BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

NGUYỄN THỊ THU HUYỀN

NỬA NHÓM MA TRẬN REES TRÊN MỘT NHÓM

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp

Mã số: 60.46.40

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Đà Nẵng - Năm 2011

Công trình được hoàn thành tại

ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

Người hướng dẫn khoa học: **PGS. TS. NGUYỄN GIA ĐỊNH**

Phản biện 1 : TS. Lê Hải Trung

Phản biện 2 : PGS.TS. Trần Đạo Dõng

Luận văn được bảo vệ trước hội đồng chấm Luận văn tốt nghiệp thạc sĩ khoa học tại Đại học Đà Nẵng vào ngày 28 tháng 5 năm 2011

*. *Có thể tìm hiểu luận văn tại:*

- Trung tâm thông tin - Học liệu, Đại học Đà Nẵng
- Thư viện trường Đại học sư phạm, Đại học Đà Nẵng.

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Lý thuyết nửa nhóm là một phần tương đối trẻ của toán học. Như một hướng tách biệt của đại số với mục tiêu riêng của nó, việc xác định rõ các bài toán và phương pháp nghiên cứu của lý thuyết nửa nhóm được hình thành khoảng cách đây 70 năm. Một trong các động cơ chính đối với sự tồn tại một lý thuyết toán học nào đó là những ví dụ thú vị và tự nhiên. Đối với lý thuyết nửa nhóm, sự lựa chọn rõ ràng nhất cho những ví dụ như thế là nửa nhóm các phép biến đổi. Nhiều phép biến đổi khác nhau của những tập khác nhau xuất hiện ở mọi lúc và mọi nơi trong toán học. Do hợp thành thông thường của phép biến đổi có tính kết hợp, mỗi tập các phép biến đổi đóng đối với phép hợp thành và tạo thành một nửa nhóm.

Khi nghiên cứu về lý thuyết nửa nhóm, nó sẽ giúp chúng ta tìm hiểu được thông tin cần thiết về các tính chất của những nhóm chứa trong nửa nhóm đó. Ngày nay, lý thuyết nửa nhóm có vai trò quan trọng trong việc nghiên cứu một số ngành khoa học cơ bản như: toán học, vật lý...

Lý thuyết nửa nhóm 0-đơn đầy đủ liên thông là một phần quan trọng trong việc nghiên cứu lý thuyết nửa nhóm. Năm 1940, Rees đã đưa vào khái niệm nửa nhóm ma trận trên một nhóm với phần tử không, gọi là nửa nhóm ma trận Rees. Từ đó một lớp các nửa nhóm rộng hơn đã được nghiên cứu như nửa nhóm đơn, nửa nhóm 0-đơn đầy đủ, ... Các lớp nửa nhóm này có ảnh hưởng rất lớn cho sự phát triển sau này của lý thuyết nửa nhóm.

Xuất phát từ nhu cầu phát triển của lý thuyết nửa nhóm và những ứng dụng của nó, chúng tôi quyết định chọn đề tài với tên: **"Nửa nhóm ma trận Rees trên một nhóm"** để tiến hành nghiên cứu. Chúng tôi hy vọng tạo được một tài liệu tham khảo tốt cho những người bắt đầu tìm hiểu về Lý thuyết nửa nhóm và hy vọng tìm ra được một số ví dụ minh họa đặc sắc nhằm góp phần làm phong phú thêm các kết quả trong lĩnh vực này.

2. Mục đích nghiên cứu

Mục tiêu của đề tài nhằm nghiên cứu nửa nhóm 0-đơn đầy đủ. Việc khảo sát nửa nhóm này dựa trên việc nghiên cứu các quan hệ Green, các iđêan trái và phải 0-tối tiểu và cấu trúc $\mathcal{D}$-lớp chính quy của nó. Đề tài đề cập đến một nửa nhóm mà được biểu diễn bởi các ma trận trên một nhóm với phần tử không G^0, gọi là nửa nhóm ma trận Rees. Định lý Rees khẳng định mỗi nửa nhóm 0-đơn đầy đủ là đẳng cấu với nửa nhóm ma trận Rees trên một nhóm với phần tử không.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Đối tượng và phạm vi nghiên cứu của đề tài là khảo sát nửa nhóm 0-đơn đầy đủ dựa trên việc nghiên cứu các quan hệ Green, các iđêan trái và phải 0-tối tiểu và cấu trúc $\mathcal{D}$-lớp chính quy của nó, đề tài đề cập đến một nửa nhóm G^0, gọi là nửa nhóm ma trận Rees.

4. Phương pháp nghiên cứu

- Thu thập các bài báo khoa học của các tác giả nghiên cứu liên quan đến *Lý thuyết nửa nhóm và nửa nhóm 0-đơn đầy đủ liên thông*
- Tham gia các buổi seminar hàng tuần để trao đổi các kết quả đang nghiên cứu.

5. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài

- Tổng quan các kết quả của các tác giả đã nghiên cứu liên quan đến Nửa nhóm 0-đơn đầy đủ liên thông và nửa nhóm ma trận Rees nhằm xây dựng một tài liệu tham khảo cho những ai muốn nghiên cứu lý thuyết nửa nhóm.
- Chứng minh chi tiết và làm rõ một số mệnh đề, cũng như đưa ra một số ví dụ minh hoạ đặc sắc nhằm làm cho người đọc dễ dàng tiếp cận vấn đề được đề cập.

6. Cấu trúc của luận văn

Ngoài phần mở đầu và kết luận, luận văn gồm 3 chương

Chương 1. Các kiến thức cơ sở

Chương 2. Nửa nhóm 0-đơn đầy đủ liên thông

Chương 3. Nửa nhóm ma trận Rees

- Trong Chương 1, chúng tôi trình bày các kiến thức cơ sở sẽ dùng cho các chương sau, như là khái niệm nửa nhóm, iđêan, các quan hệ Green và $\mathcal{D}$-lớp chính quy.

- Trong Chương 2, chúng tôi trình bày các khái niệm và kết quả về iđêan 0-tối tiểu, nửa nhóm 0-đơn, nửa nhóm 0-đơn đầy đủ, nửa nhóm 0-đơn đầy đủ liên thông.
- Nửa nhóm ma trận Rees, định lý Rees, hạng của nửa nhóm ma trận Rees và bài toán cực trị đối với chúng được trình bày trong Chương 3.

Chương 1

CÁC KIẾN THỨC CƠ SỞ

1.1 Nửa nhóm và một số khái niệm liên quan

1.2 Các ví dụ về nửa nhóm

Ví dụ 1.2.1. Cho $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, khi đó $|X| = n$.

1. Ký hiệu $\mathcal{T}_X$ hoặc $\mathcal{T}_n$ là nửa nhóm phép biến đổi đầy đủ với phép hợp thành ánh xạ, đó là tập tất cả các ánh xạ từ X vào X. Khi đó $|\mathcal{T}_X| = n^n$.
   Nếu $X = \{1, 2\}$ thì $\mathcal{T}_2 = \{\left(\begin{smallmatrix}1&2\\1&2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&2\\1&1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&2\\2&2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&2\\2&1\end{smallmatrix}\right)\}$, trong đó $\left(\begin{smallmatrix}1&2\\i&j\end{smallmatrix}\right)$ thay cho $1 \to i, 2 \to j$ với $i, j \in \{1, 2\}$. Ta có thể xem các phần tử của $\mathcal{T}_2$ như những ma trận nên $\mathcal{T}_2$=$\{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)\}$

2. Ký hiệu $\mathcal{P}_X$ hoặc $\mathcal{P}_n$ là nửa nhóm phép biến đổi bộ phận trên X, gồm tất cả các ánh xạ từ một tập con của X vào một tập con của X. Khi đó $|\mathcal{P}_n| = (n+1)^n$.
   Nếu $X = \{1, 2\}$ thì $\mathcal{P}_2 = \{0, \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&2\\1&2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&2\\1&1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&2\\2&2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&2\\2&1\end{smallmatrix}\right)\}$. Có thể xem $\mathcal{P}_2 = \{\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\}$.

3. Ký hiệu $\mathcal{I}_X$ hoặc $\mathcal{I}_n$ là nửa nhóm đối xứng ngược, gồm tất cả các ánh xạ một - một từ một tập con của X lên một tập con của X. Khi đó $|\mathcal{I}_n| = \sum_{r=0}^{n} \left(\begin{smallmatrix}n\\r\end{smallmatrix}\right)^2 r!$.
   Nếu $X = \{1, 2\}$ thì $\mathcal{I}_2 = \{0, \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&2\\1&2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&2\\2&1\end{smallmatrix}\right)\}$.
   Khi đó có thể xem $\mathcal{I}_2 = \{\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\}$.

Ví dụ 1.2.2. Cho X là một tập, gọi $\mathcal{B}_X$ là tập tất cả các quan hệ hai ngôi trên X. Trên $\mathcal{B}_X$ các phép toán hợp thành $\circ$ được định nghĩa như sau: $\forall \rho, \sigma \in \mathcal{B}_X : (a, b) \in \rho \circ \sigma \Leftrightarrow \exists x \in X : (a, x) \in \rho$ và $(x, b) \in \sigma$. Khi đó $(\mathcal{B}_X, \circ)$ là nửa nhóm, gọi là nửa nhóm các quan hệ hai ngôi trên X.

Ví dụ 1.2.3. Giả sử I là một iđêan của nửa nhóm S. Trên S xét quan hệ ρ như sau $\forall a, b \in S : a\rho b \Leftrightarrow a = b$ hoặc $a, b \in I$.
Khi đó ρ là một tương đẳng trên S và gọi là *tương đẳng Rees theo mod I*. Các lớp tương đương của S theo mod ρ là I và các tập một phần tử $\{a\}$ với $a \in S \setminus I$. Khi đó ta viết S/I thay cho S/ρ và gọi S/I là *nửa nhóm thương Rees*.

1.3 Các Quan hệ Green

Ví dụ 1.3.1. Cho S là nửa nhóm với phép nhân được định nghĩa ở bảng sau:

$\bullet$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	c
c	c	b	c

Khi đó $S^1a = \{a, b, c\}, S^1b = \{a, b\}, S^1c = \{c\}, aS^1 = \{a, b, c\}, bS^1 = \{a, b, c\}, cS^1 = \{b, c\}$. Do đó $a\mathcal{R}b$. Hơn nữa : $L_a = \{a\}, L_b = \{b\}, L_c = \{c\}, R_a = \{a, b\} = R_b, R_c = \{c\}$.

Mệnh đề 1.3.1 (**Bổ đề Green**)**.** *Giả sử a và b là các phần tử $\mathcal{R}$-tương đương tùy ý thuộc nửa nhóm S, tức là tồn tại $s, s' \in S^1$ sao cho $as = b, bs' = a$. Khi đó các ánh xạ $x \mapsto xs (x \in L_a)$ và $y \mapsto ys' (y \in L_b)$ là ngược của nhau, bảo toàn các $\mathcal{R}$-lớp và tương ứng là các ánh xạ một-một từ L_a lên L_b và từ L_b lên L_a.*

Mệnh đề 1.3.2. *Giả sử a và c là các phần tử của $\mathcal{D}$-lớp tương đương tùy ý thuộc nửa nhóm S, tức là tồn tại $b \in S$ sao cho $a\mathcal{R}b$ và $b\mathcal{L}c$ hay tồn tại $s, s', t, t' \in S^1$ thỏa $as = b, bs' = a, tb = c, t'c = b$. Khi đó các ánh xạ $x \mapsto txs (x \in H_a)$ và $z \mapsto t'zs' (z \in H_c)$ là ngược của nhau, tương ứng là các ánh xạ một-một từ H_a lên H_c và từ H_c lên H_a. Đặc biệt $|H_a| = |H_c|$ (nghĩa là hai ô của "hộp trứng" có cùng số phần tử).*

Ví dụ 1.3.2. Cho $S = \mathcal{I}_3$ (Xem Ví dụ 1.2.1). Đặt $D_2 = \{x \in S | rank(x) = 2\}$, ở đây $rank(x) = |im(x)|$, S có 34 phần tử và D_2 có 18 phần tử. Khi đó D_2 là một $\mathcal{D}$-lớp của S, D_2 có 3 $\mathcal{R}$-lớp và 3 $\mathcal{L}$-lớp. "Hộp trứng" của D_2 được cho ở Hình 1.1.

1.4 $\mathcal{D}$-lớp chính qui

Bổ đề 1.4.1. *Cho S là một nửa nhóm. Khi đó*
i) Nếu phần tử a thuộc S là chính qui thì $\mathcal{D}$-lớp D_a là chính qui.
ii) Trong mỗi $\mathcal{D}$-lớp chính qui của S, mỗi $\mathcal{L}$-lớp và mỗi $\mathcal{R}$-lớp đều chứa lũy đẳng. Do đó mỗi $\mathcal{L}$-lớp và mỗi $\mathcal{R}$-lớp chứa ít nhất một nhóm $\mathcal{H}$-lớp.

Định lý 1.4.1 (Green). *Cho H là một $\mathcal{H}$-lớp của nửa nhóm S. Khi đó, hoặc $H^2 \cap H = \emptyset$ hoặc $H^2 = H$ và H là một nhóm con của S. Đặc biệt, mọi $\mathcal{H}$-lớp chứa lũy đẳng đều là nhóm.*

Ví dụ 1.4.1. Cho $S = \mathcal{I}_3$. Đặt $D_2 = \{x \in S | rank(x) = 2\}$, (Xem Hình 1.1). Khi đó tập các phần tử luỹ đẳng của D_2 là $E(D_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&0&0\\0&0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&0 \end{pmatrix} \right\}$. Ta thấy mỗi $\mathcal{R}$-lớp và mỗi $\mathcal{L}$-lớp của D_2 chứa một trong các phần tử của $E(D_2)$.

Định lý 1.4.2. *Nếu $a, b \in S$ thì $ab \in R_a \cap L_b$ khi và chỉ khi $R_b \cap L_a$ là một nhóm. Khi đó $aH_b = H_a b = H_a H_b = H_{ab} = R_a \cap L_b$*

Định lý 1.4.3. *Cho $a \in \mathcal{D}$-lớp chính qui D của nửa nhóm S. Khi đó i) Nếu a' là nghịch đảo của a thì $a' \in D$ và hai $\mathcal{H}$-lớp $R_a \cap L_{a'}$, $L_a \cap R_{a'}$ chứa lần lượt các phần tử luỹ đẳng là aa' và $a'a$. ii) Nếu $b \in D$ sao cho $R_a \cap L_b$, $L_a \cap R_b$ chứa lần lượt các phần tử luỹ đẳng e, f. Khi đó H_b chứa a^* là nghịch đảo của a sao cho $aa^* = e, a^*a = f$. iii) Một $\mathcal{H}$-lớp không chứa quá một phần tử nghịch đảo của a.*

Ví dụ 1.4.2. Xét Ví dụ 1.3.2 về "hộp trứng" của D_2. Khi đó

$$e = \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix} \in R_a \cap L_b, \qquad a = \begin{pmatrix} 0&1&0\\0&0&0\\0&0&1 \end{pmatrix} \in R_a \cap L_a = H_a$$

$$f = \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&0&0\\0&0&1 \end{pmatrix} \in R_b \cap L_a, \qquad b = \begin{pmatrix} 0&0&0\\1&0&0\\0&0&1 \end{pmatrix} \in R_b \cap L_b = H_b.$$

Dễ dàng tính được $aba = a$ và $bab = b$, do đó a và b là nghịch đảo của nhau. Hơn nữa, $ab = f$ và $ba = e$.

Định lý 1.4.4. *Nếu H và K là hai nhóm $\mathcal{H}$-lớp trong cùng một $\mathcal{D}$-lớp chính qui thì H và K đẳng cấu với nhau.*

Chương 2

NỬA NHÓM 0-ĐƠN ĐẦY ĐỦ LIÊN THÔNG

2.1 Iđêan 0-tối tiểu và nửa nhóm 0-đơn

Định nghĩa 2.1.1. Một nửa nhóm S được gọi là *đơn (đơn trái, đơn phải)* nếu nó không có iđêan thực sự hai phía (trái, phải).

Một iđêan I của nửa nhóm S được gọi là *tối tiểu* nếu nó không chứa thực sự các iđêan khác của S.

Một iđêan I của nửa nhóm S với phần tử không được gọi là iđêan 0-tối tiểu nếu:

i) $I \neq \{0\}$,

ii) $\{0\}$ là iđêan duy nhất của S mà $\{0\} \subset I$.

Nếu I là iđêan 0-tối tiểu của nửa nhóm S thì do $I^2 \subseteq I$ nên $I^2 = I$ hoặc $I^2 = \{0\}$, hay là hoặc $I^2 = I$ hoặc I là nửa nhóm với phép nhân không.

Nửa nhóm S với phần tử không được gọi là nửa nhóm 0-đơn (0-đơn trái, 0-đơn phải) nếu:

i) $S^2 \neq \{0\}$

ii) S chỉ có các iđêan hai phía (trái, phải) là $\{0\}$ và S.

Ví dụ 2.1.1. Gọi $J_2 = \{x \in M_3(K) | rank(x) = 2\}$. Khi đó J_2^0 là nửa nhóm 0-đơn. Ở đây, $M_3(K)$ là vành các ma trận vuông cấp 3 lấy hệ số trên K.

Bổ đề 2.1.1. *Nếu S là nửa nhóm 0-đơn phải (trái) thì $S \setminus \{0\}$ là một nửa nhóm con đơn phải (trái) của S.*

Bổ đề 2.1.2. *Nửa nhóm S với phần tử không là 0-đơn khi và chỉ khi $SaS = S$ với mỗi a thuộc $S \setminus \{0\}$, nghĩa là nếu và chỉ nếu với mọi $a, b \in S \setminus \{0\}$ tồn tại $x, y \in S$ sao cho $xay = b$.*

Bổ đề 2.1.3. *Giả sử L là một iđêan 0-tối tiểu của nửa nhóm S khi đó hoặc $L^2 = \{0\}$ hoặc L là nửa nhóm 0-đơn.*

Bổ đề 2.1.4. *Giả sử L là một iđêan trái 0-tối tiểu của nửa nhóm S với phần tử không và $u \in S$. Khi đó Lu hoặc bằng $\{0\}$ hoặc là iđêan trái 0-tối tiểu của S.*

Định lý 2.1.1. *Giả sử S là một nửa nhóm với phần tử không và I là iđêan 0-tối tiểu của S chứa ít nhất một iđêan trái 0-tối tiểu của S. Khi đó I là hợp của tất cả các iđêan trái 0-tối tiểu của S chứa trong I.*

Định nghĩa 2.1.2. Cho S là một nửa nhóm. Ta gọi một *chuỗi chính* của S là chuỗi các iđêan

$$S = I_n \supset I_{n-1} \supset ... \supset I_1 \supset I_0 \supset \emptyset.$$

sao cho với $j = 1, 2, ..., n$ mỗi I_{j-1} là cực đại trong I_j. Ta gọi các thương của chuỗi chính (2.1) là các nửa nhóm thương Rees $I_j/I_{j-1}, (j = 1, 2, ..., n)$. Khi đó S là hợp của của $(I_n \setminus I_{n-1}), (I_{n-1} \setminus I_{n-2}), ..., (I_1 \setminus I_0), (I_0 \setminus \emptyset)$ và

$$I_j/I_{j-1} = I_j \backslash I_{j-1} \cup \{0\}$$

Ví dụ 2.1.2. Cho $S = M_3(K)$. Khi đó $M_3(K) = I_3 \supset I_2 \supset I_1 \supset I_0 \supset \emptyset$, trong đó $I_0 = \{0\}, I_1 = \{x \in S | rank(x) \leq 1\}, I_2 = \{x \in S | rank(x) \leq 2\}$ là một chuỗi chính các iđêan với các thương Rees

$$J_3^0 = I_3/I_2 = \{x \in S | rank(x) = 3\} \cup \{0\},$$

$$J_2^0 = I_2/I_1 = \{x \in S | rank(x) = 2\} \cup \{0\},$$
$$J_1^0 = I_1/I_0 = \{x \in S | rank(x) = 1\} \cup \{0\},$$
$$J_0^0 = I_0/\emptyset = \{x \in S | rank(x) = 0\}.$$

2.2 Nửa nhóm 0-đơn đầy đủ

Định nghĩa 2.2.1. Một nửa nhóm không đơn (0-đơn) *đầy đủ* là nửa nhóm đơn (0-đơn) chứa luỹ đẳng nguyên thuỷ.

Định lý 2.2.1. *Mỗi nửa nhóm 0-đơn hữu hạn là 0-đơn đầy đủ.*

Ví dụ 2.2.1. Cho $S = \mathcal{I}_3$. Khi đó các nửa nhóm thương Rees

$$J_i^0 = \{x \in S | rank(x) = i\} \cup \{0\}, \quad i = 0, 1, 2, 3$$

là hữu hạn nên chúng là nửa nhóm 0-đơn đầy đủ.

Bổ đề 2.2.1. *Nếu L là một iđêan trái 0-tối tiểu của nửa nhóm S với phần tử không thì $L \setminus \{0\}$ là một $\mathcal{L}$-lớp của S.*

Bổ đề 2.2.2. *Giả sử S là một nửa nhóm 0-đơn chứa iđêan trái 0-tối tiểu và iđêan phải 0-tối tiểu. Khi đó mỗi iđêan trái 0-tối tiểu L của S ứng với ít nhất một iđêan phải 0-tối tiểu R của S sao cho $LR \neq \{0\}$.*

Bổ đề 2.2.3. *Giả sử S là một nửa nhóm 0-đơn, L và R tương ứng là các iđêan trái và phải 0-tối tiểu của S sao cho $LR \neq \{0\}$. Khi đó*

i) *$R \cap L$ là một nhóm với phần tử không.*

ii) *$R = eS, L = Se$ và $RL = eSe$ với e là phần tử đơn vị của nhóm $(R \cap L) \setminus \{0\}$*

iii) *e là luỹ đẳng nguyên thuỷ của S.*

Định lý 2.2.2. *Cho S là nửa nhóm 0-đơn. Khi đó S là 0-đơn đầy đủ khi và chỉ khi nó chứa ít nhất một iđêan trái 0-tối tiểu và ít nhất một iđêan phải 0-tối tiểu.*

Định lý 2.2.3. *Cho S là một nửa nhóm 0-đơn đầy đủ. Khi đó S là hợp của các iđêan trái (phải) 0-tối tiểu của nó.*

Định nghĩa 2.2.2. Một nửa nhóm S được gọi là $\mathcal{D}$-*đơn* hoặc *song đơn* nếu nó chỉ gồm một $\mathcal{D}$-lớp.

Định lý 2.2.4. *Một nửa nhóm 0-đơn đầy đủ là 0-song đơn và chính qui.*

Định lý 2.2.5. *Giả sử S là nửa nhóm 0-đơn đầy đủ. Khi đó*

i) *Nếu $x \in S$ và $x^2 \neq 0$ thì $x^2 \in H_x$ và H_x là một nhóm.*

ii) *Nếu $x, y \in S$ và $xy \neq 0$ thì $xy \in R_x \cap L_y$.*

iii) *Nếu $x, y \in S$ thì $H_x H_y = \{0\}$ hoặc $H_x H_y = R_x \cap L_y$. Lúc đó $H_x H_y = H_{xy}$.*

Định lý 2.2.6. *Cho S là một nửa nhóm 0-đơn đầy đủ. Khi đó*

i) *$R_i \cap R_j = L_\lambda \cap L_\mu = \emptyset$, với mọi $i \neq j$ và $\lambda \neq \mu$.*

ii) *Với mỗi tập $H_{i\lambda}$ là khác rỗng.*

iii) $S = \left(\bigcup_{i\in I} R_i\right) \cup \{0\} = \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} L_\lambda\right) \cup \{0\} = \left(\bigcup_{i\in I,\lambda\in\Lambda} H_{i\lambda}\right) \cup \{0\}$.

iv) *$|H_{i\lambda}| = |H_{j\mu}|$ với mọi $i, j \in I$ và $\lambda, \mu \in \Lambda$.*

v) *Bất kỳ $i \in I$ và $\lambda \in \Lambda$, hoặc $H_{i\lambda}$ là một nhóm con của S với phần tử đơn vị được ký hiệu là $e_{i\lambda}$ hoặc $H_{i\lambda} \cup \{0\}$ là nửa nhóm với phép nhân không.*

vi) *Nếu $H_{i\lambda}$ và $H_{j\mu}$ là các nhóm thì $H_{i\lambda} \cong H_{j\mu}$.*

vii) *Mỗi R_i chứa ít nhất một nhóm $H_{i\mu}$, mỗi L_λ chứa ít nhất một nhóm $H_{j\lambda}$.*

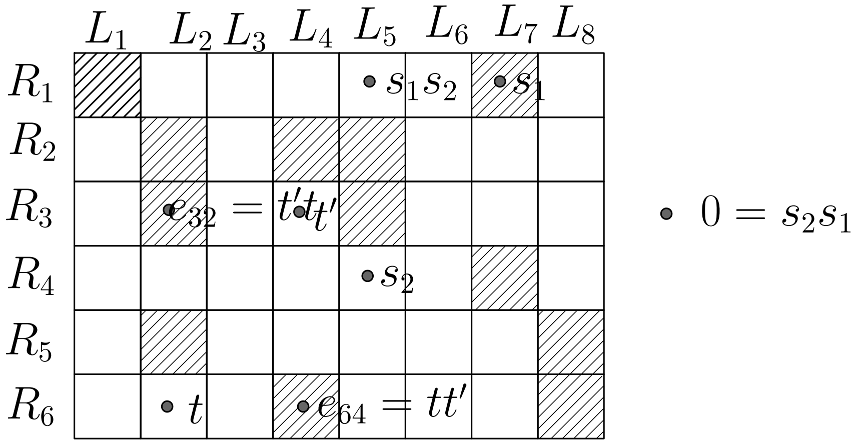
viii) *Cho $s_1 \in H_{i\lambda}$ và $s_2 \in H_{j\mu}$, khi đó $s_1s_2 \in H_{i\mu}$ nếu $H_{j\lambda}$ là một nhóm và $s_1s_2 = 0$ trong trường hợp còn lại.*

ix) *Cho $s \in H_{i\lambda}$. Nếu tồn tại $j \in I$ mà $H_{j\lambda}$ là một nhóm, khi đó $sR_j = R_i$ và $sH_{j\mu} = H_{i\mu}$ với mọi $\mu \in \Lambda$. Nếu $H_{i\mu}$ là một nhóm thì $L_\mu s = L_\lambda$ và $H_{j\mu}s = H_{j\lambda}$ với mọi $j \in I$.*

x) *Nếu $H_{i\lambda}$ là một nhóm thì $e_{i\lambda}$ là đơn vị trái của R_i và là đơn vị phải của L_λ. $H_{i\lambda} \cup \{0\} = e_{i\lambda}Se_{i\lambda}$ với mọi $i \in I$ và $\lambda \in \Lambda$.*

xi) *Nếu $H_{i\lambda}$ và $H_{j\mu}$ là những nhóm thì bất kỳ $s \in H_{j\lambda}$ tồn tại duy nhất $s' \in H_{i\mu}$ sao cho $ss's = s$ và $s'ss' = s'$; vì vậy $ss' = e_{j\mu}$ và $s's = e_{i\lambda}$, và ánh xạ $x \mapsto s'xs$ là một đẳng cấu từ $H_{j\mu}$ lên $H_{i\lambda}$.*

Ví dụ 2.2.2. Cho S là nửa nhóm 0-đơn đầy đủ với "hộp trứng" được cho ở Hình 2.1, trong đó các ô có gạch chéo là các nhóm. Ta có $s_1 \in H_{17}, s_2 \in H_{45}$. Vì H_{47} là một nhóm nên $s_1s_2 \in H_{15}$ nhưng $s_2s_1 = 0$ do H_{15} không phải là một nhóm. Do H_{32} và H_{64} là những nhóm nên với phần tử tuỳ ý $t \in H_{62}$, có duy nhất một phần tử nghịch đảo $t' \in H_{34}$ thoả $e_{64} = tt'$ và $e_{32} = t't$.



Hình 2.1: Mô tả "hộp trứng" của S

2.3 Nửa nhóm 0-đơn đầy đủ liên thông

Bổ đề 2.3.1. *Cho S là một nửa nhóm 0-đơn đầy đủ. Khi đó*

i) *Nếu $x \in H_{i\lambda}$ và $y \in H_{j\mu}$ thì $xy \neq 0$ khi và chỉ khi $H_{j\lambda}$ là một nhóm, lúc đó $xy \in H_{i\mu}$.*

ii) *Nếu tồn tại $x \in L_\lambda$ sao cho $xa \neq 0$ thì $ya \neq 0$ với mọi $y \in L_\lambda$. Đối ngẫu ta có, nếu tồn tại $x \in R_i$ sao cho $ax \neq 0$ thì $ay \neq 0$ với mọi $y \in R_i$.*

iii) *$x_1x_2...x_n = 0$ khi và chỉ khi ít nhất một trong các tích $x_1x_2, x_2x_3, ..., x_{n-1}x_n$ bằng 0*

iv) *Nếu $p \in F(S)$ thì phần tử nghịch đảo của p cũng thuộc $F(S)$.*

Định nghĩa 2.3.1. Cho S là nửa nhóm 0-đơn đầy đủ tuỳ ý. *Đồ thị* của S, ký hiệu là $\Gamma(S)$, gồm tập các đỉnh và các cạnh nối những cặp đỉnh; trong đó, tập các đỉnh của $\Gamma(S)$ là

$$\{(i, \lambda) \in I \times \Lambda | H_{i\lambda} \text{ là một nhóm}\}$$

Hai đỉnh (i, λ) và (j, μ) được gọi là kề nhau nếu và chỉ nếu $i = j$ hoặc $\lambda = \mu$. ở đây, $\Gamma(S)$ chính là một đơn đồ thị vô hướng.

Đồ thị $\Gamma(S)$ được gọi là *liên thông* nếu với hai đỉnh phân biệt bất kỳ (i, λ) và (j, μ) của $\Gamma(S)$ bao giờ cũng có một đường đi nối hai đỉnh (i, λ) và (j, μ).

Một nửa nhóm 0-đơn đầy đủ được gọi là *liên thông* nếu đồ thị của nó được gọi là liên thông.

Định lý 2.3.1. *Cho S là nửa nhóm 0-đơn đầy đủ. Các điều kiện sau là tương đương:*

i) $\Gamma(S)$ *là liên thông.*

ii) $L_\lambda F(S) R_i = S$ *với mọi* $i \in I$ *và với mọi* $\lambda \in \Lambda$.

iii) $F(S) \cap H_{i\lambda} \neq \emptyset$ *với mọi* $i \in I$ *và với mọi* $\lambda \in \Lambda$.

iv) *Với mỗi* $i, j \in I$ *và* $\lambda, \mu \in \Lambda$ *tồn tại phần tử* $p(i, \lambda, j, \mu)$, $q(i, \lambda, j, \mu) \in F(S)$ *sao cho ánh xạ*

$$\begin{aligned} \phi(i, \lambda, j, \mu) : & H_{i\lambda} \longrightarrow H_{j\mu} \\ & x \longmapsto p(i, \lambda, j, \mu) x q(i, \lambda, j, \mu) \end{aligned}$$

là một song ánh.

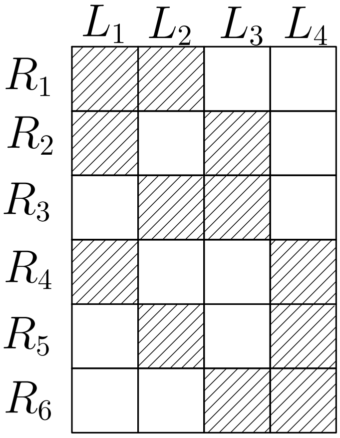
Nếu $H_{i\lambda}$ *và* $H_{j\mu}$ *là những nhóm, thì các phần tử* $p(i, \lambda, j, \mu), q(i, \lambda, j, \mu)$ *có thể chọn sao cho*

$$\phi(i, \lambda, j, \mu)^{-1} = \phi(j, \mu, i, \lambda)$$

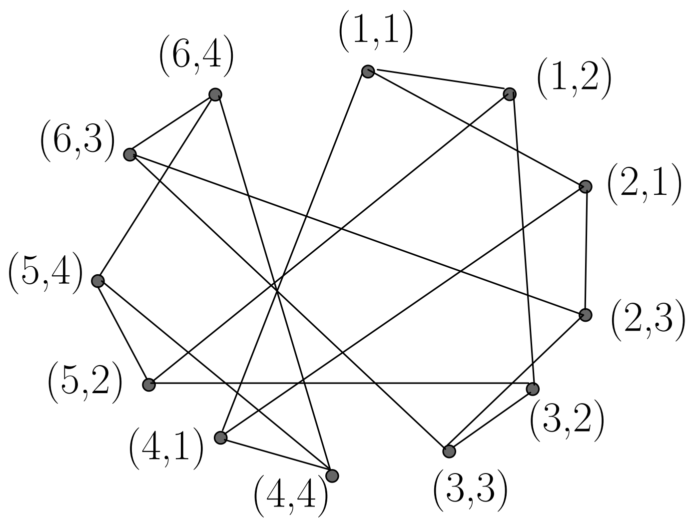
với $\phi(i, \lambda, j, \mu)$ *là đẳng cấu nhóm.*

Ví dụ 2.3.1. Nếu S là nửa nhóm đơn đầy đủ thì tất cả các $H_{i\lambda}$ với $i \in I, \lambda \in \Lambda$ là nhóm con của S. Do trong mỗi nhóm các phần tử luỹ đẳng là phần tử không hoặc phần tử đơn vị nên $e_{i\lambda} \in F(S) \cap H_{i\lambda}$ với mọi $i \in I, \lambda \in \Lambda$. Theo Định lý (2.3.1)(ii) ta có $\Gamma(S)$ là liên thông và tập đỉnh của $\Gamma(S)$ là toàn bộ tập $I \times \Lambda$.

Ví dụ 2.3.2. Cho S là nửa nhóm 0-đơn đầy đủ với "hộp trứng" của S được cho bởi Hình 2.4, trong đó các ô được gạch chéo là những nhóm. Khi đó, đồ thị $\Gamma(S)$ của S được cho bởi Hình 2.5. Rõ ràng $\Gamma(S)$ là liên thông.



Hình 2.4: Mô tả "hộp trứng" của S



Hình 2.5: Đồ thị của S

2.4 Hạng của nửa nhóm 0-đơn đầy đủ liên thông

Bổ đề 2.4.1. *Cho S là nửa nhóm 0-đơn đầy đủ, gọi T là nửa nhóm con của S, giả sử tồn tại $i_0 \in I, \lambda_0 \in \Lambda$ sao cho $H_{i_0\lambda_0}$ là một nhóm. Nếu $0 \in T, H_{i_0\lambda_0} \subseteq T$ và $T \cap H_{i\lambda} \neq \emptyset$ với mọi $i \in I, \lambda \in \Lambda$, thì $T = S$.*

Định lý 2.4.1. *Cho S là nửa nhóm 0-đơn đầy đủ, giả sử tồn tại $i_0 \in I, \lambda_0 \in \Lambda$ sao cho $H_{i_0\lambda_0}$ là một nhóm. Nếu $A \in H_{i_0\lambda_0}$ sinh $H_{i_0\lambda_0}$ như một nửa nhóm, nếu $b_\lambda \in H_{i_0\lambda}, \lambda \in \Lambda \setminus \{\lambda_0\}$ và $c_i \in H_{i\lambda_0}, i \in I \setminus \{i_0\}$ là các phần tử tuỳ ý thì tập*

$$X = A \cup \{b_\lambda | \lambda_0 \neq \lambda \in \Lambda\} \cup \{c_i | i_0 \neq i \in I\} \cup \{0\}.$$

là tập sinh của S.

Hệ quả 2.4.1. *Nếu S là nửa nhóm 0-đơn đầy đủ, khi đó*

$$\max(|I|, |\Lambda|) \leq rank(S) \leq rank(G) + |I| + |\Lambda| - 1$$

trong đó G là nhóm Schutzenberger của S.

Ví dụ 2.4.1. Cho nửa nhóm S có 5 phần tử với phép nhân được cho trong bảng sau:

$\bullet$	0	a	b	c	d
0	0	0	0	0	0
a	0	a	b	0	0
b	0	a	b	a	b
c	0	c	d	0	0
d	0	c	d	c	d

Rõ ràng S là 0-đơn, hữu hạn nên nó là 0-đơn đầy đủ. S có 2 $\mathcal{R}$-lớp khác không là $R_1 = \{a, b\}, R_2 = \{c, d\}$ và có 2 $\mathcal{L}$-lớp khác không là $L_1 = \{a, c\}, L_2 = \{b, d\}$. Mặt khác, S được sinh ra bởi tập $\{b, c\}$. Suy ra

$$rank(S) = 2 = \max(|I|, |\Lambda|).$$

Ví dụ 2.4.2. Cho G là một nhóm. Đặt $S = G \cup \{0\}$, khi đó S là nửa nhóm và được gọi là 0-nhóm. Ta có, nửa nhóm S là 0-nhóm khi và chỉ khi

$$aS = Sa = S, \forall a \in S \setminus \{0\}.$$

Vậy S là nửa nhóm 0-đơn đầy đủ với $|I| = |\Lambda| = 1$. Khi đó, mỗi tập sinh S có dạng $A \cup \{0\}$, trong đó A là tập sinh của nhóm G, vì vậy

$$rank(S) = rank(G) + 1 = rank(G) + |I| + |\Lambda| - 1.$$

Khi xét đến nửa nhóm 0-đơn đầy đủ liên thông, ta giả sử rằng các phần tử $p(i, \lambda, j, \mu), q(i, \lambda, j, \mu)$ và ánh xạ $\phi(i, \lambda, j, \mu)$ đã được đề cập đến ở Định lý (2.3.1).

Bổ đề 2.4.2. *Cho S là nửa nhóm 0-đơn đầy đủ liên thông. Khi đó với mọi $i, j \in I; \lambda, \mu \in \Lambda$ và với mọi $a \in H_{i\lambda}$ thì*

$$a \in F(S)[\phi(i, \lambda, j, \mu)(a)]F(S).$$

Bổ đề 2.4.3. *Cho S là nửa nhóm 0-đơn đầy đủ. Nếu $H_{i\lambda}$ là một nhóm thì*

$$e_{i\lambda}F(S)e_{i\lambda} \setminus \{0\} = H_{i\lambda} \cap F(S).$$

Bổ đề 2.4.4. *Cho S là nửa nhóm 0-đơn đầy đủ liên thông, giả sử*

$$A = \{a_1, a_2, ..., a_t\} \subseteq S \text{ với } a_s \in H_{i_s\lambda_s}, s = 1, 2, ..., t$$

và giả sử $H_{i\lambda}$ là một nhóm với $i \in I, \lambda \in \Lambda$. Nếu đặt

$$B = \{\phi(i_1, \lambda_1, i, \lambda)(a_1), \phi(i_2, \lambda_2, i, \lambda)(a_2), ..., \phi(i_t, \lambda_t, i, \lambda)(a_t)\} \subseteq H_{i\lambda}$$

thì

$$\langle F(S) \cup A\rangle \cap H_{i\lambda} = \langle (F(S) \cap H_{i\lambda}) \cup B\rangle.$$

Bổ đề 2.4.5. *Cho S là nửa nhóm 0-đơn đầy đủ liên thông và $i, j \in I; \lambda, \mu \in \Lambda$. Nếu $H_{i\lambda}$ và $H_{j\mu}$ là những nhóm thì tồn tại đẳng cấu $\phi(i, \lambda, j, \mu) : H_{i\lambda} \to H_{j\mu}$ sao cho $\phi(i, \lambda, j, \mu)(F(S) \cap H_{i\lambda}) = F(S) \cap H_{j\mu}$.*

Định nghĩa 2.4.1. Cho S là nửa nhóm và T là nửa nhóm con của S. Hạng của S *modulo* T, ký hiệu là rank$(S : T)$, là lực lượng nhỏ nhất của một trong tất cả các tập $A \subseteq S$ mà thỏa mãn $\langle A \cup T\rangle = S$.

$$rank(S : T) = min\{|A| : A \subseteq S, \langle A \cup T\rangle \ = S\}.$$

Nhận xét:

i) $rank(S : S) = 0, \quad rank(S : \emptyset) = rank(S).$

ii) $rank(S : T) = rank(S : \langle T\rangle), \quad rank(S : T) = 0 \Leftrightarrow S = \langle T\rangle.$

Bổ đề 2.4.6. *Cho S là nửa nhóm 0-đơn đầy đủ liên thông với $H_{i\lambda}$ là một nhóm $\mathcal{H}$-lớp của S và $U \subseteq F(S)$. Khi đó*

$$rank(S : U) \geq rank(H_{i\lambda} : H_{i\lambda} \cap F(S)).$$

Hệ quả 2.4.2. *Cho S là nửa nhóm 0-đơn đầy đủ liên thông. Nếu $H_{i\lambda}$ là một nhóm $\mathcal{H}$-lớp thì*

$$rank(S) \geq rank(H_{i\lambda} : H_{i\lambda} \cap F(S)).$$

Bổ đề 2.4.7. *Cho S là nửa nhóm 0-đơn đầy đủ hữu hạn, giả sử $H_{i\lambda}$ là một nhóm, đặt*

$$m = max(|I|, |\Lambda|, rank(H_{i\lambda} : H_{i\lambda} \cap F(S))).$$

Khi đó tồn tại $A \subseteq S$ với $|A| = m$ sao cho $S \backslash \{0\} = \langle A \rangle$.

Định lý 2.4.2. *Cho S là nửa nhóm 0-đơn liên thông hữu hạn, gọi $\{R_i | i \in I\}$ và $\{L_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ lần lượt là tập tất cả các $\mathcal{R}$-lớp và $\mathcal{L}$-lớp khác không của S, và $H_{i\lambda} = R_i \cap L_\lambda$ là một nhóm $\mathcal{H}$-lớp khác không bất kỳ của S. Khi đó*

(i) Nếu S có ước của không thì

$$rank(S) = max(|I|, |\Lambda|, rank(H_{i\lambda} : H_{i\lambda} \cap F(S))).$$

(ii) Nếu S không có ước của không thì

$$rank(S) = max(|I|, |\Lambda|, rank(H_{i\lambda} : H_{i\lambda} \cap F(S))) + 1.$$

Hệ quả 2.4.3. *Nếu S là nửa nhóm đơn hữu hạn thì*

$$rank(S) = max(|I|, |\Lambda|, rank(H_{i\lambda} : H_{i\lambda} \cap F(S))),$$

trong đó $|I|$ và $|\Lambda|$ lần lượt là số iđêan phải tối tiểu và iđêan trái tối tiểu của S; $H_{i\lambda}$ là giao bất kỳ của iđêan phải và trái tối tiểu trên.

Chương 3

NỬA NHÓM MA TRẬN REES

3.1 Nửa nhóm ma trận Rees

Định nghĩa 3.1.1. Giả sử I và Λ là các tập tùy ý. Một $I \times \Lambda$ ma trận Rees trên G^0 là $I \times \Lambda$ ma trận trên G^0 có không quá một phần tử khác không. Nếu $a \in G, i \in I, \lambda \in \Lambda$ thì ta ký hiệu $A = (a)_{i\lambda}$ là $I \times \Lambda$ ma trận Rees trên G^0 có phần tử a nằm ở dòng i cột λ của A, còn các chỗ khác đều bằng 0. Với mỗi $i \in I, \lambda \in \Lambda$, ký hiệu $0 = (0)_{i\lambda}$ là $I \times \Lambda$ ma trận không.

Giả sử $P = (p_{\lambda i})$ là $\Lambda \times I$ ma trận cố định trên G^0. Đặt

$$S = \{A = (a)_{i\lambda} | a \in G^0, i \in I, \lambda \in \Lambda\}.$$

Trên S ta xác định phép toán $\circ$ như sau: $\forall A, B \in S : A \circ B = APB$. Cụ thể là:

+ Với $A = (a)_{i\lambda}, B = (b)_{j\mu} \in S : (a)_{i\lambda} \circ (b)_{j\mu} = (ap_{\lambda j}b)_{i\mu} \in S, \forall a, b \in G$.

+ Với mọi $A, B, C \in S : A \circ (B \circ C) = AP(BPC) = (APB)PC = (A \circ B) \circ C$.

Vậy $(S, \circ)$ là một nửa nhóm, gọi là *nửa nhóm $I \times \Lambda$ ma trận Rees* trên một nhóm với phần tử không G^0 với ma trận đệm P, ký hiệu là $\mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$. G được gọi là nhóm cơ sở của $\mathcal{M}^0$.

Ta có thể xây dựng nửa nhóm ma trận Rees theo cách sau:
Đặt $S = \{G \times I \times \Lambda) \cup \{0\} = \{(a; i; \lambda) | a \in G, i \in I, \lambda \in \Lambda\} \cup \{0\}$. Trên S xác định phép toán $\circ$ như sau:

$$(a; i; \lambda) \circ (b; j; \mu) = \begin{cases} (ap_{j\lambda}b; i; \mu) & \text{nếu } p_{\lambda j} \neq 0, \\ 0 & \text{nếu } p_{\lambda j} = 0. \end{cases}$$

$$0 \circ (a; i; \lambda) = (a; i; \lambda) \circ 0 = 0 \circ 0 = 0.$$

Khi đó $(S, \circ)$ được gọi là nửa nhóm ma trận Rees $\mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$.

Nửa nhóm $\mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)\backslash\{0\}$ gọi là nửa nhóm $I \times \Lambda$ ma trận Rees không chứa phần tử không trên nhóm G với ma trận đệm P, ký hiệu $\mathcal{M}(G; I, \Lambda; P)$.

Ta có thể dùng cả hai ký hiệu $(a)_{i\lambda}$ và $(a; i; \lambda)$ tùy theo trường hợp cụ thể mà không phân biệt giữa "ma trận Rees" và "bộ ba"; đồng nhất phần tử không của S với tất cả các bộ ba dạng $(0; i; \lambda)$ và ký hiệu $(0)_{i\lambda}$.

Để khỏi phức tạp, ta sẽ sử dụng lại các ký hiệu dưới đây, giống các ký hiệu trong Chương 2 nhưng đối với nửa nhóm ma trận Rees $\mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$:

- $R_i = \{(a)_{i\lambda} | a \in G, \lambda \in \Lambda\}$ và $R_i^0 = R_i \cup \{0\}$.
- $L_\lambda = \{(a)_{i\lambda} | a \in G, i \in I\}$ và $L_\lambda^0 = L_\lambda \cup \{0\}$.
- $H_{i\lambda} = R_i \cup L_\lambda = \{(a)_{i\lambda} | a \in G\}$.

Từ đây trở về sau, khi nhắc đến nửa nhóm 0-đơn đầy đủ S thì các ký hiệu $R_i, L_\lambda, H_{i\lambda}$ của S được cho như Định lý (2.2.6).

Bổ đề 3.1.1. *Nửa nhóm ma trận Rees $\mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ là nửa nhóm chính qui khi và chỉ khi mỗi dòng và mỗi cột của P chứa một phần tử khác không.*

Ví dụ 3.1.1. (Nửa nhóm 0-băng chữ nhật). Cho $G = \{1\}$ là một nhóm, $I = \{1, \ldots, m\}, \Lambda = \{1, \ldots, n\}$ và $P = (p_{\lambda i})$ là $\Lambda \times I$ ma trận chính quy trên $\{0, 1\}$. Đặt $S = (I \times \Lambda) \cup \{0\}$ với phép toán $\circ$ được xác định như sau:

$$(i, \lambda) \circ (j, \mu) = \begin{cases} (i, \mu) & \text{nếu } p_{\lambda j} = 1 \\ 0 & \text{ngược lại,} \end{cases}$$

$$(i; \lambda) \circ 0 = 0 \circ (i; \lambda) = 0 \circ 0 = 0, \forall (i, \lambda) \in I \times \Lambda.$$

Khi đó $(S, \circ)$ là nửa nhóm, gọi là nửa nhóm 0-*băng chữ nhật*.

Bổ đề 3.1.2. *Cho $\mathcal{M}^0(G; I; \Lambda; P)$ là nửa nhóm ma trận Rees trên G^0 với ma trận đệm P. Khi đó*

i) *R_i^0 là iđêan phải của $\mathcal{M}^0$ với mọi $i \in I$; hai phần tử $\mathcal{R}$-tương đương của $\mathcal{M}^0 \setminus \{0\}$ cùng thuộc một R_i với i nào đó thuộc I.*

ii) *Nếu P chính qui thì mỗi $i \in I, R_i^0$ là iđêan phải 0-tối tiểu của $\mathcal{M}^0$ và R_i là một $\mathcal{R}$-lớp.*

iii) *Nếu tồn tại* $i \in I$ *thỏa* $p_{\lambda i} = 0$ *với mọi* $\lambda \in \Lambda$ *thì* R_i^0 *là iđêan hai phía của* $\mathcal{M}^0$ *sao cho* $\mathcal{M}^0 \circ R_i^0 = \{0\}$; *đặc biệt* $(R_i^0)^2 = \{0\}$.

iv) *Tập* $H_{i\lambda}(i \in I, \lambda \in \Lambda)$ *chứa lũy đẳng khi và chỉ khi* $p_{\lambda i} \neq 0$. *Nếu* $p_{\lambda i} \neq 0$ *thì* $H_{i\lambda}$ *là một* $\mathcal{H}$-*lớp của* $\mathcal{M}^0$ *và là nhóm con của* $\mathcal{M}^0$ *với phần tử đơn vị* $e_{i\lambda} = (p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda}$. *Ánh xạ* $a \mapsto (ap_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda}$ *là đẳng cấu từ* G *lên* $H_{i\lambda}$.

v) *Với mỗi* $i, j \in I$ *và* $\lambda, \mu \in \Lambda$ *ta có*

$$H_{i\lambda} \circ H_{j\mu} = \begin{cases} H_{i\mu} & \text{nếu } p_{\lambda j} \neq 0, \\ \{0\} & \text{nếu } p_{\lambda j} = 0. \end{cases}$$

Định lý 3.1.1. *Nửa nhóm ma trận Rees* $\mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ *là* 0-*đơn đầy đủ khi và chỉ khi nó là chính qui.*

3.2 Định lý Rees

Định lý 3.2.1. *Mỗi phần tử thuộc* D *đều biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng* $r_i a q_\lambda$ *với* $a \in H_{11}, i \in I, \lambda \in \Lambda$. *Ánh xạ* $\varphi : \mathcal{M}^0 \to T$ *xác định bởi*

$$\varphi[(a)_{i\lambda}] = \begin{cases} r_i a q_\lambda, & \text{nếu } a \neq 0, \\ 0, & \text{nếu } a = 0. \end{cases}$$

là một đẳng cấu. *Đặc biệt* $\varphi : \mathcal{M}^0 \backslash \{0\} \to D$ *là một đẳng cấu, trong đó* $\varphi^{'}[(a)_{i\lambda}] = r_i a q_\lambda$.

Định lý 3.2.2. (Định lý Rees). *Nửa nhóm* S *là* 0-*đơn đầy đủ khi và chỉ khi nó đẳng cấu với nửa nhóm ma trận Rees chính qui* $\mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$.

Hệ quả 3.2.1. *Cho* S *là nửa nhóm* 0-*đơn đầy đủ, với các ký hiệu được cho như trong Định lý (2.2.6). Giả sử* $H_{i_0\lambda_0}$ *là một nhóm. Với mỗi* $i \in I$ *và mỗi* $\lambda \in \Lambda$ *chọn* $s_i \in H_{i\lambda_0}$ *và* $t_\lambda \in H_{i_0\lambda}$, *đặt* $P = (t_\lambda s_i)_{\lambda \in \Lambda, i \in I}$. *Khi đó* P *là chính qui và* $S \cong \mathcal{M}^0(H_{i_0\lambda_0}; I, \Lambda; P)$.

Ví dụ 3.2.1. Cho $S = \mathcal{I}_3$. Ta có $J_2^0 = \{x \in S | rank(x) = 2\} \cup \{0\}$ là nửa nhóm 0-đơn đầy đủ. Do đó ta có thể tìm một nửa nhóm ma trận Rees đẳng cấu với J_2^0. Đặt $G = H_{11}$, theo Ví dụ (1.3.2) ta có:

$$H_{11} = \left\{ e = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), a = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \right\}, \text{ và } I = \{1, 2, 3\}, \Lambda = \{1, 2, 3\}.$$

$P = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vậy $J_2^0 \cong \mathcal{M}^0(H_{11}; I, \Lambda; P)$.

Định lý 3.2.3. *Cho S là nửa nhóm đơn đầy đủ, với $i_0 \in I, \lambda_0 \in \Lambda$ tùy ý. Với mỗi $i \in I$ và mỗi $\lambda \in \Lambda$ chọn $s_i \in H_{i\lambda_0}$ và $t_\lambda \in H_{i_0\lambda}$, đặt $P = (t_\lambda s_i)_{\lambda\in\Lambda, i\in I}$. Khi đó $S \cong \mathcal{M}(H_{i_0\lambda_0}; I, \Lambda; P)$. Đặc biệt, mỗi nửa nhóm đơn đầy đủ là đẳng cấu với nửa nhóm ma trận Rees $\mathcal{M}(G; I, \Lambda; P)$.*

Định lý 3.2.4. *Hai nửa nhóm ma trận Rees chính qui*

$$S = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P) \text{ và } T = \mathcal{M}^0(K; J, M; Q)$$

là đẳng cấu khi và chỉ khi tồn tại một đẳng cấu $\theta : G \to K$, các song ánh $\psi : I \to J$, $\chi : \Lambda \to M$ và phần tử u_i $(i \in I)$, v_λ $(\lambda \in \Lambda)$ trong K sao cho $\theta(p_{\lambda i}) = v_\lambda q_{\chi(\lambda)\psi(i)} u_i$.

Định lý 3.2.5. *Hai nửa nhóm ma trận Rees trên cùng một nhóm G^0*

$$S = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P) \text{ và } T = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P')$$

là đẳng cấu với nhau nên tồn tại ánh xạ $i \mapsto u_i$ từ I vào G và ánh xạ $\lambda \mapsto v_\lambda$ từ Λ vào G sao cho $p'_{\lambda i} = v_\lambda p_{\lambda i} u_i$ với mọi $i \in I$ và $\lambda \in \Lambda$, trong đó $P = (p_{\lambda i})$ và $P' = (p'_{\lambda i})$.

Ví dụ 3.2.2. Cho $G = \langle a \rangle = \{a^0, a^1, a^2, a^3, a^4\}$ là nhóm xyclic cấp 5 sinh bởi phần tử a với phép toán nhân. Cho $S = \mathcal{M}^0(G; \{1,2\}, \{1,2\}; P)$ với

$$P = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Khi đó S đẳng cấu với nửa nhóm

$$T = \mathcal{M}^0(G; \{1,2\}, \{1,2\}; Q), \text{ trong đó } Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Định nghĩa 3.2.1. Một $\Lambda \times I$ ma trận $P = (p_{\lambda i})$ trên một nhóm G được gọi là có *dạng chuẩn* nếu $p_{\lambda 1} = p_{1i} = 1_G$ với mọi $i \in I$ và mọi $\lambda \in \Lambda$.

Định lý 3.2.6. *Nếu S là nửa nhóm đơn đầy đủ thì S đẳng cấu với nửa nhóm ma trận Rees $\mathcal{M}(G; I, \Lambda; P)$ với P có dạng chuẩn.*

3.3 Hạng của nửa nhóm ma trận Rees

Định nghĩa 3.3.1. Cho $S = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; G)$ là nửa nhóm ma trận Rees chính qui. *Đồ thị phân đôi* của S, ký hiệu là $\Gamma(P)$, là đồ thị gồm tập đỉnh là $I \cup \Lambda$ (giả sử I và Λ là rời nhau) và hai đỉnh $i \in I$ và $\lambda \in \Lambda$ gọi là kề nhau nếu $p_{\lambda i} \neq 0$.

Hai đỉnh $x, y \in \Gamma(P)$ được gọi là liên thông, ký hiệu $x \bowtie y$ nếu có một đường đi bắt đầu từ x và kết thúc tại y. Nếu $\pi = z_1 \to z_2 \to \ldots \to z_t$ là một đường đi trong $\Gamma(P)$ thì giá trị của π được định nghĩa là

$$V(\pi) = \phi(z_1, z_2).\phi(z_2, z_3)......\phi(z_{t-1}, z_t),$$

trong đó

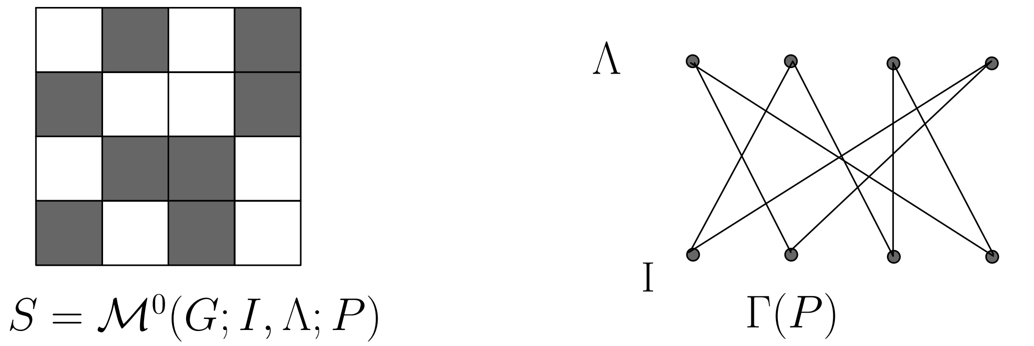
$$\phi(i, \lambda) = p_{\lambda i}^{-1}, \quad \phi(\lambda, i) = p_{\lambda i} \quad (i \in I, \lambda \in \Lambda).$$

Qui ước rằng giá trị của đường đi $z \to z$ là 1_G (đơn vị của G).

Ký hiệu P_{xy} là tập tất cả các đường đi liên thông giữa x và y, và đặt tập các giá trị của các đường đi là:

$$V_{xy} = \{V(\pi) | \pi \in P_{xy}\}.$$

Qui ước: Nếu x không liên thông với y thì $V_{xy} = \emptyset$.



Hình 3.1: Đồ thị $\Gamma(P)$ của S là liên thông.

Định lý 3.3.1. *Cho $S = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ là nửa nhóm 0-đơn đầy đủ. Khi đó nửa nhóm sinh bởi tập các phần tử lũy đẳng của S là*

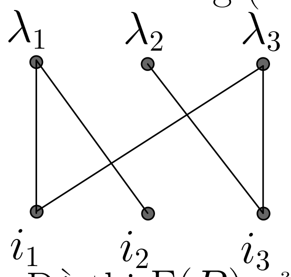
$$F(S) = \{(a)_{i\lambda} \in S | i \bowtie \lambda, a \in V_{i\lambda}\} \cup \{0\}.$$

Định lý 3.3.2. *Cho S là nửa nhóm ma trận Rees $\mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$. Khi đó S là liên thông khi và chỉ khi đồ thị $\Gamma(P)$ là liên thông.*

Ví dụ 3.3.1. Cho $G = \langle a \rangle = \{a^0, a^1, a^2, a^3, a^4\}$ là nhóm xyclic cấp 5 sinh bởi phần tử a. Gọi $S = \mathcal{M}^0(G; \{i_1, i_2, i_3\}, \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}; P)$ trong đó:

$$P = \begin{pmatrix} a^0 & a^3 & 0 \\ 0 & 0 & a^4 \\ a^1 & 0 & a^0 \end{pmatrix}.$$

Khi đó, đồ thị $\Gamma(P)$ của S là liên thông (xem Hình 3.2).



Hình 3.2: Đồ thị $\Gamma(P)$ của S là liên thông

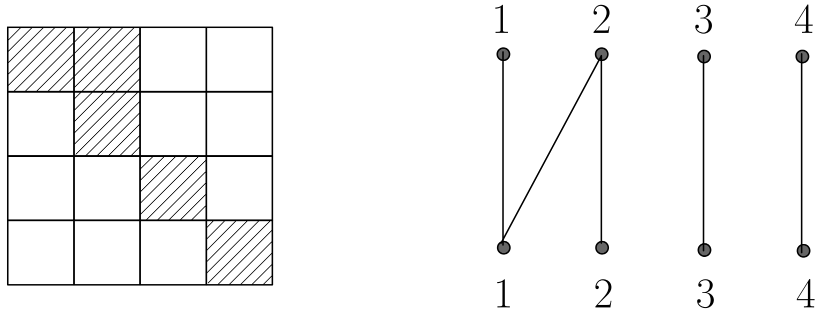
Ví dụ 3.3.2. Cho $G = \{1, a\}$ là nhóm xyclic cấp 2, cho

$$S = \mathcal{M}^0(G; \{1, ..., 4\}, \{1, ..., 4\}; P)$$

trong đó

$$P = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Khi đó, đồ thị $\Gamma(P)$ của S là không liên thông (xem Hình 3.3).

$S \cong$ 

Hình 3.3: Đồ thị $\Gamma(P)$ của S là không liên thông

Bổ đề 3.3.1. *Ánh xạ*

$$\begin{aligned} \psi : H_{11} &\longrightarrow G \\ (g)_{11} &\longmapsto gp_{11} \end{aligned}$$

là một đẳng cấu nhóm và $\psi(H_{11} \cap F(S)) = V_{11}p_{11}$.

Bổ đề 3.3.2. *Nếu*

$$\pi = 1_I \to \lambda_1 \to i_2 \to \lambda_2 \to i_3 \to \lambda_3 \to ... \to \lambda_{s-1} \to i_s \to 1_\Lambda$$

là một đường đi trong $P_{1_I 1_\Lambda}$. *Khi đó*

$$V(\pi)p_{11} = q^{-1}_{\lambda_1 1_I} q_{\lambda_1 i_2} q^{-1}_{\lambda_2 i_2} q_{\lambda_2 i_3} q^{-1}_{\lambda_3 i_3} ... q_{\lambda_{s-1} i_s} q^{-1}_{1_\Lambda i_s}.$$

Bổ đề 3.3.3. $V_{1_I 1_\Lambda} p_{1_\Lambda 1_I}$ *được sinh bởi tập* $\mathcal{A} = \{q_{\lambda i} | i \in I, \lambda \in \Lambda\}$.

Định lý 3.3.3. *Cho $S = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ là nửa nhóm ma trận Rees hữu hạn liên thông, với ma trận P chính qui, $p_{11} \neq 0$ và tồn tại $j \in I, \mu \in \Lambda : p_{\mu j} = 0$.*
Gọi π_i và π_λ $(i \in I, \lambda \in \Lambda)$ lần lượt là những đường đi nối i và $1_\Lambda, 1_I$ và λ với $\pi_{1_I} = \pi_{1_\Lambda} = 1_I \to 1_\Lambda$, đặt

$$q_{\lambda i} = V(\pi_\lambda)p_{\lambda i}V(\pi_i)p_{11}.$$

Nếu H là một nhóm con của G sinh bởi tập $\mathcal{A} = \{q_{\lambda i} | \lambda \in \Lambda, i \in I, q_{\lambda i} \neq 0\}$ thì

$$rank(S) = max(|I|, |\Lambda|, rank(G : H)).$$

Nếu $p_{\mu j} \neq 0$ với mọi $j \in I$ và $\mu \in \Lambda$ thì

$$rank(S - \{0\}) = max(|I|, |\Lambda|, rank(G : H)).$$

Định lý 3.3.4. *Cho $S = \mathcal{M}(G; I, \Lambda; P)$ là nửa nhóm ma trận Rees hữu hạn với P có dạng chuẩn. Khi đó*

$$rank(S) = max(|I|, |\Lambda|, rank(G : H))$$

trong đó H là nhóm con của G sinh bởi tập $\mathcal{A} = \{p_{\lambda i} | 1 \neq i \in I, 1 \neq \lambda \in \Lambda\}$.

3.4 Bài toán cực trị đối với nửa nhóm ma trận Rees

Ví dụ 3.4.1. Cho G là nhóm hữu hạn sinh bởi 9 phần tử $a_1, ..., a_9$. Gọi S là nửa nhóm ma trận Rees $\mathcal{M}(G; I, \Lambda; P)$ trong đó $I = \Lambda = \{1, 2, 3, 4\}$ và

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & a_4 & a_5 & a_6 \\ 1 & a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix}.$$

Khi đó nhóm con H của G sinh bởi tập $\mathcal{A} = \{p_{\lambda i} | 1 \neq i \in I, 1 \neq \lambda \in \Lambda\}$ là G, nên

$$\begin{aligned} rank(S) &= max(|I|, |\Lambda|, rank(G : G)) \\ &= max(4, 4, 1) = 4 < 9 = rank(G). \end{aligned}$$

Như vậy, khi cho một nhóm hữu hạn G thì giá trị nhỏ nhất có thể của hạng của nửa nhóm ma trận Rees (0-) đơn $\mathcal{M}(G; I, \Lambda; P)$ ($\mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$) là gì?

Định lý 3.4.1. *Nếu G là một nhóm hữu hạn có $rank(G) = r$ thì với mỗi nửa nhóm ma trận Rees $\mathcal{M}(G; I, \Lambda; P)$ với P có dạng chuẩn, ta có:*

$$rank(\mathcal{M}(G; I, \Lambda; P)) \geq \lceil \frac{1 + \sqrt{4r - 3}}{2} \rceil.$$

Ngoài ra, tồn tại một nửa nhóm $\mathcal{M}(G; J, K; Q)$ có hạng là $\lceil \frac{1+\sqrt{4r-3}}{2} \rceil$

Hệ quả 3.4.1. *Nếu G là một nhóm hữu hạn có $rank(G) = r$ thì với mỗi nửa nhóm ma trận Rees 0-đơn đầy đủ $\mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$, ta có*

$$rank(\mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)) \geq \lceil \frac{1 + \sqrt{4r - 3}}{2} \rceil.$$

KẾT LUẬN

Luận văn khảo sát về nửa nhóm 0-đơn đầy đủ, đây là nửa nhóm có tầm quan trọng trong sự phát triển của lý thuyết nửa nhóm. Việc khảo sát nửa nhóm này dựa trên việc nghiên cứu về các quan hệ Green, các iđêan trái và phải 0-tối tiểu và cấu trúc $\mathcal{D}$-lớp chính quy của nó.

Thông thường các nửa nhóm được biểu diễn bởi các phép biến đổi của một tập nào đó. Trong luận văn này, chúng tôi đề cập đến một nửa nhóm mà được biểu diễn bởi các ma trận trên một nhóm với phần tử không G^0, gọi là nửa nhóm ma trận Rees. Định lý Rees khẳng định rằng mỗi nửa nhóm 0-đơn đầy đủ là đẳng cấu với nửa nhóm ma trận Rees trên một nhóm với phần tử không, đây là định lý có ảnh hưởng lớn đến sự phát triển sau này của lý thuyết nửa nhóm.

Luận văn cho thấy được tính chất liên thông của nửa nhóm 0-đơn đầy đủ và nửa nhóm ma trận Rees được thể hiện thông qua đồ thị của nó. Nửa nhóm là liên thông nếu đồ thị của nó là liên thông. Những kết quả quan trọng trong luận văn đó là tìm kiếm một tập sinh tốt nhất có thể, từ đó thiết lập được công thức tính hạng cho nửa nhóm 0-đơn đầy đủ liên thông và nửa nhóm ma trận Rees.

Ngoài ra, luận văn còn giải quyết được vấn đề về bài toán cực trị cho hạng của nửa nhóm ma trận Rees trên một nhóm G. Kết quả cho thấy rằng nếu cho G là một nhóm hữu hạn thì hạng của nửa nhóm ma trận Rees trên G luôn lớn hơn hoặc bằng một số m, trong đó m được biểu diễn thông qua hạng của G. Khi đó luôn tồn tại một nửa nhóm ma trận Rees trên G có hạng bằng m.

Trong điều kiện thời gian và khuôn khổ của luận văn, chúng tôi chưa nghiên cứu sâu về các tính chất khác của nửa nhóm 0-đơn đầy đủ liên thông thông qua nửa nhóm ma trận Rees. Và đó cũng là hướng để tiếp tục tìm hiểu, nghiên cứu và phát triển luận văn sau này.