng như thế là đồ thị màu đầy đủ với các cạnh được tô xanh hoặc đỏ. Theo khẳng định 3.2 thì đồ thị G(V, E) có ít nhất hai đỉnh là mút của cùng một số cạnh đỏ. Suy ra có ít nhất hai đội bóng đã đấu một số trận như nhau.

Ví dụ 3.4

Chứng minh trong một lớp học có ít nhất hai học sinh mà số bạn thân trong lớp của mỗi học sinh này bằng nhau.

Giải

Ta xây dựng đồ thị màu G(V, E) đầy đủ mô tả bài toán.

Tập đỉnh V: Lấy n điểm trên mặt phẳng tương ứng với n học sinh và dùng thứ tự của n học sinh đó để kí hiệu các đỉnh.

Tập cạnh E: Hai đỉnh được nối với nhau bằng một cạnh màu xanh khi hai học sinh tương ứng với hai đỉnh đó không thân nhau, bằng một cạnh màu đỏ khi hai học sinh tương ứng với hai đỉnh đó thân nhau.

Giải toán trên đồ thị:

Đồ thị G(V, E) được xây dựng như thế là đồ thị màu đầy đủ với các cạnh được tô xanh hoặc đỏ. Theo khẳng định 3.2 thì đồ thị G(V, E) có ít nhất hai đỉnh là mút của cùng một số cạnh đỏ. Suy ra có ít nhất hai học sinh mà mỗi học sinh có số bạn thân trong lớp bằng nhau.

Ví dụ 3.5

Chứng minh trong 100 số tự nhiên bất kỳ, luôn tồn tại hai số a và b sao cho trong 100 số đã cho thì số các số nguyên tố cùng nhau với a bằng số các số nguyên tố cùng nhau với b.

Khẳng định 3.3

Đồ thị đầy đủ G(V, E) gồm n đỉnh với các cạnh được tô bằng màu xanh hoặc đỏ mà trong 4 đỉnh tùy ý có ít nhất một đỉnh được nối bằng cạnh màu đỏ với 3 đỉnh còn lại. Khi đó đồ thị G(V, E) có ít nhất (n-3) đỉnh mà mỗi đỉnh này được nối với các đỉnh còn lại bằng cạnh màu đỏ

Ví dụ 3.6 (Vô địch Mĩ 1982)

Trong một nhóm gồm có 1982 người, cứ 4 người bất kỳ thì có thể chọn ra được ít nhất một người quen với 3 người còn lại. Hỏi có ít nhất bao nhiêu người quen với tất cả những người trong nhóm

Giải

Ta xây dựng đồ thị màu đầy đủ G(V, E) mô tả bài toán.

Tập đỉnh V: Lấy 1982 điểm trên mặt phẳng hay trong không gian tương ứng với số người của nhóm và dùng mã số từng người để ghi tên các điểm tương ứng.

Tập cạnh E: Hai đỉnh được nối với nhau bằng một cạnh màu đỏ khi hai người tương ứng với hai đỉnh đó quen nhau, bằng một cạnh màu xanh khi hai người đó không quen nhau.

Giải toán trên đồ thị:

Đồ thị G(V, E) được xây dựng như thế là đồ thị màu đầy đủ với 1982 đỉnh và cứ 4 đỉnh tùy ý thì có ít nhất một đỉnh nối với 3 đỉnh còn lại bằng cạnh màu đỏ. Theo khẳng định 3.3 thì ít nhất có 1982-3=1979 đỉnh được nối với các đỉnh còn lại bằng cạnh màu đỏ. Vậy số nhỏ nhất những người quen với tất cả người còn lại là 1979.

Ví dụ 3.7

Cho 2011 số tự nhiên tùy ý, mà cứ 4 số bất kỳ trong số đó thì có ít nhất một số có ước chung với 3 số còn lại. Chứng minh tồn tại ít nhất 2008 số mà mỗi số này có ước chung với tất cả các số còn lại.

Xét hai dãy số nguyên dương:

$$a_1 = 2,\ a_2=5, \ldots a_{n+1} = (n+1)a_n +1$$

$$u_2 = 3,\ u_3 = 6, \ldots,\ u_{n+1} = (u_n-1)n +2.$$

Ta có các khẳng định sau:

Khẳng định 3.4

a) Đồ thị đầy đủ với a_n+1 đỉnh mà các cạnh được tô bằng n màu, luôn luôn có đồ thị con đầy đủ K_3 với các cạnh cùng màu.

b) Đồ thị đầy đủ với u_{n+1} ($n\geq1$) đỉnh mà các cạnh được tô bằng n màu, luôn luôn có đồ thị con đầy đủ K_3 với các cạnh cùng màu.

Ví dụ 3.8

Chứng minh rằng từ sáu số vô tỷ tùy ý có thể chọn ra được ba số (mà ta sẽ gọi là a, b, c) sao cho a+b, b+c, c+a cũng là số vô tỷ .

Giải a) Ta xây dựng đồ thị đầy đủ G(V, E) mô tả bài toán:

- Tập đỉnh V: Lấy 6 đỉnh không thẳng hàng trên mặt phẳng tương ứng với 6 số vô tỷ.

- Tập cạnh E: Hai đỉnh mang số a và b được nối với nhau bởi một cạnh tô màu đỏ nếu tổng của chúng là số vô tỷ, tô màu xanh nếu tổng của chúng là số hữu tỷ.

b) Giải toán trên đồ thị: Ta có đồ thị đầy đủ gồm 6 đỉnh và được tô bằng hai màu cạnh. Theo khẳng định 3.4 thì trong đồ thị G(V, E) luôn tồn tại một tam giác cùng màu. Giả sử tam giác đó có ba đỉnh kí hiệu là a, b, c. Chỉ có hai khả năng xảy ra:

1. Nếu tam giác đó là tam giác xanh. Khi đó, a+b, b+c, c+a là 3 số hữu tỷ. Lúc này (a+b) + (b+c) – (c+a) = 2b cũng là số hữu tỷ. Điều này vô lý vì b là số vô tỷ.

2. Nếu tam giác đó là tam giác đỏ. Khi đó, a+b, b+c, c+a là 3 số vô tỷ. Đó là điều phải chứng minh.

Ví dụ 3.9

Cho 6 số nguyên dương tùy ý. Chứng minh rằng luôn có thể chọn ra được 2 bộ 3 số mà trong mỗi bộ, từng đôi một đều là nguyên tố cùng nhau hoặc đều không nguyên tố cùng nhau.

Giải

a) Ta xây dựng đồ thị đầy đủ G(V, E) mô tả bài toán:

- Tập đỉnh V: Lấy sáu đỉnh không thẳng hàng trên mặt phẳng tương ứng với sáu số cho ở đề bài.

- Tập cạnh E: Hai đỉnh được nối với nhau bởi một cạnh tô màu xanh nếu hai số tương ứng nguyên tố cùng nhau, tô màu đỏ nếu hai số tương ứng không nguyên tố cùng nhau.

b) Giải toán trên đồ thị:

Ta có đồ thị đầy đủ gồm sáu đỉnh và được tô bằng hai màu cạnh. Theo khẳng định 3.4 thì trong đồ thị G(V, E) luôn tồn tại ít nhất tam giác với các cạnh cùng màu đỏ hoặc xanh. Nếu cả hai tam giác đều màu đỏ, thì ta có hai bộ ba số, mà trong mỗi bộ, chúng đôi một nguyên tố cùng nhau. Nếu chỉ có một tam giác màu đỏ, thì ta được một bộ ba số đôi một nguyên tố cùng nhau, và một bộ ba số đôi một không nguyên tố cùng nhau. Nếu cả hai tam giác màu xanh, nghĩa là ta được hai bộ ba số, mà trong mỗi bộ, chúng đôi một không nguyên tố cùng nhau.

Ví dụ 3.10

Cho sáu đường thẳng trong không gian, trong đó không có ba đường thẳng nào song song, không có ba đường thẳng nào đồng quy và không có ba đường thẳng nào nằm trong một mặt phẳng. Chứng minh rằng từ sáu đường thẳng đó bao giờ cũng lấy ra được ba đường thẳng đôi một chéo nhau.

Nhận xét

Các ví dụ 3.8, 3.9, 3.10 có thể phát biểu lại như sau:

“Cho đồ thị đầy đủ 6 đỉnh K_6 với các cạnh được tô bởi một trong hai màu. Chứng minh luôn tồn tại đồ thị con K_3 với ba cạnh cùng màu”.

Trong mục 2.7 về số Ramsey, ta đã biết rằng R(3,3)=6 (mệnh đề 2.2), n=6 là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn tính chất: Nếu mỗi cạnh của đồ thị đầy đủ K_n được tô bởi một trong hai màu (chẳng hạn xanh hoặc đỏ) thì K_n chứa K_3 xanh hoặc đỏ. Với mọi số nguyên dương m>n thì đồ thị K_m cũng có tính chất như thế. Như vậy, các ví dụ 3.8, 3.9, 3.10 có thể giải như cách chứng minh mệnh đề 2.2.

Ví dụ 3.11

Có 17 thành phố mà từ mỗi thành phố đều có thể đi đến 16 thành phố còn lại bằng một trong ba phương tiện: Xe bus, tàu điện ngầm và xe lửa. Biết rằng từng cặp hai thành phố chỉ có thể đi lại bởi một phương tiện trong ba phương tiện trên. Chứng minh rằng luôn có 3 thành phố mà ta có thể đi lại bởi cùng một phương tiện.

Giải a) Ta xây dựng đồ thị đầy đủ G(V, E) mô tả bài toán:

- Tập đỉnh V: Lấy 17 đỉnh không thẳng hàng trên mặt phẳng tương ứng với 17 thành phố cho ở đề bài.

- Tập cạnh E: Hai đỉnh được nối với nhau bởi một cạnh tô màu đỏ nếu hai thành phố có thể đi lại bằng xe bus, tô màu xanh nếu hai thành phố đi lại bằng tàu điện ngầm, và tô màu vàng nếu hai thành phố đi lại bằng xe lửa.

b) Giải toán trên đồ thị:

Ta có đồ thị đầy đủ gồm 17 đỉnh và được tô bằng ba màu cạnh. Theo khẳng định 3.4 thì trong đồ thị G(V, E) luôn tồn tại một tam giác cùng màu. Điều đó có nghĩa là luôn có 3 thành phố mà ta có thể đi lại bởi cùng một phương tiện.

Nhận xét:

Ta đã biết rằng R(3,3,3;2)=17 (Mệnh đề 2.12), như vậy, Ví dụ 3.11 hoàn toàn có thể được giải như cách chứng minh Mệnh đề 2.12.

Khẳng định 3.5

Trong một đồ thị đầy đủ có $u_{n+1} - 1$ đỉnh ($n \geq 2$) với n màu cạnh (các cạnh được tô bằng n màu), sao cho không tam giác cùng màu nào, luôn luôn có hình năm cạnh với các cạnh cùng màu và các đường chéo được tô bằng các màu khác.

Ví dụ 3.12

Một nhóm gồm 5 thành viên trong đó mỗi bộ ba đều có 2 người quen nhau và 2 người không quen nhau. Chứng minh rằng có thể xếp cả nhóm ngồi xung quanh 1 bàn tròn để mỗi người ngồi giữa 2 người mà thành viên đó quen.

Ví dụ 3.13

Cho 5 số tự nhiên lớn hơn 1, mà cứ 3 số bất kỳ đều có 2 số nguyên tố cùng nhau và hai số không nguyên tố cùng nhau.

Chứng minh rằng có thể ghi 5 số trên lên một đường tròn, để mỗi số đều đứng giữa 2 số mà nó nguyên tố cùng nhau (hoặc không nguyên tố cùng nhau) với hai số bên cạnh.

Giải (Ví dụ 3.12 và Ví dụ 3.13)

Ta xây dựng đồ thị đầy đủ G(V, E) mô tả bài toán:

a) Tập đỉnh V: Lấy 5 điểm trên mặt phẳng, không có 3 điểm nào thẳng hàng tương ứng với 5 thành viên (5 số tự nhiên lớn hơn 1). Dùng ngay tên các thành viên (các số) để ghi tên các điểm tương ứng.

b) Tập cạnh E: Cạnh đỏ để nối giữa hai đỉnh tương ứng với hai người quen nhau (hai số nguyên tố cùng nhau). Cạnh xanh để nối giữa hai đỉnh tương ứng với hai người không quen nhau (hai số không nguyên tố cùng nhau).

Từ giả thiết bài toán suy ra trong đồ thị G không có tam giác cùng màu.

Theo khẳng định 3.5, với n=2 đồ thị G tương ứng là đa giác 5 cạnh với các cạnh màu đỏ và các đường chéo màu xanh hoặc ngược lại. Khi đó dựa theo đường gấp khúc khép kín màu đỏ mà sắp xếp các thành viên (các số) tương ứng ngồi xung quanh một bàn tròn (lên một đường tròn), thì mỗi thành viên (mỗi số) sẽ ngồi giữa hai người mà thành viên có quen (đứng giữa hai số mà nó nguyên tố cùng nhau).

Khẳng định 3.6

Đồ thị đầy đủ gồm n đỉnh ($n \geq 6$) và được tô bằng không quá 2 màu cạnh, thì luôn có ít nhất n – 4 tam giác cùng màu.

Ví dụ 3.14

Chứng minh rằng trong n ($n \geq 6$) người tùy ý luôn chọn được n - 4 bộ ba, mà trong mỗi bộ ba này hoặc từng đôi một quen nhau hoặc từng đôi một không quen nhau.

Ví dụ 3.15

Chứng minh rằng trong n ($n \geq 6$) số nguyên dương tùy ý luôn luôn chọn được n - 4 bộ ba, mà trong mỗi bộ ba này từng cặp số có ước chung hoặc nguyên tố cùng nhau.

Ví dụ 3.16

Với n=5 thì các khẳng định phát biểu trong các Ví dụ 3.14, 3.15   còn đúng nữa không?

Giải (Ví dụ 3.14, 3.15)

a) Xây dựng đồ thị mô tả quan hệ

i) Đỉnh: Lấy n điểm ($n \geq 6$) tương ứng với n người (n là số nguyên) đã chọn ra.

ii) Cạnh: Cạnh đỏ để nối giữa hai điểm tương ứng với hai người quen (hai số có ước chung); cạnh xanh để nối giữa hai điểm tương ứng với hai người không quen nhau (hai số nguyên tố cùng nhau).

Theo khẳng định 3.6, trong đồ thị G tương ứng có ít nhất n-4 tam giác cùng màu. Nếu tam giác màu đỏ, thì ba người tương ứng quen nhau từng đôi một (ba số tương ứng có ước chung từng đôi một). Nếu tam giác màu xanh, thì ba người tương ứng không quen nhau từng đôi một (ba số tương ứng nguyên tố cùng nhau).

Giải (ví dụ 3.16)

Với n=5, thì các khẳng định phát biểu trong các ví dụ 3.14, 3.15 không còn đúng nữa. Thật vậy, nếu xuất phát từ đồ thị G đầy đủ gồm 5 đỉnh (tương ứng với 5 đối tượng được xét) với các cạnh được tô bằng hai màu.

Cạnh đỏ (nét liền) biểu hiện quan hệ quen nhau (có ước chung), cạnh xanh (nét đứt) biểu hiện quan hệ không quen nhau (nguyên tố cùng nhau).

Vì đồ thị G không có tam giác cùng màu Hình 3.10 nên không có:

- Một bộ ba người nào tương ứng với các đỉnh mà hoặc quen nhau từng đôi một hoặc không quen nhau từng đôi một.
- Một bộ ba số nào tương ứng với các đỉnh mà hoặc có ước chung từng đôi một hoặc nguyên tố cùng nhau.

Khẳng định 3.7

Trong đồ thị đầy đủ gồm chín đỉnh K_9 với các cạnh được tô bằng một trong hai màu xanh, đỏ luôn tìm được đồ thị đầy đủ K_3 xanh hoặc đồ thị đầy đủ K_4 đỏ (hoặc ngược lại nếu ta đổi hai màu cho nhau).

Nhận xét

Ta đã biết rằng R(3,4)=9 (Mệnh đề 2.8), tức là 9 là số nhỏ nhất có tính chất (3,4)-Ramsey. Như vậy, Khẳng định 3.7 hoàn toàn có thể chứng minh như ở Mệnh đề 2.8.

Ví dụ 3.17

Trong phòng có 9 người, trong đó bất kì 3 người nào cũng có hai người quen nhau. Chứng minh rằng có 4 người từng đôi một quen nhau.

Giải

Ta cho tương ứng mỗi người với một đỉnh của đồ thị, hai đỉnh được nối với nhau bằng cạnh màu đỏ nếu 2 người quen nhau, hai đỉnh được nối với nhau bằng cạnh xanh nếu 2 người không quen nhau.

Vì bất kì 3 người nào cũng có hai người quen nhau nên trong đồ thị G không chứa K_3 xanh. Do đó, theo kết quả của khẳng định 3.7 đồ thị G chứa tứ giác đỏ. Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 3.18

Chứng minh rằng trong 9 số nguyên dương tuỳ ý, mà 3 số bất kỳ đều có 2 số nguyên tố cùng nhau, luôn luôn tìm được 4 số nguyên tố cùng nhau (từng cặp nguyên tố cùng nhau).

Giải

Xây dựng đồ thị G = (V, E).

+ Đỉnh của đồ thị: Trên mặt phẳng lấy 9 điểm tương ứng với 9 số nguyên dương tùy ý đã chọn ra. Dùng các số đã chọn để ghi tên các điểm tương ứng.

+ Cạnh của đồ thị: Dùng cạnh đỏ để nối giữa hai đỉnh tương ứng với hai số nguyên tố cùng nhau, cạnh xanh để nối giữa hai đỉnh tương ứng với hai số không nguyên tố cùng nhau.

Đồ thị G nhận được mô tả toàn bộ quan hệ được cho trong bài toán và thoả mãn điều kiện của khẳng định 3.7**,** do đó trong G hoặc có đồ thị đầy đủ K_3 hoặc có K_4 với các cạnh cùng màu. Lại do trong 3 số bất kỳ đều có 2 số nguyên tố cùng nhau nên trong G không có K_3 màu xanh, tức là trong G luôn có K_4 đỏ. Vậy trong 9 số nguyên dương tuỳ ý, mà 3 số bất kỳ đều có 2 số nguyên tố cùng nhau luôn luôn tìm được 4 số nguyên tố cùng nhau (từng cặp nguyên tố cùng nhau). Bài toán được chứng minh.

Khẳng định 3.8

Trong đồ thị đầy đủ gồm mười bốn đỉnh K_{14} với các cạnh được tô bằng một trong hai màu xanh, đỏ luôn tìm được đồ thị đầy đủ K_3 (mà các đỉnh của nó nằm trong tập đỉnh đã cho) với các cạnh được tô cùng màu xanh, hoặc đồ thị đầy đủ K_5 (mà các đỉnh của nó nằm trong tập đỉnh đã cho) với các cạnh được tô cùng màu đỏ (hoặc ngược lại nếu ta đổi màu cho nhau).

Nhận xét

Ta nhắc lại rằng, R(3,5)=14(Mệnh đề 2.9). Như vậy 14 là số nguyên dương nhỏ nhất làm cho bài toán trên được thỏa mãn. Phần chứng minh của mệnh đề này có thể làm lời giải cho khẳng định 3.8 .

Ví dụ 3.19

Có 14 hùng biện viên tham gia cuộc thi SV 2011. Biết rằng cứ 3 người bất kỳ thì có ít nhất hai người cùng chung một đề tài. Chứng minh luôn có 5 người bất kỳ (trong số 14 người này) cùng chung một đề tài

Giải a) Ta xây dựng đồ thị đầy đủ G(V, E) mô tả bài toán:

- Tập đỉnh V: Lấy 14 đỉnh không thẳng hàng trên mặt phẳng tương ứng với 14 hùng biện viên.

- Tập cạnh E: Hai đỉnh được nối với nhau bởi một cạnh tô màu đỏ nếu hai hùng biện viên có chung đề tài, tô màu xanh nếu hai hùng biện viên không có chung đề tài

b) Giải toán trên đồ thị:

Theo khẳng định 3.8 thì trong đồ thị G(V, E) luôn tồn tại K_3 hoặc K_5 cùng màu. Mặt khác, vì 3 người bất kỳ thì có ít nhất hai người cùng chung một đề tài nên trong đồ thị G không có K_3 xanh. Suy ra trong G có K_5 đỏ. Từ đó ta có lời giải cho bài toán.

Khẳng định 3.9

Cho đồ thị đầy đủ gồm mười tám đỉnh K_{18} với các cạnh được tô bằng một trong hai màu. Chứng minh luôn tìm được đồ thị đầy đủ K_4 (mà các đỉnh của nó nằm trong tập đỉnh đã cho) với các cạnh được tô cùng màu.

Ví dụ 3.20

Chứng minh rằng trong mười tám người tùy ý ta có thể chọn ra bốn người hoặc đôi một quen biết nhau, hoặc đôi một không quen biết nhau.

Giải a) Ta xây dựng đồ thị đầy đủ G(V, E) mô tả bài toán:

- Tập đỉnh V: Lấy 18 đỉnh trên mặt phẳng tương ứng với 18 người

- Tập cạnh E: Hai đỉnh bất kì được nối với nhau bởi một cạnh tô màu đỏ nếu hai người tương ứng quen biết nhau, tô màu xanh nếu hai người tương ứng không quen biết nhau.

b) Giải toán trên đồ thị: Theo kết luận của Khẳng định 3.9 thì trong đồ thị G(V, E) luôn tồn tại một tứ giác mà các cạnh và các đường chéo cùng màu, tức là luôn chọn được bốn người hoặc đôi một quen biết nhau hoặc đôi một không quen biết nhau.

Khẳng định 3.10

Cho đồ thị đầy đủ có 16 đỉnh K_{16}. Tại mỗi đỉnh của đồ thị K_{16}, trong số 15 cạnh nối nó với các đỉnh còn lại, ta tô màu ít nhất 11 cạnh. Chứng minh rằng với một đỉnh bất kỳ thuộc 16 đỉnh đã cho, luôn tồn tại ba đỉnh khác nữa để lập thành đồ thị đầy đủ K_4 có các cạnh đều được tô màu.

Ví dụ 3.21

Có 16 em thi đấu bóng bàn. Theo lịch, mỗi em phải thi đấu với một bạn khác một trận. Hiện nay mỗi em thi đấu 11 trận. Chứng minh rằng, khi đó luôn tìm được 4 em mà mỗi em đều đã đấu với 3 em còn lại.

Giải a) Ta xây dựng đồ thị đầy đủ G(V, E) mô tả bài toán:

- Tập đỉnh V: Lấy 16 đỉnh trên mặt phẳng tương ứng với 16 em

- Tập cạnh E: Hai đỉnh bất kì được nối với nhau bởi một cạnh tô màu đỏ nếu hai em đã thi đấu với nhau

b) Giải toán trên đồ thị: Với một đỉnh bất kỳ thuộc 16 đỉnh đã cho, luôn tồn tại ba đỉnh khác nữa để lập thành đồ thị đầy đủ K_4 có các cạnh đều được tô màu. Tức là luôn tìm được bốn em mà mỗi em đã đấu với ba em còn lại.

Khẳng định 3.11

Cho đồ thị đầy đủ có (3n+1) đỉnh K_{3n+1}. Tại mỗi đỉnh của đồ thị K_{3n+1}, trong số 3n cạnh nối nó với các đỉnh còn lại, ta tô màu ít nhất 2n+1 cạnh. Chứng minh rằng với một đỉnh bất kỳ thuộc 3n+1 đỉnh đã cho, luôn tồn tại ba đỉnh khác nữa để lập thành đồ thị đầy đủ K_4 có các cạnh đều được tô màu.

Ví dụ 3.22

Trong phòng có 100 người mà mỗi người quen ít nhất 67 trong số 99 người còn lại. Hỏi liệu có xảy ra hay không trường hợp bất kỳ 4 người nào đó trong phòng cũng có 2 người quen nhau?

Giải

Câu trả lời là có. Ta có thể thấy được điều này khi áp Khẳng định 3.11 với n=33.

Khẳng định 3.12

Cho đồ thị đầy đủ có 16 đỉnh K_{16}. Tại mỗi đỉnh của đồ thị K_{16}, trong số 15 cạnh nối nó với các đỉnh còn lại, ta tô màu ít nhất 13 cạnh. Chứng minh rằng với một đỉnh bất kỳ thuộc 16 đỉnh đã cho, luôn tồn tại năm đỉnh khác nữa để lập thành đồ thị đầy đủ K_6 có các cạnh đều được tô màu.

Ví dụ 3.23

Trong một thành phố có 16 quận và mỗi quận có đường giao thông nối với ít nhất 13 quận khác. Chứng minh rằng luôn tồn tại 6 quận đôi một có đường giao thông nối chúng với nhau.

Giải

Xây dựng đồ thị G = (V, E) mô tả các đường giao thông nối các quận với nhau. Đỉnh đồ thị là các quận. Cạnh của đồ thị: Hai đỉnh được nối với nhau bởi một cạnh nếu như hai quận có 1 đường giao thông nối chúng với nhau.

Theo kết quả của Khẳng định 3.12 ta suy ra đồ thị G = (V, E) luôn tồn tại đồ thị con K_6. Vậy luôn tồn tại 6 quận đôi một có đường giao thông nối chúng với nhau.

Khẳng định 3.13

Chứng minh rằng trong đồ thị G(X, E) với ít nhất kn+1 đỉnh, mỗi đỉnh có bậc không nhỏ hơn (k-1)n+1 luôn tồn tại đồ thị con đầy đủ gồm k+1 đỉnh.

3.3.2 Một số bài toán áp dụng khác

Ví dụ 3.24

Trên một tàu du lịch, người ta nhận thấy cứ 10 người bất kỳ thì có ít nhất 3 người cùng quốc tịch. Hỏi có nhiều nhất bao nhiêu quốc gia có khách du lịch đi trên tàu.

Giải : Xây dựng đồ thị G(V, E) như sau:

- Tập đỉnh V: Lấy n điểm trên mặt phẳng hoặc trong không gian tương ứng với n khách du lịch. Dùng mã số vé tàu của khách để kí hiệu các đỉnh.

- Tập cạnh E: Hai đỉnh được nối với nhau bằng một cạnh và được tô màu khi hai hành khách tương ứng có cùng quốc tịch (với mỗi quốc tịch ta tô một màu)

Giải toán trên đồ thị:

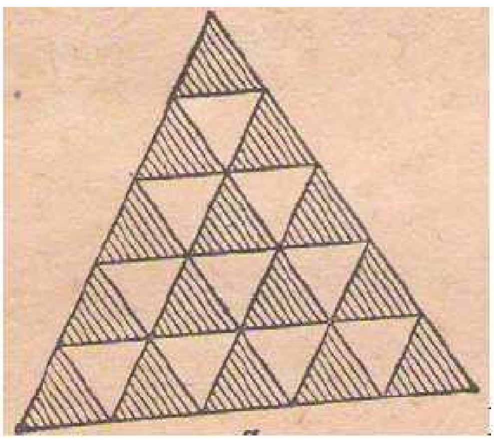
Từ giả thiết ta có đồ thị G(V, E) không thể phân tích thành quá 5 đồ thị con đầy đủ với các cạnh khác màu là G_1, G_2, G_3, G_4, G_5. Các đồ thị con đầy đủ này có ít nhất 3 đỉnh. Lấy từ mỗi đồ thị con 2 đỉnh và các cạnh nối chúng, ta được đồ thị con của G(V, E) gồm 10 đỉnh nhưng không có chu trình tam giác cùng màu. Điều này mâu thuẫn với giả thiết cứ 10 đỉnh thì có 3 đỉnh tạo thành tam giác cùng màu.

Xét trường hợp G (V, E) phân tích được thành 4 đồ thị con đầy đủ với các cạnh cùng màu. Khi đó, nếu ta lấy 10 đỉnh bất kì cùng các cạnh nối các đỉnh đó (nếu có) thì ít nhất có 3 đỉnh được chọn từ cùng một đồ thị con. Suy ra có tam giác với các cạnh cùng màu. Vậy nhiều nhất có 4 quốc gia có khách du lịch trên tàu.

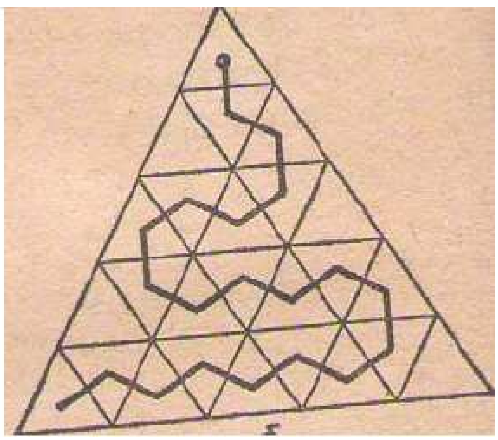
Ví dụ 3.25

Một nhà triển lãm có n^2 phòng tam giác đều. Hai phòng triển lãm được gọi là hai phòng láng giềng nếu chúng có cạnh chung. Từ mỗi phòng đều có cửa đi sang phòng láng giềng của nó. Một khách du lịch muốn đi xem càng nhiều càng tốt số phòng triển lãm với điều kiện mỗi phòng chỉ đi qua đúng một lần. Hỏi anh ta có thể đi tối đa bao nhiêu phòng.

Giải: Tô các phòng triển lãm thành các ô hai màu đen trắng xen kẽ như **Hình 3.16**.



Hình 3.16



Hình 3.17

Với n≥2, số phòng có màu trắng sẽ là $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

Số phòng đen sẽ là: $1+2+3+...+n-1=\frac{n(n-1)}{2}$.

Như vậy, số ô đen nhỏ hơn số ô trắng là $\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n(n-1)}{2}=n\geq 2$ ô.

Trong quá trình đi xem, khách du lịch luôn phải đi từ phòng trắng sang phòng đen hoặc ngược lại. Giả sử có thể đi tham quan tất cả các phòng sao cho mỗi phòng đi qua đúng một lần. Khi đó, số phòng đen chỉ ít hơn số phòng trắng một phòng. Mâu thuẫn với tính toán trên. Như vậy, không thể đi tham quan tất cả các phòng được.

Do mỗi phòng chỉ đi qua đúng một lần mà phải đi xen kẽ các phòng đen trắng liên tiếp nên số phòng màu trắng đi qua chỉ hơn số phòng màu đen một phòng. Như vậy, nếu đi qua tất cả phòng đen thì tối đa tổng số phòng có thể tham quan là: $\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}+1=n^2-n-1$ phòng. Có thể thực hiện điều này theo đường đi như **Hình 3.17**.

Ví dụ 3.26

Cho 9 điểm trong không gian, trong đó không có 4 điểm nào nằm trong cùng một mặt phẳng. Tất cả những điểm này được nối với nhau từng cặp bằng đoạn thẳng. Mỗi đoạn thẳng được tô màu xanh hoặc đỏ hoặc không tô màu. Tìm giá trị nhỏ nhất của n sao cho với mọi cách tô màu n đoạn thẳng tùy ý ta đều tìm được một tam giác có các cạnh cùng màu (Thi học sinh giỏi quốc tế năm 1992)

Ví dụ 3.27

Chứng minh ta có thể tô màu các cạnh của đồ thị liên thông G bởi hai màu xanh, đỏ sao cho số cạnh đỏ và số cạnh xanh xuất phát tại mỗi đỉnh của đồ thị luôn bằng nhau khi và chỉ khi G có số chẵn cạnh và bậc của mỗi đỉnh của G là số chẵn.

3.4 TÔ MÀU ĐIỂM TRONG MẶT PHẲNG VÀ TRONG KHÔNG GIAN

Bài toán 3.4.1

Các điểm trong mặt phẳng được tô bởi một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng, với một khoảng cách d cho trước, luôn tồn tại hai điểm cùng màu mà khoảng cách giữa chúng bằng d.

Bài toán 3.4.2

Các điểm của mặt phẳng được tô bởi ba màu đỏ, xanh, vàng. Chứng minh rằng , với một khoảng cách d cho trước, luôn tồn tại hai điểm cùng màu mà khoảng cách giữa chúng bằng d.

Bài toán 3.4.3

Mỗi điểm trong đường thẳng được tô bởi một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh luôn tồn tại ba điểm cùng màu, trong đó có một điểm là trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm kia.

Bài toán 3.4.4

Các điểm của mặt phẳng được tô bởi một trong hai màu xanh, đỏ. Chứng minh rằng luôn tìm được một tam giác đều với ba đỉnh cùng màu.

Bài toán 3.4.5 Mỗi điểm trong mặt phẳng được tô bởi một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh luôn tồn tại một hình chữ nhật có bốn đỉnh cùng màu.

Bài toán 3.4.6

Mỗi điểm của mặt phẳng được tô bởi một trong n màu, với n là số nguyên dương cho trước. Chứng minh rằng tồn tại một hình chữ nhật với các đỉnh được tô cùng màu.

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

Luận văn đã nêu lên được một số kiến thức về bộ môn lý thuyết đồ thị nói chung và bài toán tô màu đồ thị nói riêng qua việc xây dựng một cách có hệ thống một vài kết quả của bài toán tô màu đồ thị và các ví dụ minh họa cho vấn đề này. Qua đó, người đọc có thể nhận ra tính ưu việt của phương pháp này trong giải toán, từ đó có thể giúp ích phần nào cho những ai quan tâm đến vấn đề này, đặc biệt là những học sinh ở các lớp chuyên.

Một số kết quả trong luận văn dựa vào định lý Ramsey. Tuy nhiên, luận văn chỉ mới dừng lại ở một số trường hợp điển hình của định lý. Trong thời gian tới, hướng phát triển của luận văn là chứng minh được thêm nhiều trường hợp khác của định lý này và xây dựng thêm các lớp bài toán có thể giải được bằng cách áp dụng các kết quả trên bên cạnh cách giải truyền thống, từ đó, người đọc có thể so sánh để nhận ra cái hay, cái thú vị của bài toán tô màu. Đó cũng chính là mong muốn của tác giả luận văn.