BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

NGUYỄN THANH SƠN

BÀI TOÁN TÔ MÀU ĐỒ THỊ VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 60 46 40

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Đà Nẵng - Năm 2011

Công trình được hoàn thành tại

ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

Người hướng dẫn khoa học: PGS-TSKH Trần Quốc Chiến

Phản biện 1: TS. Cao Văn Nuôi

Phản biện 2: TS. Hoàng Quang Tuyến

Luận văn sẽ được bảo vệ trước Hội đồng chấm Luận văn tốt nghiệp thạc sĩ khoa học họp tại Đại học Đà Nẵng vào ngày 17 tháng 8 năm 2011

Có thể tìm hiểu luận văn tại:

- Trung tâm Thông tin-Học liệu, Đại học Đà Nẵng

- Thư viện trường Đại học Sư Phạm, Đại học Đà Nẵng

MỞ ĐẦU

1. Lí do chọn đề tài:

Lý thuyết đồ thị là một phần của ngành toán học hiện đại, được phát triển từ lâu nhưng lại có nhiều ứng dụng hiện đại, nó khá “gần gũi” với thực tế.

Trong chương trình THPT, sách giáo khoa trang bị cho học sinh các kiến thức về tô màu đồ thị còn ít, đặc biệt là bài toán tô màu đồ thị để phục vụ cho việc bồi dưỡng học sinh, hơn nữa các bài toán giải bằng phương pháp tô màu đồ thị rất gần với thực tế. Vì vậy, chuyên đề này chứa đựng nhiều tiềm năng để khai thác bồi dưỡng cho học sinh.

Việc cung cấp một số phương pháp giải bài toán bằng phương pháp tô màu đồ thị là một nhu cầu cần thiết. Mặt khác, việc vận dụng kết quả bài toán tô màu đồ thị vào giải toán giúp ta đạt được mục tiêu: giải được một số bài toán không mẫu mực, các bài toán thường gặp trong thực tế và rải rác một số bài toán trong các kì thi tuyển Olympic toán quốc tế.

Nghiên cứu khai thác một số yếu tố của bài toán tô màu đồ thị và ứng dụng này trong việc giải các bài toán ở phổ thông, cũng được một số tác giả quan tâm, xuất phát từ những lý do trên tôi lựa chọn đề tài: ***“Bài toán tô màu đồ thị và ứng dụng ”*** để nghiên cứu.

2. Mục đích nghiên cứu:

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu:

4. Phương pháp nghiên cứu:

5. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài:

6. Cấu trúc luận văn:

Luận văn gồm 3 chương:

Chương 1. Các khái niệm cơ bản của lý thuyết đồ thị:

Trình bày những kiến thức cơ bản của lý thuyết đồ thị.

Chương 2. Bài toán tô màu đồ thị:

Nghiên cứu sâu các định lí về tô màu đỉnh, tô màu cạnh, các định lí về tô màu đồ thị phẳng và các bài toán tô màu đỉnh, tô màu cạnh.

Chương 3. Ứng dụng:

Trình bày các ứng dụng của bài toán tô màu đồ thị trong việc giải các bài toán phổ thông và các vấn đề thực tế.

CHƯƠNG 1
CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN CỦA LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ.

1.1. CÁC KHÁI NIỆM VỀ ĐỒ THỊ:

1.1.1 Các định nghĩa:

Định nghĩa 1.1.1.1: Đồ thị vô hướng G = (V,E) gồm một tập V các đỉnh và tập E các cạnh. Mỗi cạnh $e \in E$ được liên kết với một cặp đỉnh (v, w) (không kể thứ tự)

Định nghĩa 1.1.1.2: Đồ thị có hướng G = (V,E) gồm một tập V các đỉnh và tập E các cạnh có hướng gọi là cung. Mỗi cạnh $e \in E$ được liên kết với một cặp đỉnh (v, w) (có thứ tự)

Ghi chú:

Cho đồ thị có hướng G = (V,E). Nếu ta thay mỗi cung của G bằng một cạnh, thì đồ thị vô hướng nhận được gọi là đồ thị lót của G.

Đồ thị vô hướng có thể coi là đồ thị có hướng trong đó mỗi cạnh e = (v,w) tương ứng với hai cung (v,w) và (w,v).

1.1.2 Các khái niệm:

1.1.3 Các loại đồ thị:

Định nghĩa 1.1.3.1: Đồ thị hữu hạn.

Định nghĩa 1.1.3.2: Đồ thị đơn.

Định nghĩa 1.1.3.3: Đồ thị vô hướng đủ.

Định nghĩa 1.1.3.4: Đồ thị K_n là đơn đồ thị vô hướng đủ n đỉnh.

Định nghĩa 1.1.3.5: Đồ thị có hướng đủ.

Định nghĩa 1.1.3.6: Đồ thị lưỡng phân G = (V,E),

Ký hiệu: G = ({V_1, V_2}, E).

Định nghĩa 1.1.3.7: Đồ thị $K_{m,n}$ là đồ thị lưỡng phân ({V_1, V_2}, E) với tập V_1 có m đỉnh và tập V_2 có n đỉnh và mỗi đỉnh của V_1 được nối với mỗi đỉnh của V_2 bằng một cạnh duy nhất.

Định nghĩa 1.1.3.8: Đồ thị G gọi là đồ thị thuần nhất bậc a ($a \in N$), nếu mỗi đỉnh đều có bậc a.

1.1.4 Biểu diễn đồ thị bằng hình học:

a) Biểu diễn đỉnh:

b) Biểu diễn cạnh:

c) Biểu diễn cung:

1.1.5 Bậc, nửa bậc vào, nửa bậc ra:

Cho đồ thi G = (V, E).

Định nghĩa 1.1.5.1: Bậc của đỉnh $v \in V$.

Định nghĩa 1.1.5.2: Đỉnh treo là đỉnh có bậc bằng 1.

Định nghĩa 1.1.5.3: Cho G = (V,E) là đồ thị có hướng, $v \in V$.

Nửa bậc ra của đỉnh v, ký hiệu $d_0(v)$, là số cung đi ra từ đỉnh v (v là đỉnh đầu).

Nửa bậc vào của đỉnh $v \in V$, ký hiệu $d_1(v)$, là số cung đi tới đỉnh v (v là đỉnh cuối).

Định nghĩa 1.1.5.4: Đồ thị K_n là đồ thị đơn, đủ n đỉnh.

Bổ đề 1.1.5.5: *(Bổ đề bắt tay- Hand Shaking Lemma)*

Cho đồ thị G = (V, E). Khi đó:

i) Tổng bậc các đỉnh của đồ thị là số chẵn và

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2.\mathrm{card}(E)$$

ii) Nếu G là đồ thị có hướng thì:

$$\sum_{v \in V} d_0(v) = \sum_{v \in V} d_1(v) = \mathrm{card}(E)$$

Trong đó card(E), kí hiệu số phần tử của tập X.

Hệ quả 1.1.5.6: Số đỉnh bậc lẻ của đồ thị vô hướng là số chẵn.

Mệnh đề 1.1.5.7: Mỗi đỉnh của đồ thị K_n có bậc n – 1 và K_n có $\frac{n(n-1)}{2}$ cạnh.

Mệnh đề 1.1.5.8: Cho đồ thị lưỡng phân đủ

$K_{m,n}$ = ({V_1, V_2}, E) với tập V_1 có m đỉnh và tập V_2 có n đỉnh. Khi đó mỗi đỉnh trong V_1 có bậc là n, mỗi đỉnh trong V_2 có bậc là m và $K_{m,n}$ có m.n cạnh.

1.2. ĐƯỜNG ĐI, CHU TRÌNH VÀ TÍNH LIÊN THÔNG:

1.2.1 Các định nghĩa:

Cho đồ thị G = (V,E).

Định nghĩa 1.2.1.1: Dây μ từ đỉnh v đến đỉnh w là dãy các đỉnh và cạnh nối tiếp nhau bắt đầu từ đỉnh v đến kết thúc tại đỉnh w. Số cạnh trên dây μ gọi là độ dài của dây μ.

Dây μ từ đỉnh v đến đỉnh w độ dài n được biểu diễn như sau: $\mu = (v, e_1, v_1, e_2, v_2, ..., v_{n-1}, e_n, w)$

Trong đó v_i (i = 1, ..., n-1) là các đỉnh trên dây và e_i (i = 1, ...,n) là các cạnh trên dây liên thuộc đỉnh kề trước và sau nó. Các đỉnh và cạnh trên dây có thể lặp lại.

Định nghĩa 1.2.1.2: Đường đi từ đỉnh v đến đỉnh w.

Định nghĩa 1.2.1.3: Đường đi sơ cấp.

Định nghĩa 1.2.1.4: Vòng. Dây có hướng trong đồ thị có hướng

Định nghĩa 1.2.1.5: Đường đi có hướng trong đồ thị có hướng.

Định nghĩa 1.2.1.6: Đường đi có hướng sơ cấp.

Định nghĩa 1.2.1.7: Vòng có hướng.

Định nghĩa 1.2.1.8: Chu trình.

Định nghĩa 1.2.1.9: Chu trình sơ cấp.

Định nghĩa 1.2.1.10: Chu trình có hướng.

Định nghĩa 1.2.1.11: Chu trình có hướng sơ cấp.

Định nghĩa 1.2.1.12: Đồ thị vô hướng gọi là liên thông, nếu mọi cặp đỉnh của nó đều có đường đi nối chúng với nhau.

Định nghĩa 1.2.1.13: Đồ thị có hướng gọi là liên thông mạnh, nếu mọi cặp đỉnh của nó đều có đường đi có hướng nối chúng với nhau.

Định nghĩa 1.2.1.14: Đồ thị có hướng gọi là liên thông yếu, nếu đồ thị lót (vô hướng) của nó liên thông.

Định nghĩa 1.2.1.15: Đồ thị có hướng gọi là bán liên thông, nếu với mọi cặp đỉnh (u, v) bao giờ cũng tồn tại đường đi có hướng từ u đến v hoặc từ v đến u.

Định nghĩa 1.2.1.16: Cho đồ thị G = (V, E). Đồ thị $G' = (V', E')$ gọi là đồ thị con của G nếu $V' \subset V$ và $E' \subset E$

Định nghĩa 1.2.1.17: Đồ thị con $G' = (V', E')$ của đồ thị (có hướng) G = (V, E) gọi là thành phần liên thông (mạnh) của đồ thị G, nếu nó là đồ thị con liên thông (mạnh) tối đại của G, tức là không tồn tại đồ thị con liên thông (mạnh) $G'' = (V'', E'') \neq G'$ của G thỏa $V' \subset V''$, $E' \subset E''$.

1.2.2 Các định lí:

Định lí 1.2.2.1:

i) Trong đồ thị vô hướng mỗi dãy từ đỉnh v đến w chứa đường đi sơ cấp từ v đến w.

ii) Trong đồ thị có hướng mỗi dãy có hướng đi từ đỉnh v đến w chứa đường đi có hướng sơ cấp từ đỉnh v đến w.

Định lí 1.2.2.2: Đồ thị G lưỡng phân khi và chỉ khi G không chứa chu trình độ dài lẻ.

Định lí 1.2.2.3: Cho G = (V, E) với n đỉnh, và k thành phần liên thông. Khi đó số cạnh m của đồ thị thỏa bất đẳng thức:

$$n - k \leq m \leq \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}$$

Hệ quả 1.2.2.4: Mọi đơn đồ thị n đỉnh với số cạnh $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ là liên thông.

1.3. ĐỒ THỊ PHẲNG:

1.3.1 Các định nghĩa:

Định nghĩa 1.3.1.1: Một đồ thị gọi là đồ thị hình học phẳng nếu nó được biểu diễn trên mặt phẳng sao cho các cạnh không cắt nhau.

Định nghĩa 1.3.1.2: Một đồ thị gọi là phẳng nếu nó đẳng cấu với đồ thị hình học phẳng.

Định nghĩa 1.3.1.3: Hai đồ thị $G_1 = (V_1, E_1)$ và $G_2 = (V_2, E_2)$ gọi là đẳng cấu với nhau nếu tồn tại song ánh $f: V_1 \longrightarrow V_2$ và $g: E_1 \longrightarrow E_2$ thỏa mãn

$$\forall e \in E_1 : e = (v, \mathrm{w}) \Leftrightarrow g(e) = (f(v), f(\mathrm{w}))$$

cặp hàm f và g gọi là một đẳng cấu từ G_1 đến G_2.

Định nghĩa 1.3.1.4: Đồ thị G gọi là đồ thị tuyến tính phẳng, nếu G là đồ thị hình học phẳng có các cạnh là đoạn thẳng.

Định nghĩa 1.3.1.5: Hai đồ thị G_1 và G_2 gọi là đồng phôi, nếu G_1 và G_2 có thể rút gọn thành những đồ thị đẳng cấu qua một số phép rút gọn.

Định nghĩa 1.3.1.6: Cho đồ thị G có đỉnh v bậc 2 với các cạnh (v, v_1) và (v, v_2). Nếu ta bỏ hai cạnh (v, v_1) và (v, v_2) và thay bằng cạnh (v_1, v_2), thì ta nói rằng ta đã thực hiện phép rút gọn nối tiếp. Đồ thị G' thu được gọi là đồ thị rút gọn từ G.

1.3.2 Các định lí:

Mệnh đề 1.3.2.1: Hai đơn đồ thị $G_1 = (V_1, E_1)$ và $G_2 = (V_2, E_2)$ gọi là đẳng cấu với nhau nếu tồn tại song ánh $f: V_1 \longrightarrow V_2$ thỏa mãn $\forall v, \mathrm{w} \in G_1$: v kề w $\Leftrightarrow$ f(v) kề f(w). Trong trường hợp này, hàm f gọi là một đẳng cấu từ G_1 đến G_2.

Ghi chú: Với một đồ thị hình học phẳng liên thông, mặt phẳng được chia làm các miền con gọi là mặt. Mỗi mặt giới hạn bởi chu trình gọi là biên của mặt. Số cạnh trên biên của mặt f được gọi là bậc của mặt, kí hiệu deg(f). Bậc nhỏ nhất gọi là đai của đồ thị.

Mệnh đề 1.3.2.2: Mọi chu trình đồ thị phẳng có độ dài chẵn khi và chỉ khi mọi mặt của đồ thị có bậc chẵn.

Định lí 1.3.2.3: Mỗi đơn đồ thị phẳng đẳng cấu với đồ thị tuyến tính phẳng.

Định lí 1.3.2.4 *(Công thức Euler):* Cho G là đồ thị liên thông phẳng có e cạnh, v đỉnh và f mặt. Khi đó, ta có:

f = e – v + 2.

Định lí 1.3.2.5*(Bất đẳng thức cạnh-đỉnh):* Cho G là đơn đồ thị phẳng liên thông với e cạnh, v đỉnh và đai g ($g \geq 3$), không có đỉnh treo. Khi đó, ta có: $e \leq \frac{g}{g-2}(v-2)$

Hệ quả 1.3.2.6: Cho G là đơn đồ thị phẳng liên thông với e cạnh và v đỉnh $(v \geq 3)$ không có đỉnh treo. Khi đó, ta có: $e \leq 3v - 6$

Hệ quả 1.3.2.7: Đồ thị K_5 là không phẳng.

Hệ quả 1.3.2.8: Cho G là đơn đồ thị phẳng liên thông với e cạnh và v đỉnh $(v \geq 3)$. Không có đỉnh treo và không có chu trình độ dài 3. Khi đó, ta có: $e \leq 2v - 4$

Hệ quả 1.3.2.9 : Đồ thị $K_{3,3}$ là không phẳng.

CHƯƠNG 2
BÀI TOÁN TÔ MÀU ĐỒ THỊ

2.1. TÔ MÀU ĐỈNH:

2.1.1 Tô màu bản đồ:

Những bài toán liên quan đến tô màu bản đồ đã dẫn đến rất nhiều kết quả trong lý thuyết đồ thị. Khi tô màu bản đồ, ta thường tô 2 miền có chung đường biên giới bằng 2 màu khác nhau. Một bài toán đặt ra là xác định số màu tối thiểu cần sử dụng để tô màu các miền bản đồ sao cho các miền kề nhau không được tô cùng màu.

2.1.2. Đồ thị đối ngẫu:

Mỗi bản đồ trên mặt phẳng có thể biểu diễn bằng một đồ thị: Mỗi miền biểu diễn bằng 1 đỉnh; 2 đỉnh sẽ được nối với nhau khi 2 miền tương ứng có chung đường biên giới. Hai miền chỉ chung nhau tại 1 điểm coi như không kề nhau. Đồ thị này được gọi là đồ thị đối ngẫu (*hay đồ thị kép*) của bản đồ. Từ phương pháp xây dựng đồ thị kép của 1 bản đồ, dễ thấy mỗi bản đồ phẳng sẽ tương ứng với 1 đồ thị kép phẳng .

Bài toán tô màu các miền của bản đồ tương đương với bài toán tô màu các đỉnh đồ thị đối ngẫu sao cho các đỉnh kề nhau có màu khác nhau.

2.1.3. Các định nghĩa:

Định nghĩa 2.1.3.1: Tô màu đỉnh của một đơn đồ thị là sự gán màu cho các đỉnh của nó một màu cụ thể sao cho không có 2 đỉnh kề nhau được gán cùng màu.

Định nghĩa 2.1.3.2: Sắc số của một đồ thị G (Chromatic number) (kí hiệu $\chi(G)$), là số màu tối thiểu cần sử dụng để tô màu đồ thị này.

2.1.4. Các định lý:

Định lý 2.1.4.1: Nếu đồ thị G chứa đồ thị con đẳng cấu với K_n thì $\chi(G) \geq n$.

Định lý 2.1.4.2(Konig): Một đơn đồ thị có thể tô bằng 2 màu khi và chỉ khi nó không có chu trình độ dài lẻ.

Định lý 2.1.4.3: Mọi đơn đồ thị G ta luôn có $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.*(Đẳng thức xảy ra* khi *G là đồ thị đủ hoặc G là chu trình có độ dài lẻ).(* $\Delta(G)$ *:là bậc đỉnh lớn nhất của G).*

Định lý 2.1.4.4 (*Định lý Brooks)****:*** Cho G là đơn đồ thị n đỉnh liên thông khác K_n và không phải chu trình có độ dài lẻ. Khi đó $\chi(G) \leq \Delta(G)$

Định lý 2.1.4.5: Mọi đơn đồ thị đầy đủ K_n đều có: $\chi(K_n) = n$.

Định lý 2.1.4.6:Mọi chu trình độ dài lẻ đều có sắc số là 3.

Ghi chú: Nếu G' là một đồ thị con của G thì $\chi(G) \geq \chi(G')$.

2.1.5. Thuật toán tuần tự ưu tiên đỉnh có bậc lớn nhất:

Cho đồ thị G = (V, E) . Thuật toán sau sẽ tô màu các đỉnh đồ thị với số màu k gần với sắc số $\chi(G)$.

(i) Lập danh sách các đỉnh đồ thị E' := [v_1, v_2, ..., v_n] theo thứ tự bậc giảm dần $d(v_1) \geq d(v_2) \geq \ldots \geq d(v_n)$

Đặt i := 1.

(ii) Tô màu i cho đỉnh đầu tiên trong danh sách. Duyệt lần lượt các đỉnh tiếp theo và tô màu i cho đỉnh không kề đỉnh đã tô màu i.

(iii) Nếu tất cả các đỉnh đã được tô màu thì kết thúc: đồ thị đã được tô màu bằng i màu. Ngược lại sang bước (iv).

(iv) Loại khỏi E' các đỉnh đã được tô màu, đặt i := i + 1 và quay lại bước (ii).

+ Ghi chú:

(i) Mỗi đỉnh $v \in G$ được tô bằng màu có số hiệu thấp nhất chưa tô cho đỉnh kề v, và số đỉnh kề v không vượt quá $\Delta(G)+1$.

(ii) Có thể hiệu chỉnh E' ở bước (iv) như sau:

Loại khỏi E' các đỉnh đã tô màu. Sắp xếp lại các đỉnh trong E' theo thứ tự bậc giảm dần các đỉnh trong đồ thị con của G, có được bằng cách loại bỏ các đỉnh đã tô màu và các cạnh liên thuộc chúng.

2.1.6. Bài toán tô màu đỉnh:

Bài toán 1: Một người nuôi các loại con vật sau: A, B, C, D, E, F. Vì mối quan hệ giữa vật ăn thịt và con mồi, mà một số loại con vật có thể sống trong cùng một chuồng nhưng có những loại con vật không thể sống trong cùng một chuồng.

Bảng sau chỉ ra những loại con vật không thể sống cùng chuồng:

Loại con vật	A	B	C	D	E	F
Không thể sống cùng loại con vật	B, C	A, C, E	A, B, D, E	C, F	B, C, F	D, E

Xác định số lượng chuồng nuôi ít nhất mà người nuôi cần dùng để có thể nuôi tất cả các loại con vật trên?

Bài toán 2: Trường THPT ở một Huyện, trong một học kỳ của năm học nhà trường tổ chức cho học sinh lớp 12*(thí sinh tự do)* theo học một trong 7 lớp sau:

Lớp 1 sẽ học các môn: Toán, Tiếng Anh, Sinh học, Hóa học;

Lớp 2 sẽ học các môn: Toán, Tiếng Anh, Tin học, Địa lý;

Lớp 3 sẽ học các môn: Sinh học, GDCD, Vật lý, Địa lý;

Lớp 4 sẽ học các môn: Ngữ văn, Sinh học, Tin học, Lịch sử;

Lớp 5 sẽ học các môn: Tiếng Anh, GDCD, Tin học, Lịch sử;

Lớp 6 sẽ học các môn: Ngữ văn, Hóa học, GDCD, Tin học;

Lớp 7 sẽ học các môn: Vật lý, Lịch sử, Địa lý, GDCD.

Cuối kỳ nhà trường tổ chức cho các lớp thi các môn đã học. Hãy sắp xếp một lịch thi để các lớp đều có thể tham gia thi các môn mà họ đã học sao cho số lần tổ chức thi là ít nhất.

2.2. TÔ MÀU ĐỒ THỊ PHẲNG:

2.2.1 Định nghĩa:

Một đồ thị được gọi là phẳng nếu nó có thể vẽ được trên một mặt phẳng mà không có các cạnh nào cắt nhau (ở mọi điểm không phải là điểm mút của các cạnh) Hình vẽ như thế gọi là một biểu diễn phẳng của đồ thị.

2.2.2 Các định lí:

Định lý 2.2.2.1: Mọi bản đồ tạo bởi các đường thẳng trên mặt phẳng có thể tô bằng 2 màu.

Định lý 2.2.2.2: Điều kiện cần và đủ để bản đồ có thể tô bằng 2 màu là mọi đỉnh của đồ thị phẳng tương ứng với bậc chẵn lớn hơn hoặc bằng 2.

Định lý 2.2.2.3*(Kempe-Heawood):* Mọi đồ thị phẳng đều có sắc số nhỏ hơn hoặc bằng 5.

Định lí 2.2.2.4*(Định lý 4 màu):* Mọi đồ thị phẳng đều có sắc số không lớn hơn 4.

2.3. TÔ MÀU CẠNH:

2.3.1 Các định nghĩa:

Định nghĩa 2.3.1.1: Tô màu cạnh một đơn đồ thị là sự gán màu cho các cạnh của nó sao cho không có hai cạnh kề được gán cùng một màu.

Định nghĩa 2.3.1.2: Sắc số cạnh của đồ thị G, ký hiệu $\chi'(G)$, là số màu tối thiểu cần thiết để tô màu cạnh đồ thị.

Ghi chú: Mọi đồ thị G ta có: $\chi'(G) \geq \Delta(G)$

Giả sử ta tô màu các cạnh của đồ thị G = (V,E). Công việc này có thể đưa về việc tô màu các đỉnh của đồ thị đường L(G).

2.3.2 Các định lí:

Định lý 2.3.2.1: $\chi'(G) = \chi(L(G))$, L(G) là đồ thị đường.

Định lý 2.3.2.2: (*Định lý Konig 1916*) Nếu G là đồ thị lưỡng phân thì $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Ghi chú: Đặc biệt sắc số cạnh của đồ thị lưỡng phân đủ K_{mxn} là $\max\{m, n\}$

Định lý 2.3.2.3:

(i) Nếu n chẵn, thì $\chi'(K_n) = \Delta(K_n) = n - 1$

(ii) Nếu n lẻ, thì $\chi'(K_n) = \Delta(K_n) + 1 = n$

Định lý 2.3.2.4*:* (*Định lý Vizing 1964*) Mọi đơn đồ thị G đều thỏa mãn: $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$

Định lý 2.3.2.5: Cho G là đồ thị đủ với số đỉnh là 2n. Khi đó $\chi'(G) = 2n - 1$

Định lý 2.3.2.6: Cho G là đồ thị đủ với số đỉnh là 2n-1. Khi đó $\chi'(G) = 2n - 1$

Định lý 2.3.2.7: Cho dãy số nguyên $a_1 = 2, a_2 = 5, ..., a_{n+1} = (n+1)a_n + 1$. Khi đó đồ thị đủ với $a_n + 1$ đỉnh với các cạnh được tô bằng n màu luôn luôn có chu trình tam giác cùng màu.

Định lý 2.3.2.8: Cho dãy số nguyên $b_2 = 3, b_3 = 6, ..., b_{n+1} = (b_n - 1)n + 2$ khi đó đồ thị đủ với $b_{n+1} - 1$ đỉnh và các cạnh được tô bằng n màu sao cho không có chu trình tam giác cùng màu thì trong đồ thị có hình 5 cạnh với các cạnh cùng màu và các đường chéo được tô các màu khác.

2.3.3 Bài toán tô màu cạnh:

Bài toán 1. Có 5 thành phố, từ mỗi thành phố có đường bay đến một số thành phố khác. Biết rằng cứ lấy ba thành phố bất kì trong 5 thành phố đó thì có hai thành phố có đường bay trực tiếp đến nhau và hai thành phố chưa có đường bay như vậy. Chứng minh rằng:

a) Mỗi thành phố có đường bay trực tiếp đến hai và chỉ hai thành phố khác;

b) Từ mỗi thành phố có thể bay đến các thành phố khác, mỗi nơi một lần và quay về chỗ cũ.

Bài toán 2. Có 6 đội bóng thi đấu với nhau *(Mỗi đội phải đấu một trận với 5 đội khác)*. Chứng minh rằng vào bất cứ lúc nào cũng có ba đội trong đó từng cặp đã đấu với nhau rồi hoặc chưa đấu với nhau trận nào.

Bài toán 3. Chứng minh rằng trong bất kì 6 người nào cũng có hai nhóm, mỗi nhóm ba người, từng đôi một đã quen biết nhau hoặc mới gặp nhau lần đầu tiên.

Bài toán 4. Trong một buổi họp tổ đầu năm học lớp 10, bạn tổ trưởng phát hiện ra một điều: mỗi bạn trong tổ (tổ có 9 bạn) đã quen đúng với ba bạn khác. Bạn Bích nói ngay: “Vô lí không thể được!” Vì sao bạn Bích lại có thể nói như thế?

Bài toán 5. Trong phòng có 9 người, trong đó bất kỳ 3 người nào cũng có 2 người quen nhau. Chứng minh rằng có 4 người từng đôi một quen nhau.

Bài toán 6. Có 17 nhà bác học, mỗi người trao đổi thư từ với 16 người khác. Trong thư, họ chỉ bàn về ba đề tài, nhưng bất cứ hai nhà bác học nào cũng chỉ bàn với nhau chỉ về một đề tài. Chứng minh rằng có không ít hơn 3 nhà bác học đã bàn với nhau về cùng một đề tài.

(Đề thi toán quốc tế lần thứ VI, 1964)

Bài toán 7. (*Bài toán nữ sinh Lucas)* Trong một ký túc xá có 2n nữ sinh. Mỗi sáng họ đi từng cặp đến trường. Có thể sắp xếp nhiều nhất bao nhiêu lần đi như vậy sao cho không có 2 nữ sinh đi cùng nhau quá một lần?

Bài toán 8. Trong không gian cho 7 điểm sao cho không có bất cứ 3 điểm nào trong số đó thẳng hàng. Một số cặp điểm được nối với nhau bằng các đoạn thẳng. Gọi n là số đoạn thẳng đã nối. Mỗi đoạn thẳng được tô bởi một trong hai màu đỏ hoặc xanh. Tìm giá trị nhỏ nhất của n, sao cho với mọi cách nối n đoạn thẳng đã được tô màu trong 7 điểm đã cho luôn tồn tại một tam giác có cạnh cùng màu?

(Thi IMO lần thứ 33,1992)

CHƯƠNG 3: ỨNG DỤNG

3.1. BÀI TOÁN ĐIỀU KHIỂN ĐÈN HIỆU NÚT GIAO THÔNG:

3.1.1 Bài toán:

Giả sử ta cần thiết lập một quy trình điều khiển đèn hiệu ở nút giao thông phức tạp, nhiều giao lộ, sao cho trong một khoản thời gian ấn định, một số tuyến được thông qua, trong khi một số tuyến khác bị cấm để tránh xảy ra đụng độ.

Vấn đề đặt ra là phân hoạch các tuyến đường thành một số ít nhất các nhóm, sao cho các tuyến trong mỗi nhóm không đụng độ. Khi đó thời gian chờ đợi tối đa để được thông đường là ít nhất.

3.1.2 Cách giải:

Giả sử nút giao thông có n tuyến T_1, T_2,…, $T_{n.}$

Những tuyến giao nhau có thể dẫn đến đụng độ gọi là các tuyến xung khắc.

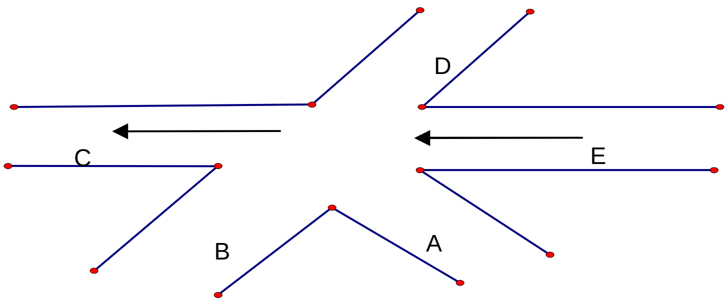
Như vậy đèn hiệu phải báo sao cho những tuyến xung khắc không đồng thời giao thông, và cho phép đồng thời lưu thông những tuyến không xung khắc.

Ta mô hình hóa bài toán bằng đồ thị và đưa về bài toán tô màu đồ thị như sau:

Các đỉnh của đồ thị là các tuyến đường, và hai tuyến kề nhau khi và chỉ khi chúng xung khắc.

Ta tô màu các đỉnh đồ thị sao cho các đỉnh kề nhau không cùng màu. Ta coi mỗi màu đại diện cho một pha điều khiển đèn báo: các tuyến cùng màu đó lưu thông. Như vậy bài toán ban đầu đưa về bài toán tô màu đồ thị với số màu ít nhất.

3.1.3 Ví dụ: Xét nút giao thông sau:



Hỏi cần bao nhiêu pha để điều khiển nút giao thông lưu thông tất cả các tuyến? Ở đây C và E là đường 1 chiều, còn các đường khác là đường 2 chiều.

3.2. BÀI TOÁN LẬP LỊCH THI:

3.2.1 Bài toán:

Giả sử mỗi học sinh phải thi một số môn trong n môn thi. Hãy lập lịch thi sao cho không có học sinh nào có hai môn thi cùng một thời gian và số đợt thi là ít nhất.

3.2.2 Cách giải:

Để giải bài toán ta lập đồ thị có các đỉnh là các môn thi và hai môn thi kề nhau nếu có một học sinh thi cả hai môn này. Thời gian thi của mỗi môn được biểu thị bằng các màu khác nhau. Như vậy bài toán lập lịch thi được đưa về bài toán tô màu đồ thị.

3.2.3 Ví dụ: Có 9 môn thi cần xếp lịch, các môn học được đánh số từ 1 đến 9, các cặp môn thi sau có chung học sinh.

(1, 2); (1, 3); (1, 5); (1, 6); (1, 8); (2, 3); (2, 4); (2, 5); (2, 7); (2, 9); (3, 4); (3, 6); (3, 8); (4, 5); (4, 6); (4, 8); (5, 3); (5, 6); (5, 9); (6, 2); (6, 8); (7, 6); (7, 8); (7, 9); (8, 9); (9, 1).

Hãy sắp xếp lịch thi sao cho các học sinh đều tham gia thi được các môn trên.

3.3. BÀI TOÁN PHÂN CHIA TẦN SỐ:

3.3.1 Bài toán:

Có n đài phát. Hãy phân chia các kênh truyền hình cho các đài phát sao cho hai đài cách nhau không quá 100 (km) không được trùng kênh và số kênh dùng là ít nhất.

3.3.2 Cách giải:

Để giải bài toán ta lập đồ thị có các đỉnh là các đài phát và hai đài phát kề nhau nếu khoảng cách giữa chúng không quá 100 (km). Kênh truyền hình của mỗi đài được biểu thị bằng các màu khác nhau. Như vậy bài toán phân chia tần số được đưa về bài toán tô màu đồ thị.

3.3.3 Ví dụ: Xác định số kênh truyền hình ít nhất dùng để phân chia cho các đài truyền hình ở 11 tỉnh *(mỗi tỉnh chỉ có một đài truyền hình)*: Đà Nẵng, Quảng Ngãi, Bình Định, Phú Yên, Khánh Hòa, Lâm Đồng, Ninh Thuận, Bình Phước, Gia Lai, Kon Tum, Đắk Lắk sao cho không có hai đài phát nào ở hai tỉnh nằm cạnh nhau trên bảng đồ địa lí dùng cùng một kênh.

3.4. BÀI TOÁN THANH GHI TRONG BỘ DỊCH:

3.4.1 Bài toán:

Trong các bộ dịch hiệu quả cao, việc thực hiện các vòng lặp được tăng tốc khi các biến dùng thường xuyên được ghi tạm thời trong các thanh ghi chỉ số của bộ xử lí trung tâm (CPU) mà không phải ở trong bộ nhớ thông thường. Với một vòng lặp cho trước, cần ít nhất bao nhiêu thanh ghi chỉ số.

3.4.2 Cách giải:

Ta giải bài toán bằng mô hình tô màu đồ thị. Để xây dựng mô hình ta coi mỗi đỉnh của đồ thị là một biến trong vòng lặp. Giữa hai đỉnh có một cạnh nếu các biến biểu thị bằng các đỉnh này phải được lưu trong các thanh ghi chỉ số tại cùng thời điểm khi thực hiện vòng lặp. Như vậy số màu của đồ thị chính là số thanh ghi cần có vì những thanh ghi khác nhau được phân cho các biến khi các đỉnh biểu thị các biến này là liền kề trong đồ thị.

3.5 MỘT SỐ ỨNG DỤNG KHÁC VỀ TÔ MÀU:

Bài toán 1. *(Bài toán nữ sinh Kirkman)*

Trong một ký túc xá có 15 nữ sinh. Mỗi sáng họ đi từng nhóm 3 người đến trường với tất cả 7 ngày trong tuần. Có thể sắp xếp nhiều nhất bao nhiêu lần đi như vậy sao cho không có 2 nữ sinh đi cùng nhau quá một lần.

Bài toán 2. Giả sử trong năm thành phố ở Việt Nam: Hà Nội, Đồng Hới, Huế, Đà Nẵng, Hải Phòng nếu chọn ra ba thành phố bất kỳ đều có hai thành phố nối với nhau bởi đường hàng không trực tiếp và hai thành phố không có đường hàng không trực tiếp.

a) Chứng minh rằng mỗi thành phố đều có đường hàng không trực tiếp với đúng hai thành phố khác.

b) Một khách du lịch muốn đến cả năm thành phố trên để tham quan các thắng cảnh. Hỏi khi xuất phát tại một thành phố bất kỳ trong năm thành phố trên, người ta có thể chọn đường hàng không trực tiếp để đến các thành phố còn lại, mỗi thành phố một lần và quay về thành phố xuất phát được hay không?

Bài toán 3. (*Bài toán xếp thời khóa biểu ở trường học)*

Cho danh sách một số giáo viên và danh sách các lớp học được dạy bởi các giáo viên này. Giả sử rằng có đủ phòng học để cho các giáo viên thực hiện các tiết dạy của mình tại các lớp nhưng tại một thời điểm thì một giáo viên chỉ có thể dạy tại một lớp và cùng một lúc tại một lớp không thể có nhiều hơn một giáo viên dạy. Xác định thời gian tối thiểu cần thiết để bố trí cho các giáo viên thực hiện các tiết dạy của mình tại các lớp, biết rằng một tiết dạy có thời gian 45 phút.

Bài toán 4. Trong một nước, bất kỳ 2 thành phố nào cũng nối với nhau trực tiếp bằng một trong các phương tiện giao thông: ô tô, tàu hỏa hoặc máy bay. Biết rằng: không có thành phố nào được nối với các thành phố khác bằng cả 3 phương tiện giao thông, đồng thời không có bộ ba thành phố nào từng cặp được nối với nhau bằng cùng một phương tiện. Trong nước đó, có thể có nhiều nhất là bao nhiêu thành phố?

(Thi học sinh giỏi Mỹ, 1981; Bungari, 1981)

Bài toán 5. Có 20 đội bóng thi đấu với nhau. Hỏi số trận đã đấu tối thiểu là bao nhiêu để cho trong bất cứ ba đội bóng nào cũng có hai đội đã đấu với nhau rồi?

(Thi học sinh giỏi Liên Xô, lớp 9-10, ngày thứ 2, 1969)

Bài toán 6.

a) Có 8 thành phố; giữa bất kì 2 thành phố nào cũng có đường giao thông bằng một trong các phương tiện: ôtô, tàu thủy hoặc máy bay. Chứng minh rằng có ít nhất 4 thành phố được nối với nhau bằng cùng một phương tiện giao thông.

b) Cho một đồ thị đầy đủ với n đỉnh, mỗi cạnh của nó đều được tô bằng một trong 3 màu. Chứng minh rằng có một đồ thị con liên thông, chứa không ít hơn $\frac{n}{2}$ đỉnh, có các cạnh được tô cùng một màu.

(Câu b: đề thi sinh viên giỏi, khoa Toán lý,
trường đại học tổng hợp Lomonossov, 1982)

Bài toán 7. Cho 9 điểm trong không gian trong đó không có 4 điểm nào đồng phẳng. Tất cả những điểm này được nối với nhau từng cặp bằng các đoạn thẳng. Mỗi đoạn thẳng được tô màu xanh hoặc màu đỏ hoặc không tô màu. Tìm giá trị nhỏ nhất của n sao cho với mỗi cách tô màu n đoạn thẳng luôn tồn tại một tam giác có cạnh cùng màu.

Bài toán 8. Cho đồ thị đầy đủ có k đỉnh; các cạnh được tô màu xanh, đỏ hoặc trắng. Tìm giá trị nhỏ nhất của n sao cho với mọi cách tô màu n cạnh của đồ thị luôn tìm được một tam giác có cạnh cùng màu.

Bài toán 9. Chứng minh rằng trong sáu người bất kì hoặc có ba người đôi một quen nhau, hoặc có ba người đôi một không quen nhau.

Bài toán 10. Một hình chữ nhật kẻ ô vuông có 1991 hàng và 1992 cột. Kí hiệu ô vuông nằm ở giao của hàng thứ m (kể từ trên xuống dưới) và cột thứ n (kể từ trái sang phải) là (m; n). Tô màu các ô vuông của bảng theo cách sau: lần thứ nhất tô 3 ô (r; s), (r+1; s+1), (r+2; s+1), với r, s là hai số tự nhiên cho trước thỏa mãn $1 \leq r \leq 1989$ và $1 \leq s \leq 1991$; từ lần thứ hai mỗi lần tô đúng ba ô chưa có màu nằm cạnh nhau hoặc trong cùng một hàng hoặc trong cùng một cột. Hỏi bằng cách đó có thể tô màu được tất cả các ô vuông của bảng đã cho hay không?

KẾT LUẬN

- Qua quá trình nghiên cứu đề tài tôi đã nhận được một số kết quả sau:

1. Với bản thân đã hệ thống được một số kiến thức cơ bản về Lý Thuyết tô màu tô thị và hiểu sâu hơn về các định lí và các bài toán tô màu đồ thị.

2. Đưa ra được các phương án vận dụng.

3. Xây dựng được hệ thống các bài toán sơ cấp giải được bằng cách vận dụng những kết quả của bài toán tô màu đồ thị.

4. Hướng phát triển của đề tài: Tiếp tục nghiên cứu vận dụng lý luận và kết quả của lý thuyết tô màu đồ thị và việc bồi dưỡng học sinh.

- Luận văn này được viết với mong muốn nghiên cứu sâu những định lý và ứng dụng của bài toán tô màu đồ thị, để từ đó xây dựng một hệ thống các bài toán sơ cấp có thể giải được bằng cách vận dụng những kết quả của bài toán tô màu đồ thị.