BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

MAI TUYẾT HOA

CÁC PHƯƠNG TRÌNH HÀM HAI BIẾN

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 60.46.40

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Đà Nẵng - 2011

Công trình được hoàn thành tại
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

Người hướng dẫn khoa học: **TS. LÊ HOÀNG TRÍ**

Phản biện 1: TS. NGUYỄN NGỌC CHÂU

Phản biện 2: PGS. TS. NGUYỄN GIA ĐỊNH

Luận văn được bảo vệ tại Hội đồng chấm luận văn tốt nghiệp Thạc sĩ khoa học họp tại Đại học Đà Nẵng vào ngày 22 tháng 10 năm 2011.

** Có thể tìm hiểu luận văn tại:*
- Trung tâm Thông tin - Học liệu, Đại học Đà Nẵng
- Thư viện trường Đại học Sư Phạm, Đại học Đà Nẵng.

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Phương trình hàm là một trong những lĩnh vực nghiên cứu quan trọng của Giải tích Toán học.

Trong các kì thi Olympic Toán quốc gia và quốc tế, Olympic Toán khu vực, thường xuất hiện các dạng toán khác nhau có liên quan đến phương trình hàm. Tuy nhiên, cho đến nay, học sinh các trường chuyên, lớp chọn còn biết rất ít các phương pháp chính thống để giải các phương trình hàm. Đặc biệt, hiện nay còn thiếu các cuốn sách về chuyên đề phương trình hàm và ứng dụng của chúng.

Phương trình hàm thường là bài toán khó xuất hiện trong đề thi của các cuộc thi toán học. Bởi vì để giải nó thì chỉ cần một ít lý thuyết cơ sở nhưng lại cần nhiều kỹ năng.

Trong toán học đương đại nó đóng vai trò chính để giải quyết các bài toán liên quan. Phương trình hàm ứng dụng rất nhiều trong chương trình toán phổ thông, chương trình bồi dưỡng học sinh giỏi toán.

Xuất phát từ những vấn đề nêu trên của phương trình hàm và ứng dụng của nó, chúng tôi quyết định chọn đề tài nghiên cứu với tên: ***"Các phương trình hàm hai biến"***.

2. Mục đích nghiên cứu

Mục tiêu của đề tài nhằm nghiên cứu các phương trình hàm hai biến. Hệ thống một số bài toán có thể giải được bằng phương trình hàm hai biến. Định hướng cho học sinh cách vận dụng phương trình hàm hai biến vào việc giải các lớp bài toán.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Đối tượng và phạm vi nghiên cứ u của đề tài là khảo sát các phương trình hàm hai biến. Hệ thống các bài toán liên quan đến các phương trình hàm hai biến này. Từ đó nghiên cứu các phương pháp cơ bản giải các bài toán vận dụng các phương trình hàm hai biến.

4. Phương pháp nghiên cứu

- Thu thập các tài liệu, các bài báo khoa học của các tác giả nghiên cứu liên quan đến *Phương trình hàm và các phương trình hàm hai biến*.
- Tham gia các buổi seminar hàng tuần để trao đổi các kết quả đang nghiên cứu.

- Thu thập các đề toán trong các cuộc thi liên quan đến phương trình hàm, giải các bài toán đó nếu chưa có lời giải tham khảo. Từ đó đề ra phương pháp chung cho các bài toán mang tính chất tương tự.

5. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài

- Tổng quan các kết quả của các tác giả đã nghiên cứu liên quan đến các phương trình hàm hai biến nhằm xây dựng một tài liệu tham khảo cho những ai muốn nghiên cứu các phương trình hàm hai biến.
- Chứng minh chi tiết và làm rõ một số định lý, mệnh đề cũng như đưa ra một số bài toán, ví dụ minh họa đặc sắc và có chọn lọc làm cho người đọc dễ dàng tiếp cận vấn đề được đề cập.

6. Cấu trúc của luận văn

Ngoài phần mở đầu và kết luận, luận văn gồm 3 chương

Chương 1. Giới thiệu các phương trình hàm hai biến

Chương 2. Trình bày các bài toán về phương trình hàm hai biến

Chương 3. Ứng dụng các phương trình hàm hai biến vào việc bồi dưỡng học sinh giỏi

- Trong Chương 1, trình bày các kiến thức cơ sở sẽ dùng cho các chương sau.
- Trong Chương 2, trình bày một số bài toán tiêu biểu, đặc sắc và một số bài toán tổng hợp về các phương trình hàm hai biến.
- Các phương pháp cơ bản vận dụng các phương trình hàm hai biến được trình bày trong Chương 3.

Chương 1. GIỚI THIỆU CÁC PHƯƠNG TRÌNH HÀM HAI BIẾN

1.1 Phương trình Cauchy

Phương trình Cauchy có dạng $f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in R.$ (1.1)

với $f: R \to R$ là một hàm liên tục. Ngiệm của phương trình

$$\exists a \in R: f(x) = ax, \ \forall x \in R.$$

Để tìm nghiệm của phương trình Cauchy, chứng minh các mệnh đề, định lý sau

Mệnh đề 1.1. *Cho $f: R \to R$ thoả mãn phương trình Cauchy*

$$f(x + y) = f(x) + f(y),\ \forall x, y \in R.$$

Khi đó $\exists a \in R$: $f(q)=aq,\ \forall q \in Q$.

Mệnh đề 1.2. *Giả sử* f: $R \to R$ *và* g: $R \to R$ *là hai hàm liên tục sao cho*

$$f(q) = g(q) \text{ với mọi } q \text{ là số hữu tỉ.}$$

Khi đó $f(x) = g(x)$ *với mọi* x *là số thực.*

Định lý 1.3. *Cho* f: $R \to R$ *là hàm liên tục thoả mãn phương trình Cauchy* $f(x + y) = f(x) + f(y)$ *với mọi* x, y *là số thực.*

Khi đó tồn tại một số thực a *sao cho* $f(x) = ax$ *với mọi* x *là số thực.*

Định lý 1.4. *Cho* f: $R \to R$ *thỏa mãn phương trình Cauchy. Giả sử* $\exists c,d \in R, c < d$ *sao cho* f *bị chặn dưới trên đoạn* $[c,d]$. *Nói cách khác, tồn tại một số thực* A *sao cho* $f(x) \geq A$ *với mọi* $c \leq x \leq d$. *Khi đó tồn tại một số thực* a *sao cho* $f(x) = ax$ *với mọi* x *là số thực.*

Ứng dụng phương trình Cauchy

Mệnh đề 1.5. *Giả sử* f: $R \to R$ *thoả mãn phương trình Cauchy*

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ với mọi } x, y \in R$$

và cũng đơn điệu tăng nghĩa là $f(x) \leq f(y)$ với mọi số thực $x \leq y$. *Khi đó* $\exists a \geq 0$: $f(x) = ax,\ \forall x \in R$.

Mệnh đề 1.6. *Giả sử* f: $R \to R$ *thoả mãn cả hai phương trình*

$$f(x + y) = f(x) + f(y),\ \forall x, y \in R,$$

$$f(xy) = f(x)\, f(y),\ \forall x, y \in R.$$

Khi đó $f(x) = 0$ *hay* $f(x) = x\ \ \forall x \in R$.

1.2 Phương trình Jensen

Phương trình Jensen có dạng $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$

Dạng chung của hàm f phải là $f(x) = ax + b$, với $a, b \in R$.

1.3 Phương trình hàm tuyến tính

Phương trình hàm tuyến tính có dạng

$$f(ax + by + c) = pf(x) + qf(y) + r$$

Dạng chung của hàm f là $f(x) = sx + t$.

1.4 Phương trình mũ Cauchy

Phương trình mũ Cauchy có dạng $f(x + y) = f(x)f(y)$ trong đó hàm f:$R \to R$ được giả thiết liên tục và không đồng nhất bằng 0.

Nghiệm của phương trình là $\exists b > 0$: $f(x) = b^x,\ \forall x \in R$.

Xét phương trình $f(xy) = f(x)\ f(y),\ \forall x, y \in R^+$. Nghiệm của phương trình là $\left[\begin{array}{l} f(x) = x^k, \forall x > 0. \\ f(x) = 0, \forall x \in R. \end{array}\right.$.

1.5 Phương trình Pexider

Phương trình Pexider có dạng $f(x + y) = g(x) + h(y)$. Ta cần tìm tất cả các hàm liên tục f, g, h: R $\to$ R thoả mãn phương trình trên với mọi số thực x, y.

Nghiệm của phương trình Pexider là: $f(z) = cz + a + b$;
$g(x) = cx + a$
$h(y) = cy + b$

trong đó $a, b, c \in R$.

1.6 Phương trình Vincze

Giả sử ta cần tìm tất cả các nghiệm f, g, h và k của phương trình

$$f(x + y) = g(x)k(y) + h(y),\ \forall x, y \in R.$$

với điều kiện hàm f, g, h và k liên tục.

Đặt $\phi(y) = \frac{k(y)}{a}$, với $k(0) = a$.

*Trường hợp thứ nhất: $\phi(y) = 1, \forall y \in R$. Nghiệm của phương trình là $f(x) = dx + c$, $k(y) = a$, $g(x) = \frac{(dx + c - b)}{a}$, $h(y) = dy + b$, trong đó $a, b, c, d \in R, \forall x, y \in R$.

* Trường hợp thứ hai: $\exists y_0 \in R$: $\phi(y_0) \neq 1$. Nghiệm của phương trình là

$$f(x) = st^{x} + c,\ k(y) = at^{y},\ g(x) = \frac{(st^{x} + c - b)}{a},\ h(y) = c + (b - c)t$$

trong đó $a, b, c, s, t \in R, t > 0$ và $t \neq 1, \forall x, y \in R$.

1.7 Bất phương trình hàm Cauchy

Hãy tìm tất cả các nghiệm của bất phương trình hàm

$$f(x + y) \leq f(x) + f(y), \forall x, y \in R.$$

Ta chỉ đi tìm một họ hàm riêng biệt f thoả mãn $f(x) \leq x, \forall x \in R$.

Nghiệm của bất phương trình hàm là $f(x) = x, \forall x \in R$.

1.8 Phương trình hàm hai biến

Giả thiết $f(x,y)$ là hàm số thực liên tục có hai biến số x, y thoả mãn

$$f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y), \forall x_1, x_2, y \in R,$$

$$f(x, y_1 + y_2) = f(x, y_1) + f(x, y_2), \forall x, y_1, y_2 \in R.$$

Kết luận rằng $f(x, y) = c_0 xy$, $\forall x, y \in R$.

1.9 Phương trình Euler

Cho k là một số thực bất kỳ. Với k cho trước, phương trình

$$f(tx, ty) = t^k f(x, y), \forall x, y, t \in R^+.$$

được gọi là phương trình Euler. Hàm $f(x)$ thoả mãn phương trình Euler được gọi là hàm thuần nhất bậc k.

1.10 Phương trình D'Alembert

Bây giờ ta phân tích phương trình D'Alembert

$$g(x + y) + g(x - y) = 2g(x)g(y)$$

Giả thiết $g(x)$ là hàm liên tục và $\exists t > 0$: $g(x) > 0$ với mọi số thực x trong khoảng đóng $[-t, t]$.

* Trường hợp thứ nhất: $0 < g(t) \leq 1$. Nghiệm của phương trình là

$g(x) = \cos(ax)$ với mọi số thực x, $a > 0$.

* Trường hợp thứ hai: $g(t) > 1$. Ta định nghĩa hàm hyperbol cosin và hyperbol sin là $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Tương tự như trường hợp thứ nhất, ta có $g(x) = \cosh(ax)$ với mọi số thực x, $a > 0$.

Chương 2. TRÌNH BÀY CÁC BÀI TOÁN VỀ PHƯƠNG TRÌNH HÀM HAI BIẾN

2.1 Các bài toán về phương trình Cauchy

Bài toán 1. Xác định các hàm $f(x)$ liên tục trên R thoả mãn điều kiện

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in R$$

Đáp số: $f(x) = ax$, với $a \in R$

Bài toán 2. Tìm các hàm $f(x)$ xác định và có đạo hàm trên R thoả mãn điều kiện $f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in R$.

Đáp số: $f(x) = ax$, với $a \in R$.

Bài toán 3. Tìm các hàm $f(x)$ xác định và đồng biến trên R thoả mãn điều kiện $f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in$ R

Đáp số: $f(x) = ax, \forall x \in R$, với $a > 0$.

Bài toán 4. Cho $c > 0$. Xác định các hàm $f(x)$ thoả mãn điều kiện

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y) \\ |f(x)| \leq c, \quad \forall x \in [-1,1]. \end{cases}$$

Đáp số: $f(x) = ax$, $\forall x \in R$ và $|a| \leq c$.

Bài toán 5. (IMO 1979) Cho hàm $f: R \to R$ thoả mãn điều kiện

$$f(xy + x + y) = f(xy) + f(x) + f(y), \forall x, y \in R.$$

Chứng minh rằng $f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in R$.

2.2 Các bài toán về phương trình Jensen

Bài toán 6. Tìm hàm $f(x)$ xác định và liên tục trên R thỏa mãn điều kiện:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}, \qquad \forall x, y \in R.$$

Đáp số: $f(x) = ax + b$, với $a, b \in R$.

Bài toán 7. Tìm các hàm $f(x)$ xác định, khả vi trên R và thoả mãn điều kiện $f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}$, $\forall x, y \in R$

Đáp số: $f(x) = ax + b$ với $a, b \in R$.

Bài toán 8. Xác định các hàm số $f(x)$ liên tục trên $R\backslash\{0\}$ và thỏa mãn điều kiện $f\left(\frac{2xy}{x+y}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}$, $\forall x, y, x + y \neq 0$.

Đáp số: $f(x)=\frac{a}{x}+b$, $\forall x \neq 0$.với $a, b \in R$.

2.3 Phương trình hàm tuyến tính

Bài toán 9. Cho $a, b \in R\backslash\{0\}$. Tìm các hàm $f(x)$ xác định, liên tục trên R và thỏa mãn điều kiện $f(ax + by) = af(x) + bf(y)$, $\forall x, y \in R$.

Đáp số: Nếu $a + b \neq 1$ thì $f(x) = cx$, với $c \in R$.

Nếu $a + b = 1$ thì $f(x) = cx + d$, với $c, d \in R$.

Bài toán 10. Cho $a, b, c \in R\backslash\{0\}$. Tìm các hàm $f(x)$ xác định, liên tục trên R và thỏa mãn điều kiện $f(ax + by) = af(x) + bf(y) + c$, $\forall x, y \in R$.

Đáp số: $f(x) = sx + t$ với $s, t \in R$.

Bài toán 11. Cho $a, b, c, d \in R\backslash\{0\}$. Tìm các hàm $f(x)$ xác định, liên tục trên R và thỏa mãn điều kiện

$f(ax + by + c) = af(x) + bf(y) + d$, $\forall x, y \in R$.

Đáp số: $f(x) = sx + t$, với $s, t \in R$.

2.4 Các bài toán về phương trình mũ Cauchy

Bài toán 12. Xác định các hàm $f(x)$ liên tục trên R thoả mãn điều kiện $f(x + y) = f(x)f(y)$, $\forall x, y \in R$.

Đáp số: $\begin{cases} f(x)=0 \\ f(x)=a^x (a>0) \end{cases}$

Bài toán 13. Xác định các hàm $f(x)$ liên tục trên R thoả mãn điều kiện $\begin{cases} f(x-y)=\frac{f(x)}{f(y)}, \forall x, y \in R \\ f(x) \neq 0, \forall x \in R \end{cases}$

Đáp số: $f(x) = a^x$, trong đó $a > 0$.

Bài toán 14. Tìm các hàm $f(x)$ xác định và khả vi trên R thỏa mãn điều kiện $f(x + y) = f(x)f(y)$, $\forall x, y \in R$.

Đáp số: $\begin{cases} f(x)=0 \\ f(x)=e^{ax}, \forall x \in R \quad (a>0) \end{cases}$

Bài toán 15. Cho $c > 0$. Xác định các hàm $f(x)$ thỏa mãn các điều kiện $\begin{cases} f(x+y)=f(x)f(y), \forall x, y \in R \\ |f(x)| \leq c, \forall x \in [-1,1] \end{cases}$

Đáp số: + Nếu $0 < c \leq 1$ thì f(x) = 0

+ Nếu $c > 1$ thì $\begin{cases} f(x)=0 \\ f(x)=e^{\alpha x} \end{cases}$ với $\alpha \in R$ sao cho $|\alpha| \leq \ln c$.

2.5 Các bài toán về phương trình Pexider

Bài toán 16. Tìm tất cả các hàm xác định và khả vi $f, g, h: R \to R$ thoả mãn phương trình $f(x + y) = g(x) + h(y)$, $\forall x, y \in R$.

Đáp số: $f(z) = az + b$; $g(x) = ax + b + c$; $h(y) = ay – c$

trong đó $a, b, c \in R$.

Bài toán 17. Tìm tất cả các hàm liên tục $f, g, h: R \to R$ thoả mãn phương trình $f(x + y) = g(x)\, h(y)$, $\forall x, y \in R$.

Đáp số: $f(z) = abz^k$; $g(x) = ax^k$; $h(y) = by^k$

trong đó a, b, k là các số thực.

2.6 Các bài toán về phương trình Vincze

Bài toán 18. Tìm tất cả các hàm liên tục $f, g, k, h, u: R \to R$ thoả mãn phương trình $f(x + y) = g(x)k(y) + u(x) + h(y)$, $\forall x, y \in R$.

Đáp số: Đặt $\phi(y)=\frac{k(y)}{a}$ với $k(0) = a$

* Trường hợp thứ nhất: $\phi(y) = 1$ với mọi y.

$f(x) = dx + p$, với $p = c + n$

$u(x) = n$, $\forall x \in R$

$k(y) = a, \forall y \in R$

$$g(x) = \frac{dx + c - b}{a}$$

$h(y) = d(y) + b.$

* Trường hợp thứ hai: $\exists y_0 \in R$: $\phi(y_0) \neq 1$.

$f(x) = st^x + c + n$

$u(x) = n$ với mọi số thực x.

$k(y) = at^y$

$$g(x) = \frac{st^x + c - b}{a}$$

$h(y) = c + (b - c)t^y$

Bài toán 19. Tìm tất cả các hàm liên tục f, g, h, u, v: $R \to R$ thoả mãn phương trình $f(x + y) = g(x)h(y) + u(x)v(y), \forall x, y \in R.$ (2.69)

Đáp số: Nếu $u(x) = 0$, từ (2.69) ta có $f(x+y) = g(x)h(y), \forall x, y \in R$. Đây là phương trình Pexider nên trong trường hợp này ta có kết quả như sau

$f(z) = abz^k$

$g(x) = ax^k$

$h(y) = by^k$

trong đó a, b, k là các số thực.

Nếu $u(x) \neq 0$, $\phi(y) = \frac{h(y)}{a}$, $h(0) = a$

* Trường hợp thứ nhất: $\phi(y) = 1$ với mọi y.

$$f(x) = \frac{dm}{c}x + m$$, với $m \in R$.

$$u(x) = \frac{m}{c}$$

$h(y) = a$ với mọi số thực y

$$g(x) = \frac{dx + c - b}{a}$$

$v(y) = dy + b.$

* Trường hợp thứ hai: $\exists y_0 \in R$: $\phi(y) \neq 1$.

$$f(x) = \frac{(st^x + c)n}{s + c},$$

$$u(x) = \frac{n}{s + c}$$ với mọi số thực x,

$h(y) = at^y$,

$$g(x) = \frac{st^x + c - b}{a},$$

$v(y) = c + (b - c)t^y$.

2.7 Các bài toán về bất phương trình hàm Cauchy

Bài toán 20. Cho hàm f: $R \to R$ thỏa mãn các điều kiện

$f(x+y) \leq f(x) + f(y), \forall x, y \in R.$

$f(x) \leq 2x, \forall x \in R.$

Tìm tất cả các hàm $f(x)$ liên tục trên R.

Đáp số: $f(x) = 2x, \ \forall x \in R.$

Bài toán 21. Cho $K = [0;1]$, f là hàm số xác định trên K và thỏa mãn điều kiện 1) $f(1) = 1$;

2) $f(x) \geq 0, \forall x \in K$

3) Nếu $x, y, x + y$ đều thuộc K thì $f(x + y) \geq f(x) + f(y)$.

Chứng minh rằng $f(x) \leq 2x$.

Đáp số: $f(x) \leq 2x, \ \forall x \in K$.

2.8 Các bài toán về phương trình Euler

Bài toán 22. Giả sử tồn tại một hàm $h(t)$ được xác định cho tất cả các t dương và một hàm $f(x, y)$ dương được xác định bởi mọi x, y dương thoả mãn $f(tx, ty) = h(t)f(x, y)$. Đây là phương trình Euler cải biên

phần 1.10 chương 1. Giả sử, ngoài ra ta có h là một hàm liên tục. Chứng minh $h(t) = t^k$ với mọi giá trị k.
Sử dụng phương trình mũ Cauchy, ta có $h(t) = t^k$ với mọi giá trị k.

Bài toán 23. Cho hàm f: $R^+ \text{ x } R^+ \to R$ thoả điều kiện

$$f(tx, ty) = t^k f(x, y),\ \forall x, y \in R,$$
$$f(x, y) = 5x^3 + 2x^2y + xy^2 + 6y^3,\ \forall x, y \in R.$$

Tìm k.
Đáp số: $k = 3$.

2.9 Các bài toán về phương trình D'alembert

Bài toán 24. Tìm các hàm $f(x)$ trên R

$$\begin{cases} f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y), \forall x, y \in R \\ f(0) = 1, \exists x_0 \in R : |f(x_0)| < 1 \end{cases}$$

Đáp số: $f(x) = \cos ax$, với $a \in R\backslash\{0\}$.

Bài toán 25. Tìm các hàm $f(x)$ xác định, liên tục trên R và thoả mãn các điều kiện $\begin{cases} f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y), \forall x, y \in R \\ f(0) = 1, \exists x_0 \in R : f(x_0) > 1 \end{cases}$

Đáp số: $f(x) = \text{ch}ax$, với $a \in R\backslash\{0\}$ tuỳ ý.

2.10 Các bài toán tổng hợp

Bài toán 26. Tìm các hàm $f(x)$ xác định và liên tục trên [-1,1] và thoả mãn điều kiện $f(x) + f(y) = f(xy - \sqrt{1-y^2}\sqrt{1-x^2}), \forall x, y \in [-1,1]$.

Đáp số: $f(x) = a.\arccos x$, $a \in R$, $\forall x \in [-1,1]$.

Bài toán 27. Tìm các hàm $f(x)$ xác định, liên tục trên R và thoả mãn điều kiện $f(x) + f(y) = f\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right), \forall x, y \in R : 1 - xy \neq 0.$

Đáp số: $f(x) = a.\arctan x$, $a \in R$, $\forall x \in R$.

Bài toán 28. Giả sử f: $R \to R$ có thuộc tính mà tồn tại một hằng số K thoả mãn $|f(x) - f(y)| \le K(x-y)^2$, $\forall x, y \in R$.
Chứng minh f là hàm không đổi.

Bài toán 29. Xác định hàm f: $Q \to Q$ thoả mãn phương trình

$$f[x + f(y)] = f(x)f(y),\ \forall x, y \in Q.$$

Đáp số: $f(x) = 1$, $\forall x \in Q$.

Bài toán 30. Cho hàm f: $R \to R$ thoả mãn phương trình

$$m(x, y) = f^{-1}\left[\frac{f(x) + f(y)}{2}\right],\ \forall x, y \in R.$$

trong đó f là một hàm liên tục tăng hoặc giảm.

a) Cho hàm f, g: $R \to R$ với $f \neq g$ thoả mãn phương trình $f^{-1}\left[\dfrac{f(x)+f(y)}{2}\right] = g^{-1}\left[\dfrac{g(x)+g(y)}{2}\right]$, $\forall x, y \in R$. Chứng minh rằng tồn tại các hằng số $a \neq 0$ và b sao cho $g(x) = af(x) + b$.

b) Giả sử $m(x + t, y + t) = m(x, y) + t$, $\forall x, y, t \in R$.
Tìm tất cả các hàm f thoả mãn phương trình trên.
Đáp số:

a) Biến đổi về dạng phương trình Jensen. Bằng cách giải quyết phương trình Jensen, ta có kết quả sau

$g(x) = af(x) + b$ với $a, b \in R$ và $a \neq 0$.

b) $f(x) = cx + d$ hoặc $f(x) = cs^x + d$.

Bài toán 31. (Phương trình vi phân) Tìm đạo hàm cấp hai hàm số f:$R \to R$ thoả mãn phương trình

$$[f(x)]^2 - [f(y)]^2 = f(x + y)\, f(x - y)\ ,\ \forall x, y \in R.$$

Cho $x = \dfrac{u+v}{2}$ và $y = \dfrac{u-v}{2}$, $c = \dfrac{f''(v_0)}{f(v_0)}$.

Đáp số: Nếu $c > 0$ thì ta có $f(u) = A\sinh(\sqrt{c}u)$.
Nếu $c = 0$ thì ta có $f(u) = Au$.
Nếu $c < 0$ thì ta có $f(u) = A\sin(\sqrt{-c}u)$.

Chương 3. ỨNG DỤNG CÁC PHƯƠNG TRÌNH HÀM HAI BIẾN VÀO VIỆC BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI

3.1 Các bài toán trong các đề thi trong cuộc thi Toán học

Bài toán 1. (Dự tuyển IMO) Hàm số f: $R \to R$ thỏa mãn

$$f(x) + f(y) = f(x + y) - xy - 1,\ \forall x, y \in R.$$

Nếu $f(1) = 1$ hãy tìm các số nguyên n sao cho $f(n) = n$.
Đáp số $n = 1$ hoặc $n = -2$.

Bài toán 2. (IMO – 1982) Cho hàm số f xác định trên tập hợp các số tự nhiên và lấy giá trị nguyên không âm. Biết rằng $f(n)$ thỏa mãn các điều kiện

1) Với mọi m, n thì $f(m+n) - f(m) - f(n)$ lấy giá trị 0 hoặc 1.

2) $f(2) = 0$, $f(3) > 0$ và $f(9999) = 3333$.

Tính $f(1982)$.

Đáp số: f(1982) = 660.

Bài toán 3. (Dự tuyển IMO – 2002) Tìm tất cả các hàm thực f xác định trên R thoả mãn điều kiện

$f(f(x) + y) = 2x + f(f(y) - x)$, $\forall x, y \in R$.

Đáp số $f(x) = x + C$, C là hằng số.

Bài toán 4. (VMO – 2005) Tìm $f: R \to R$ thoả mãn

$f(f(x-y)) = f(x)\,f(y) - f(x) + f(y) - xy$, $\forall x, y \in R$.

Hàm số cần tìm là $f(x) = -x$.

Bài toán 5. (VMO – 2006 – Bảng B) Tìm $f: R \to R$ liên tục trên R thoả mãn $f(x-y)\,f(y-z)\,f(z-x) + 8 = 0 \quad \forall x, y, z \in R$

Đáp số $f(x) = -2b^x$ với $b > 0$.

Bài toán 6. (USAMO – 2000) Tìm tất cả các hàm $f: R \to R$ thỏa mãn

$f(x^2 - y^2) = x\,f(x) - y\,f(y)$, $\forall x, y \in R$.

Đáp số $f(x) = ax$ với $a \in R$.

Bài toán 7. (CAMO – 2000) Hãy xác định tất cả các hàm $f: N \to N$ sao cho $x\,f(x) + y\,f(y) = (x+y)\,f(x^2 + y^2)$, $\forall x, y \in N$.

Đáp số $f(x) = c$ với c là hằng số, $x \in R$.

3.2 Các phương pháp giải phương trình hàm hai biến

3.2.1. Phương pháp sử dụng đặc trưng hàm của các hàm sơ cấp

Phương trình hàm là một phương trình thông thường mà nghiệm của nó là hàm. Ứng dụng chương 1, ta có các đặc trưng hàm sau

1) Phương trình Cauchy.

2) Phương trình Jensen.

3) Phương trình mũ Cauchy

4) Phương trình D'Alembert.

Ví dụ 1. Tìm hàm $f(x)$ xác định và liên tục trên R thoả mãn điều kiện

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \sqrt{f(x)\,f(y)}, \forall x, y \in R$$

Áp dụng phương trình hàm Jensen ta có nghiệm của bài toán $f(x) = 0$ hoặc $f(x) = e^{ax+b}$, với $a, b \in R$.

Ví dụ 2. Tìm hàm $f(x)$ xác định và liên tục trên R^+ thoả mãn điều kiện

$$f(\sqrt{xy}) = \sqrt{f(x)\,f(y)}, \quad \forall x, y \in R^+.$$

Theo kết quả của Ví dụ 1, thì $f(x) = 0$ hoặc $f(x) = e^{a\ln x} + b = e^b x^a$, với $a, b \in R$.

Ví dụ 3. Tìm các hàm $f(x)$ xác định, liên tục trên $R\backslash\{0\}$ và thoả mãn điều kiện

$$f\left(\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}, \quad \forall x, y, x+y \neq 0$$

Theo phương trình Jensen, thì $f(x) = \frac{a}{x} + b$ với $a, b \in R$.

Ví dụ 4. Tìm các hàm $f(x)$ xác định, liên tục trên $R\backslash\{0\}$ và thoả mãn điều kiện

$$f\left(\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}\right) = \sqrt{f(x)\,f(y)}, \quad \forall x, y, x+y \neq 0$$

Theo kết quả của Ví dụ 3 thì $f(x) = 0$ hoặc $f(x) = e^{a/x+b}$, với $a, b \in R$.

Ví dụ 5. Xác định các hàm $f(x)$ liên tục trên $R\backslash\{0\}$ thoả mãn điều kiện

$f(xy) = f(x)\,f(y)$, $\forall x, y \in R\backslash\{0\}$

Đáp số

1) $f(x) = 0$, $\forall x \in R\backslash\{0\}$,

2) $f(x) = |x|^\alpha$, $\forall x \in R\backslash\{0\}$, $\alpha \in R$.

3) $f(x) = \begin{cases} x^\beta, \forall x \in R^+ \\ -|x|^\beta, \forall x \in R^- \end{cases}$, $\beta \in R$.

Ví dụ 6. Xác định các hàm $f(x)$ liên tục trên $R\backslash\{0\}$ thoả mãn điều kiện

$$f(xy) = f(x) + f(y),\ \forall x, y \in R\backslash\{0\}$$

Đáp số $f(x) = a\ln|x|,\ \forall x \in R\backslash\{0\}$, với $a \in R$.

Ví dụ 7. Xác định các hàm $f(x)$ liên tục trên R^+ thoả mãn điều kiện

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y),\ \forall x, y \in R^+.$$

Theo kết quả của Ví dụ 6, thì $f(x) = a\ln x,\ \forall x \in R^+,\ a \in R$.

3.2.2. Phương pháp xét giá trị

Khi vận dụng phương pháp cần chú ý sử dụng kết quả vừa có được. Cách giải nói chung của phương pháp này là tìm các giá trị đặc biệt – có thể tính được trước. Sau đó tạo ra các bất đẳng thức "ngược nhau" về hàm số cần tìm (đối với đề bài có điều kiện là bất phương trình hàm) để đưa ra kết luận về hàm số.

Việc chọn các trường hợp của biến phải có tính "kế thừa".

Ví dụ 8. Tìm $f: R \to R$ thoả mãn $\begin{cases} f(x) \ge 0, \forall x \in R \\ f(x+y) \ge f(x) + f(y), \forall x, y \in R \end{cases}$

Lời giải. Cho $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0) \ge 0 \\ f(0) \ge 2f(0) \end{cases} \Rightarrow f(0) = 0.$

Cho $y = -x \Rightarrow \begin{cases} f(0) \ge f(x) + f(-x) \\ f(x) \ge 0,\ f(-x) \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) + f(-x) \le 0 \\ f(x) \ge 0,\ f(-x) \ge 0 \end{cases}$

Suy ra $f(x) = f(-x) = 0,\ \forall x \in R$. Thử lại ta có kết quả $f(x) = 0$.

Ví dụ 9. Tìm $f: [a, b] \to [a, b]$ thoả mãn

$$|f(x) - f(y)| \ge |x - y|,\ \forall x, y \in [a, b]\ (a < b \text{ cho trước})$$

Đáp số: Nếu $\begin{cases} f(a) = a \\ f(b) = b \end{cases}$ thì $f(x) = x$.

Nếu $\begin{cases} f(a) = b \\ f(b) = a \end{cases}$ thì $f(x) = a + b - x$.

Ví dụ 10. Tìm $f: R \to R$ thoả mãn

$$\begin{cases} f(0) = a;\ f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = b \\ f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\cos y \end{cases} \quad \forall x, y \in R;\ a, b \text{ cho trước.}$$

Đáp số: $f(x) = a\cos x + b\sin x$.

Ví dụ 11. (VMO, 1995) Tìm $f: R \to R$ thoả mãn:

$$f((x-y)^2) = x^2 - 2y\,f(x) + (f(y))^2,\ \forall x, y \in R.$$

Đáp số: Nếu $f(0) = 0$ thì $f(x) = x,\ \forall x \in R$, nếu $f(0) = 1$ thì $f(x) = x + 1,\ \forall x \in R$.

3.2.3. Phương pháp hệ số bất định

Nguyên tắc chung của phương pháp này là

* Dựa vào điều kiện của bài toán, xác định được dạng của $f(x)$, thường là $f(x) = ax + b$ hoặc $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Ví dụ 12. Tìm tất cả các hàm $f: R \to R$ thoả mãn hai điều kiện

1) $f(x^2 - y) = x\,f(x) - f(y),\ \forall x, y \in R$.

2) $x\,f(x) > 0,\ \forall x \ne 0$.

Đáp số: $\exists a > 0:\ f(x) = ax,\ \forall x \in R$.

Ví dụ 13. Tìm tất cả các hàm $f, g: R \to R$ thoả mãn hai điều kiện

1) $2f(x) - g(x) = f(y) - y, \forall x, y \in R$.

2) $f(x)\,g(x) \ge x + 1,\ \forall x \in R$.

Đáp số: $f(x) = x + 3,\ g(x) = 2x + 3$.

* Đồng nhất hệ số để tìm $f(x)$.

Ví dụ 14. Tìm tất cả các hàm $f: R \to R$ thoả mãn điều kiện

$$f(x\,f(y) + x) = xy + f(x), \forall x, y \in R.$$

Đáp số: $f(x) = x$ và $f(x) = -x$.

* Chứng minh rằng mọi hệ số khác của $f(x)$ đều không thoả mãn điều kiện bài toán.

Ví dụ 15. Tìm tất cả các hàm $f: R \to R$ thoả mãn điều kiện

$$2f(x) + f(1 - x) = x^2,\ \forall x \in R.$$

Đáp số: $f(x) = \dfrac{1}{3}(x^2 + 2x - 1)\cdot$

Cần chứng minh mọi hàm số khác $f(x)$ sẽ không thoả mãn điều kiện bài toán. Giả sử còn hàm số $g(x) \ne f(x)$ thoả mãn điều kiện bài toán. Chứng minh mâu thuẫn với giả thiết $g(x_0) \ne f(x_0)$.

Ví dụ 16. Tìm tất cả các hàm $f: Z \to Z$ thoả mãn đồng thời các điều kiện sau

1) $f(f(n)) = n,\ \forall n \in Z$.

2) $f(f(n + 2) + 2) = n,\ \forall n \in Z$.

3) $f(0) = 1$

Đáp số: $f(n) = -n + 1$.

Cần chứng minh $f(n) = -n + 1$ là hàm duy nhất thoả mãn điều kiện bài toán.

3.2.4. Phương pháp sử dụng đạo hàm

Vận dụng tính chất đạo hàm của hàm số tại một điểm, một khoảng, một đoạn để xác định nghiệm của phương trình.

Ví dụ 17. Tìm f: $R \to R$ thoả mãn điều kiện

$$|f(x) - f(y)|^2 \le |x - y|^3,\ \forall x, y \in R$$

Đáp số: $f(x) = c,\ \forall x \in R$ (với c là hằng số).

Ví dụ 18. Tìm f: $R \to R$ có đạo hàm trên R và thoả mãn

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + 2xy,\ \forall x, y \in R.$$

Đáp số: $f(x) = x^2 + cx + b,\ \forall x \in R$; b, c là các hằng số thực.

Ví dụ 19. Tìm các hàm $f(x)$ xác định, khả vi trong R^+ và thoả mãn điều kiện $f(\sqrt{xy}) = \sqrt{f(x) f(y)}, \forall x, y \in R^+$.

Đáp số:
$$\left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ f(x) = c^a, c > 0, a \in R. \end{array}\right.$$

Ví dụ 20. Tìm các hàm $f(x) \ge 0$ xác định, khả vi trên R^+ và thoả mãn điều kiện $f\left(\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}}\right) = \sqrt{\frac{[f(x)]^2 + [f(y)]^2}{2}}, \forall x, y \in R^+$.

Đáp số: $f(x) = \sqrt{ax^2 + b}, \forall a, b \ge 0, x \in R^+$.

3.2.5. Phương pháp sử dụng tính liên tục của hàm số

Trong mục này ta xét một số ví dụ giải phương trình hàm có sử dụng đến tính liên tục của hàm số. Sử dụng tính liên tục của hàm số có ba con đường chính:

* Xây dựng biến từ N đến R.

Ví dụ 21. Tìm hàm f: $R \to R$ thoả mãn

1) $f(x)$ liên tục trên R;

2) $f(1) = 2$;

3) $f(xy) = f(x) f(y) - f(x + y) + 1,\ \forall x, y \in R$.

Đáp số: $f(x) = x + 1,\ \forall x \in R$.

Ví dụ 22. Tìm tất cả các hàm số liên tục f: $[0, 1] \to R$ thoả mãn các điều kiện 1) $f(0) = f(1) = 0$,

2) $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le f(x) + f(y), \forall x, y \in [0,1]$.

Đáp số: $f(x) = 0,\ \forall x \in [0,1]$.

* Chứng minh hàm số $f(x) = c,\ \forall x \in D$ (tập xác định của hàm số f), c là hằng số. Phương pháp sử dụng tính liên tục của hàm số trong dạng toán này thực hiện các bước như sau

Bước 1. Lấy a là một giá trị tuỳ ý thuộc tập xác định của hàm số. Xây dựng dãy số thích hợp (x_n) với $x_1 = a$ thoả mãn đồng thời

1) Hàm $f(x)$ không đổi trên dãy (x_n), nghĩa là

$$f(a) = f(x_1) = f(x_2) = \ldots = f(x_n) = \ldots$$

2) Chứng minh dãy (x_n) hội tụ về b.

Bước 2. Sử dụng tính liên tục của $f(x)$ ta có

$$f(a) = \lim f(x_n) = f(\lim x_n) = f(b)$$

Suy ra $f(x)$ là hàm hằng.

Ví dụ 23. Tìm tất cả các hàm liên tục f: $[0, 1] \to R$ sao cho

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{1+x}{2}\right)\right],\ \forall x \in [0;1].$$

Đáp số: $f(x) = C$ với C là hằng số.

Ví dụ 24. (Đề dự tuyển thi toán quốc tế – 1982)

Tìm tất cả các hàm liên tục f: $R \to R$ thoả mãn điều kiện

$$f(x^2) + f(x) = x^2 + x,\ \forall x \in R.$$

Đáp số: $f(x) = x,\ \forall x \in R$.

* Sử dụng đặc trưng hàm.

Ví dụ 25. (Sử dụng phương trình Cauchy) Cho $\alpha, \beta \ne 0$. Tìm tất cả các hàm liên tục f: $R \to R$ thoả mãn điều kiện

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y),\ \forall x, y \in R.$$

Đáp số: Nếu $\alpha + \beta = 1$ thì $f(x) = ax + b$ với $a, b \in R$.

Nếu $\alpha + \beta \ne 1$ thì $f(x) = ax$ với $a \in R$.

Ví dụ 26. (Sử dụng phương trình Jensen) Tìm các hàm liên tục f: $R \to R$ thoả mãn điều kiện $x f(x) - y f(y) = (x - y) f(x + y),\ \forall x, y \in R$.

Đáp số: $f(x) = ax + b,\ \forall x \in R$ thoả mãn.

3.2.6. Phương pháp thế

Phương pháp thế là phương pháp thường hay sử dụng khi giải các phương trình hàm, đặc biệt là phương trình hàm hai biến. Nội dung cơ bản của phương pháp này là ta thay các biến bởi các giá trị đặc biệt. Lưu ý là giá trị các biến này phải thuộc tập xác định của hàm số và phải thoả mãn các điều kiện ràng buộc giữa các biến nếu có.

* Nếu hệ thức đã cho có tính đối xứng giữa các biến thì cố gắng hoán vị các biến với nhau.

Ví dụ 27. (AUS – 1995)

Tìm tất cả các hàm f: $R^+ \to R$ thoả mãn các điều kiện sau đây

1) $f(1) = \frac{1}{2}$

2) $f(xy) = f(x) f\left(\frac{3}{y}\right) + f(y) f\left(\frac{3}{x}\right), \forall x, y \in R^+$

Đáp số: Với $x > 0$ thì $f(x) = \frac{1}{2}$.

* Sử dụng các phép thế có thể giãn ước được hai vế của phương trình hàm. Từ đó ta được một đẳng thức đơn giản hơn.

Ví dụ 28. Tìm tất cả các hàm f: $R \to R$ thoả mãn

$$x f(x) + y f(x) = (x + y) f(x) f(y), \forall x, y \in R.$$

Đáp số: $f(x) = 0, \forall x \in R$ hoặc $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{khi } x \neq 0 \\ a & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ với $a \in R$.

* Nếu đã có $f(x^3) = (f(x))^3$ hoặc $f(x^3) = x^2 f(x)$ thì nên sử dụng phép thế x bởi $x+y$ rồi so sánh hai vế.

Ví dụ 29. Tìm tất cả các hàm số f: $R \to R$ thoả mãn

$$f(x^3 - y^3) = x^2 f(x) - y^2 f(y), \forall x, y \in R.$$

Đáp số: $f(x) = kx, \ \forall x \in R$.

* Trong trường hợp có $f(g(x)) = g(x)$ thì tìm các điểm bất động của hàm f.

Ví dụ 30. Tìm tất cả các hàm số f: $R \to R$ thoả mãn

$$f(f(x - y)) = f(x) - f(y) + f(x) f(y) - xy, \forall x, y \in R.$$

Đáp số: $f(x) = x$.

* Nếu một vế có chứa $f(x)$ và vế còn lại có chứa biến x bên ngoài thì thông thường hàm f là đơn ánh.

Ví dụ 31. (Balkan – 2000) Tìm tất cả các hàm f: $R \to R$ thoả mãn điều kiện $f(x f(x) + f(y)) = (f(x))^2 + y, \forall x, y \in R$.

Đáp số: $f(y_1) = f(y_2) \Rightarrow y_1 = y_2$. Vậy f là một đơn ánh.

Vậy $f(x) = x, \forall x \in R$ hoặc $f(x) = -x, \forall x \in R$.

KẾT LUẬN

Luận văn khảo sát về các phương trình hàm hai biến, đây là phương trình hàm có tầm quan trọng trong các cuộc thi Toán học. Việc khảo sát phương trình hàm này dựa trên việc nghiên cứu về các phương trình Cauchy, phương trình hàm tuyến tính, phương trình mũ Cauchy, phương trình Pexider, phương trình Vincze, bất đẳng thức Cauchy, phương trình hàm hai biến, phương trình Euler và phương trình D'Alambert.

Luận văn cho thấy được sự liên kết của các phương trình hàm hai biến. Những kết quả trong luận văn đó là dựa trên cơ sở lý thuyết của các phương trình hàm, đưa ra các bài toán mang tính chất vận dụng phù hợp.

Ngoài ra, luận văn còn cung cấp một số phương pháp giải phương trình hàm hai biến cơ bản và ứng dụng rất nhiều trong bồi dưỡng học sinh giỏi toán dựa trên sự phân lớp các bài toán về phương trình hàm hai biến.

Trong điều kiện thời gian và khuôn khổ của luận văn, chúng tôi chưa nghiên cứu sâu về các phương pháp giải phương trình hàm hai biến mà chỉ đề ra phương pháp mang tính chất tổng quát chứ chưa cụ thể.

(3.72)