BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

LƯU THẾ HOÀNG

ỨNG DỤNG CÁC NGUYÊN LÝ ĐẾM VÀ PHƯƠNG PHÁP ĐẾM GIẢI TOÁN Ở PHỔ THÔNG

Chuyên ngành : Phương pháp Toán sơ cấp

Mã số : 60.46.40

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Đà Nẵng - Năm 2011

Công trình được hoàn thành tại

ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

Người hướng dẫn khoa học: TS. TRỊNH ĐÀO CHIẾN

Phản biện 1: PGS. TSKH. Trần Quốc Chiến

Phản biện 2: PGS. TS. Nguyễn Gia Định

Luận văn sẽ được bảo vệ trước Hội đồng chấm Luận văn tốt nghiệp thạc sĩ khoa học họp tại Đại học Đà Nẵng vào ngày ... tháng ... năm 2011.

Có thể tìm hiểu luận văn tại:

- Trung tâm Thông tin - Học liệu, Đại học Đà Nẵng
- Thư viện trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng

MỞ ĐẦU

1. Lí do chọn đề tài

Các bài toán rời rạc là một trong những dạng toán khó trong chương trình toán phổ thông và thường xuất hiện trong các đề thi chọn học sinh quốc gia và quốc tế. Các bài toán rời rạc đôi khi có dạng không mẫu mực. Để giải được các bài toán này không phải chỉ cần các hằng đẳng thức, bất đẳng thức hay một kết quả trung gian mà cần phải phát hiện và xây dựng một cách lập luận hoặc một đại lượng mà nhờ đó mới tìm được lời giải.

Các bài toán rời rạc gắn chặt với lý thuyết tập hợp và logic. Do đó, trước khi nghiên cứu lý thuyết của toán rời rạc, rất cần thiết phải nắm vững những vấn đề cơ bản của lý thuyết tập hợp và logic, đặc biệt là một số nguyên lý trên tập hợp (chẳng hạn như nguyên lý cộng, nguyên lý nhân, nguyên lý quy nạp, nguyên lý Dirichlet, nguyên lý bù trừ, ...) và một số phương pháp đếm số lượng phần tử của một tập hợp hữu hạn (chẳng hạn như phương pháp sử dụng ánh xạ, phương pháp phân hoạch tập hợp, phương pháp thiết lập hệ thức truy hồi, phương pháp quỹ đạo, phương pháp thêm bớt, phương pháp quan hệ đệ quy, phương pháp hàm sinh, ...).

Nguyên lý quy nạp, nguyên lý Dirichlet, ...là những nguyên lý thường sử dụng trong chương trình phổ thông, đặc biệt trong chương trình chuyên toán. Riêng Nguyên lý bù trừ xuất hiện không nhiều, thường dưới dạng giản đồ Ven trong lý thuyết tập hợp ở đầu cấp Trung học, nhưng đó là một trong những kết quả nền tảng của lý thuyết tổ hợp.

Các phương pháp đếm số lượng phần tử của một tập hợp hữu hạn đóng một vai trò khá quan trọng trong một số môn khoa học, đặc biệt là Tin học và Toán ứng dụng. Có thể nói lý thuyết xác suất cổ điển có cơ sở là các bài toán đếm. Một số môn khoa học cơ bản khác như Sinh học di truyền, Hóa học cấu trúc, ... cũng sử dụng các phương pháp đếm. Trong các phương pháp đếm nêu trên, phương pháp sử dụng ánh xạ, phương pháp phân hoạch tập hợp, phương pháp thiết lập hệ thức truy hồi là các phương pháp quen thuộc thường dùng trong chương trình phổ thông chuyên toán.

2. Mục đích nghiên cứu

Với những lý do và ý nghĩa nêu trên, mục đích của luận văn là chọn lọc, giới thiệu và tìm kiếm những ứng dụng của một số nguyên lý đếm và phương pháp đếm gần gũi với chương trình toán phổ thông mà không quá đi sâu vào lý thuyết của những vấn đề này, thuộc lĩnh vực chuyên ngành Toán rời rạc.

Luận văn đề cập đến Nguyên lý bù trừ và hai phương pháp đếm số lượng phần tử của một tập hợp hữu hạn, đó là phương pháp phân hoạch tập hợp, phương pháp sử dụng ánh xạ. Riêng phương pháp thiết lập hệ thức truy hồi, tùy theo từng dạng toán, sẽ được lồng ghép vào hai phương pháp trên.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Với mục đích nêu trên, đối tượng nghiên cứu của luận văn là một số nguyên lý đếm và phương pháp đếm. Phạm vi nghiên cứu của các vấn đề này chủ yếu thuộc chuyên ngành Phương pháp Toán sơ cấp, phù hợp với chương trình toán phổ thông, đặc biệt dùng trong hệ chuyên toán. Trong khuôn khổ luận văn, những phương pháp đếm khác như phương pháp quỹ đạo, phương pháp thêm bớt, phương pháp quan hệ đệ quy, phương pháp hàm sinh, ... là những phương pháp chuyên sâu của toán rời rạc, không đề cập trong luận văn này.

4. Phương pháp nghiên cứu

Dựa trên các tài liệu sưu tầm được, luận văn tổng hợp lại các vấn đề lý thuyết phục vụ cho mục đích nghiên cứu, phù hợp với chuyên ngành Phương pháp Toán sơ cấp. Các dạng bài tập thuộc phạm vi sử dụng Nguyên lý bù trừ và hai phương pháp đếm nêu trên có rải rác trong các tài liệu, đặc biệt trong các tạp chí Toán học và tuổi trẻ. Sưu tầm lại, phân loại bài tập theo dạng và tìm kiếm cách giải khác, tổng quát hóa các bài toán, . . . là phương pháp nghiên cứu chủ yếu của luận văn.

5. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài

Nội dung nghiên cứu của luận văn mang tính khoa học, tính sư phạm và phần nào đóng góp vào thực tiễn dạy và học Toán ở phổ thông, phù hợp với chuyên ngành Phương pháp Toán sơ cấp.

Sau khi được cho phép bảo vệ, thông qua và được góp ý để sửa chữa bổ sung, luận văn có thể được dùng làm tài liệu tham khảo cho giáo viên, học sinh phổ thông và những ai quan tâm đến vấn đề này.

Trong khuôn khổ một luận văn, có thể còn nhiều góc độ sâu sắc hơn về nội dung vấn đề mà luận văn chưa đề cập. Tác giả luận văn sẽ tiếp tục nghiên cứu và bổ sung thường xuyên để nội dung của luận văn ngày càng được cập nhật, có thể dùng làm tài liệu để bồi dưỡng học sinh giỏi ở bậc Trung học phổ thông.

6. Cấu trúc của luận văn

Ngoài phần mở đầu và kết luận, luận văn có 3 chương chính sau:

Chương 1. Nguyên lý bù trừ.

Một trong những kết quả nền tảng của lý thuyết tổ hợp trong Toán rời rạc là Nguyên lý bù trừ (hay còn gọi là Công thức bao hàm và loại trừ). Thực chất của nguyên lý này là công thức tính số phần tử của hợp các tập hợp là Công thức bao hàm và loại trừ, bởi vì trong công thức này, đối với mỗi phần tử đã tính được số lần nó được đếm và số lần nó không được đếm.

Nội dung chương này đề cập đến Nguyên lý bù trừ và việc áp dụng nguyên lý để giải một số dạng toán khó, trong đó có những bài toán mà việc quy chúng về lý thuyết tập hợp để áp dụng nguyên lý này là một trong những cách giải mang tính sáng tạo.

Chương 2. Phương pháp phân hoạch tập hợp.

Một số dạng toán, đặc biệt đối với Số học, phương pháp phân hoạch tập hợp đôi khi tỏ ra chiếm ưu thế hơn các phương pháp khác. Đây là phương pháp đếm thứ nhất mà luận văn đề cập. Quá trình giải bài toán theo phương pháp này thường lồng ghép với nhiều nguyên lý đếm và phương pháp đếm khác, chẳng hạn Nguyên lý bù trừ, phương pháp thiết lập hệ thức truy hồi, ...

Một phương pháp phân hoạch tập hợp phù hợp sẽ giúp cho việc tìm ra lời giải đúng và độc đáo cho một bài toán khó.

Chương 3. Phương pháp sử dụng ánh xạ.

Đây là phương pháp gần gũi nhất với chương trình Toán phổ thông. Để đếm số phần tử của tập hợp A, ta có thể thiết lập một song ánh từ tập hợp A vào một tập hợp B nào đó mà ta đã biết cách đếm số phần tử. Từ đó suy ra số phần tử của tập hợp A. Điều quan trọng của phương pháp này là kỹ năng thiết lập một song ánh giữa hai tập hợp sao cho phù hợp với từng bài toán. Phương pháp này cũng tỏ ra hữu hiệu đối với một số bài toán khó của Số học. Ngoài ra, quá trình giải bài toán theo phương pháp này cũng thường lồng ghép với nhiều nguyên lý đếm và phương pháp đếm khác, chẳng hạn Nguyên lý bù trừ, phương pháp thiết lập hệ thức truy hồi, ...

Chương 1

NGUYÊN LÝ BÙ TRỪ

Chương này đề cập đến Nguyên lý bù trừ của tập hợp và áp dụng nguyên lý này để giải khá nhiều bài toán khó, trong đó có nhiều bài toán mà ẩn sau đó là lý thuyết tập hợp và Nguyên lý bù trừ.

1.1 Nguyên lý bù trừ

- Đối với 2 tập hợp hữu hạn A và B, ta có: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

- Đối với 3 tập hợp hữu hạn A, B và C, ta có:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + |A \cap B \cap C|.$$

- Tổng quát, ta có kết quả sau đây:

Cho $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$ là các tập hợp hữu hạn. Khi đó:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots$$
$$\cdots + (-1)^{n+1}\left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right|.$$

1.2 Áp dụng

Bài toán 1.2.1 ([2])**.** *Cho tập hợp* $S = \{1,\ 2,\ \ldots,\ 280\}$*. Đặt*

$$A_1 = \{\, k \in S \mid k \,\vdots\, 2 \,\},\ A_2 = \{\, k \in S \mid k \,\vdots\, 3 \,\},\ A_3 = \{\, k \in S \mid k \,\vdots\, 5 \,\},$$

$$A_4 = \{\, k \in S \mid k \,\vdots\, 7 \,\},\ A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4.$$

a) Chứng minh rằng cứ 5 *phần tử tùy ý khác nhau từng đôi một của* A *thì có ít nhất hai số không nguyên tố cùng nhau.*

b) Tính $|A|$*.*

Bài toán 1.2.2 ([5])**.** *Tìm số nguyên dương lớn nhất* N *sao cho số tất cả các số nguyên trong tập* $\{1,\ 2,\ \ldots,\ N\}$ *chia hết cho* 3 *bằng số tất cả các số nguyên trong tập đó chia hết cho* 5 *hoặc* 7*.*

Bài toán 1.2.3 ([7])**.** *Tìm kết quả học tập ở một lớp học, người ta thấy: hơn* $\dfrac{2}{3}$ *số học sinh đạt điểm giỏi ở môn Toán cũng đồng thời đạt điểm giỏi ở môn Vật lý; hơn* $\dfrac{2}{3}$ *số học sinh đạt điểm giỏi ở môn Vật lý cũng đồng thời đạt điểm giỏi ở môn Ngữ văn; hơn* $\dfrac{2}{3}$ *số học sinh đạt điểm giỏi ở môn Ngữ văn cũng đồng thời đạt điểm giỏi ở môn Lịch sử; hơn* $\dfrac{2}{3}$ *số học sinh đạt điểm giỏi ở môn Lịch sử cũng đồng thời đạt điểm giỏi ở môn Toán. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một học sinh đạt điểm giỏi ở cả bốn môn nêu trên.*

Bài toán 1.2.4 ([6])**.** *Một hoán vị* $\{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{2n}\}$ *của tập hợp* $\{1,\ 2,\ \ldots,\ 2n\}$*,* n *nguyên dương, được gọi là có tính chất* $\mathcal{P}$ *nếu* $|x_i - x_{i+1}| = n$*, với ít nhất một giá trị* $i \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ 2n-1\}$*. Chứng minh rằng với mỗi số* n*, số hoán vị có tính chất* $\mathcal{P}$ *lớn hơn số hoán vị không có tính chất* $\mathcal{P}$*.*

Bài toán 1.2.5 ([2])**.** *Cho hai số nguyên dương* m *và* n *sao cho* $n+2$ *chia hết cho* m*. Hãy tính số các bộ ba số nguyên dương* $(x,\ y,\ z)$ *thỏa mãn điều kiện tổng* $x+y+z$ *chia hết cho* m*, trong đó mỗi số* $x,\ y,\ z$ *đều không lớn hơn* n*.*

Bài toán 1.2.6 ([5])**.** *Cho 3 số nguyên dương $m,\ n,\ p$ sao cho $n+1$ chia hết cho m. Hãy tìm công thức tính số các bộ $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_p)$ gồm p số nguyên dương sao cho tổng $x_1 + x_2 + \cdots + x_p$ chia hết cho m, trong đó mỗi số $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_p$ đều không lớn hơn n.*

Bài toán 1.2.7 ([4])**.** *Cho các số nguyên dương $k,\ n$ thỏa mãn điều kiện $n > k^2 - k + 1$. Giả sử n tập hợp $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện:*

a) $|A_i| = k,\ \forall i\ (1 \le i \le n)$;

b) $|A_i \cup A_j| = 2k - 1,\ \forall i,\ j\ (i \ne j$ *và* $1 \le i,\ j \le n)$.

Hãy xác định số phần tử của tập hợp $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$.

Bài toán 1.2.8 ([3])**.** *Có 1999 người tham dự một cuộc triển lãm. Cứ chọn ra 50 người một cách tùy ý thì trong số 50 người này sẽ có ít nhất 2 người không biết nhau. Chứng minh rằng ta có thể tìm được ít nhất 41 người sao cho mỗi người trong số này biết nhiều nhất là 1958 người khác.*

Bài toán 1.2.9 ([8])**.** *Rút ngẫu nhiên 13 quân bài từ bộ bài 52 quân. Tính xác suất để trong 13 quân đó có "tứ quý".*

Bài toán 1.2.10 ([8])**.** *Có bao nhiêu cách xếp 8 con xe lên bàn cờ quốc tế đã bị gạch đi một đường chéo chính sao cho không có con nào ăn con nào?*

Chương 2

PHƯƠNG PHÁP PHÂN HOẠCH TẬP HỢP

2.1 Phương pháp phân hoạch tập hợp

Để bắt đầu Phương pháp phân hoạch tập hợp, ta đã xuất phát từ việc xét hai bài toán:

Bài toán 2.1.1. *Có bao nhiêu cách phân phối* 5 *đồ vật khác nhau cho* 3 *người sao cho mỗi người nhận được ít nhất một đồ vật.*

Bài toán 2.1.2. *Có bao nhiêu cách phân phối n đồ vật khác nhau cho k người sao cho mỗi người nhận được ít nhất một đồ vật ($n,\ k \in \mathbb{N}^*$).*

2.1.1 Các khái niệm

Các tập hợp khác rỗng $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_k$ được gọi là *một phân hoạch* của tập hợp A nếu:

$$\begin{cases} A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k, \\ A_i \cap A_j = \varnothing,\ \forall i,\ j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ k\},\ i \neq j. \end{cases}$$

Mỗi tập con A_i $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k)$ được gọi là *một thành phần* của phân hoạch.

Kí hiệu $|A|$ là số các phần tử của tập hợp A (lực lượng của tập A) và $S(n,\ k)$ là số tất cả các phân hoạch của tập A gồm n phần tử thành k tập khác rỗng với các số $n,\ k$ nguyên dương và $k \leq n$.

2.1.2 Công thức truy hồi của $S(n,\ k)$

Ta đã chứng minh được rằng $S(n,\ k)$ thỏa mãn hệ thức sau:

$$S(n+1,\ k) = kS(n,\ k) + S(n,\ k-1),\ \text{với } k \leq n. \tag{2.1}$$

2.1.3 Công thức tổng quát của $S(n,\ k)$

Ta đã chứng minh theo nguyên lý quy nạp được công thức tổng quát của $S(n,\ k)$:

$$S(n,\ k) = \frac{1}{k!}\sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j}C_k^j.j^n, \tag{2.5}$$

với các số nguyên dương $n,\ k$ và $k \leq n$.

Các công thức tính số phân hoạch của một tập hợp $S(n,\ k)$ còn được áp dụng để giải nhiều bài toán tổ hợp khác.

Phương pháp phân hoạch tập hợp đôi khi là một công cụ khá mạnh để giải quyết một số dạng khó của bài toán rời rạc, trong đó việc lựa chọn một phân hoạch phù hợp cho tập hợp là một kỹ thuật rất quan trọng. Sau đây là một số bài toán minh họa.

2.2 Áp dụng

Bài toán 2.2.1 ([5]). *Cho $p,\ q$ là hai số lẻ nguyên tố cùng nhau. Khi đó chứng minh:*

$$\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}}\left[\frac{iq}{p}\right] + \sum_{j=1}^{\frac{q-1}{2}}\left[\frac{jp}{q}\right] = \left(\frac{p-1}{2}\right)\left(\frac{q-1}{2}\right).$$

Bài toán 2.2.2 ([5]). *Khai triển $f(x) = (1+x+x^2+\cdots+x^{1000})^{1000}$ được đa thức*

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{10^6}x^{10^6}.$$

Tính $S = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{1000}$.

Ta đã giải Bài toán 2.2.2 dựa vào kết quả của Bổ đề 2.2.1:

Bổ đề 2.2.1. *Cho hai số tự nhiên n, k. Xét tập hợp:*

$$H_{n,k} = \{(x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n) \mid x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n \in \mathbb{N},\ x_0 + x_1 + \cdots + x_n = k\}.$$

Thế thì: $|H_{n,k}| = C_{n+k}^{n}$.

Bài toán 2.2.3 ([5])**.** *Cho tập hợp M gồm 2005 số dương $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{2005}$. Xét tất cả các tập hợp con T_i khác rỗng của M. Gọi s_i là tổng các số thuộc một tập hợp con T_i nói trên. Chứng minh rằng có thể chia tập hợp tất cả các số s_i được thành lập như vậy thành 2005 tập hợp con khác rỗng không giao nhau sao cho tỉ số của hai số bất kì thuộc cùng một tập hợp con vừa được phân chia không vượt quá 2.*

Bài toán 2.2.4 ([7])**.** *Cho A là tập hợp gồm 16 số nguyên dương đầu tiên. Hãy tìm số nguyên dương k nhỏ nhất có tính chất: trong mỗi tập con có k phần tử của tập hợp A đều tồn tại hai số phân biệt a và b sao cho $a^2 + b^2$ là một số nguyên tố.*

Bài toán 2.2.5 ([9])**.** *Trong không gian cho 2006 điểm phân biệt và không có 4 điểm nào đồng phẳng. Người ta nối tất cả các cặp điểm bằng các đoạn thẳng. Một số tự nhiên k được gọi là tốt nếu ta có thể gán cho mỗi đoạn thẳng một số tự nhiên không quá k sao cho mọi tam giác có 3 đỉnh là 3 trong 2006 điểm trên có 2 cạnh được gán 2 số bằng nhau, cạnh còn lại được gán số lớn hơn. Tìm số tốt có giá trị nhỏ nhất.*

Bài toán 2.2.6 ([5])**.** *Giả sử c là số hữu tỉ dương và khác 1. Chứng minh rằng có thể phân hoạch tập các số nguyên dương thành hai tập khác nhau A, B sao cho $\dfrac{x}{y} \neq c$ với mọi x, y cùng nằm trong A hoặc cùng nằm trong B.*

Bài toán 2.2.7 ([5])**.** *Với mỗi số nguyên $r \geq 1$, xác định số nguyên nhỏ nhất $h(r) \geq 1$ sao cho với mọi cách chia tập hợp $\{1,\ 2,\ \ldots,\ h(r)\}$ thành r tập con đều tồn tại các số nguyên $a \geq 0$, $y \geq x \geq 1$ sao cho $a + x$, $a + y$, $a + x + y$ thuộc cùng một tập con.*

Bài toán 2.2.8 ([5]). *Tìm số các phân hoạch tập hợp* $\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ *thành ba tập con* $A_1,\ A_2,\ A_3$ *(các tập này có thể là tập hợp rỗng) sao cho các điều kiện sau được thỏa mãn:*

1) Sau khi sắp xếp các phần tử của $A_1,\ A_2,\ A_3$ *theo thứ tự tăng dần thì hai phần tử liên tiếp luôn có tính chẵn, lẻ khác nhau;*

2) Nếu cả ba tập $A_1,\ A_2,\ A_3$ *đều không rỗng thì có đúng một tập có số nhỏ nhất là số chẵn.*

Bài toán 2.2.9 ([7]). *Một đơn vị kiểm lâm muốn lập lịch đi tuần tra rừng cho cả năm* 2006 *với các yêu cầu i) và ii) sau:*

i) Số ngày đi tuần tra trong năm nhiều hơn một nửa tổng số ngày của năm;

ii) Không có hai ngày đi tuần tra nào cách nhau đúng một tuần lễ.

1) Chứng minh rằng có thể lập được lịch đi tuần tra rừng thỏa mãn các yêu cầu nêu trên, biết rằng năm 2006 *có* 365 *ngày.*

2) Hỏi có thể lập được tất cả bao nhiêu lịch đi tuần tra rừng như vậy?

Bài toán 2.2.10 ([7]). *Xét tập hợp số* S *có* 2006 *phần tử. Ta gọi một tập con* T *của* S *là tập con "bướng bỉnh" nếu với hai số* $u,\ v$ *tùy ý (có thể* $u = v$*) thuộc* T *luôn có* $u + v$ *không thuộc* T*. Chứng minh rằng:*

1) Nếu S *là tập hợp gồm* 2006 *số nguyên dương đầu tiên thì mỗi tập con "bướng bỉnh" của* S *đều có không quá* 1003 *phần tử.*

2) Nếu S *là tập hợp gồm* 2006 *số nguyên dương tùy ý thì tồn tại một tập con "bướng bỉnh" của* S *có* 669 *phần tử.*

Bài toán 2.2.11 ([3]). *Cho số nguyên* $n \geq 2$*. Gọi* S *là tập hợp gồm* n *phần tử và* A_i*,* *với $1 \le i \le m$, là các tập con khác nhau và gồm ít nhất hai phần tử của S sao cho từ*

$$A_i \cap A_j \neq \varnothing,\ A_i \cap A_k \neq \varnothing,\ A_j \cap A_k \neq \varnothing$$

ta suy ra được $A_i \cap A_j \cap A_k \neq \varnothing$.

Chứng minh rằng $m \le 2^{n-1} - 1$.

Bài toán 2.2.12 ([3]). *a) Chứng minh tập $\mathbb{Q}^+$ các số hữu tỉ dương có thể phân hoạch được thành ba tập A, B, C rời nhau thỏa mãn:*

$$BA = B,\ B^2 = C,\ BC = A$$

trong đó $HK = \{hk \mid h \in H,\ k \in K\}$ và $B^2 = BB$.

b) Chứng minh tất cả các lập phương của các số hữu tỉ dương đều thuộc A theo phân hoạch trên.

c) Tìm các phân hoạch $\mathbb{Q}^+ = A \cup B \cup C$ như vậy mà không có số nguyên dương n nào mà $n \le 34$, với n và $n+1$ thuộc A, nghĩa là:

$$min\{n \in \mathbb{N}^* \mid n \in A,\ n+1 \in A\} > 34.$$

Bài toán 2.2.13 ([3]). *Chứng minh rằng tập hợp $\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 1989\}$ có thể được viết thành hợp của các tập hợp con rời nhau $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_{117}$ sao cho mọi A_i, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ 117$, đều có chứa 17 phần tử và tổng giá trị các phần tử của những A_i đó đều bằng nhau.*

Chú ý 2.2.1. *Ta có bài toán tổng quát sau:*

Bài toán tổng quát 2.2.1. *Chứng minh rằng tập hợp $\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n\}$ có thể được viết thành hợp của các tập hợp rời nhau $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_m$, với m là ước số của n, sao cho mọi A_i, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m$, đều có chứa $\dfrac{n}{m}$ phần tử và tổng giá trị các phần tử của những A_i đó đều bằng nhau.*

Bài toán 2.2.14 ([4]). *Với số tự nhiên tùy ý $n > 3$ cho $k = \left[\dfrac{1}{6}n(n+1)\right]$ và tập X_n gồm $\dfrac{n(n+1)}{2}$ phần tử, trong đó có k phần tử màu xanh, k phần tử màu đỏ, các phần tử còn lại đều màu trắng. Chứng minh rằng có thể chia tập X_n thành n tập con từng cặp không giao nhau $A_1, A_2, \ldots, A_n$, sao cho với số m tùy ý $(1 \leq m \leq n)$ tập con A_m gồm đúng m phần tử và các phần tử đều cùng màu.*

Bài toán 2.2.15 ([4]). *Đối với mỗi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$, hãy tìm số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ lớn nhất thỏa mãn điều kiện: trong tập gồm n phần tử có thể chọn ra được k tập con khác nhau, mà hai tập bất kì trong các tập con này đều có giao khác rỗng.*

Bài toán 2.2.16 ([6]). *Cho p là một số nguyên tố lẻ. Tìm số các tập con A của tập hợp $\{1, 2, \ldots, 2p\}$, biết rằng:*

i) A chứa đúng p phần tử;

ii) Tổng tất cả các phần tử của A chia hết cho p.

Bài toán tổng quát 2.2.2. *Cho p là một số nguyên tố lẻ và số nguyên dương $t < p$. Tìm số các tập con D của tập hợp $Y = \{1, 2, \ldots, p\}$ có tính chất sau:*

i) D chứa đúng t phần tử;

ii) $S(D) \equiv r \pmod p$, với r là hằng số, $0 \leq r < p$, $S(D)$ là tổng các phần tử của D.

Bài toán tổng quát 2.2.3. *Cho p là một số nguyên tố lẻ, $n \in \mathbb{N}^*$ $(n > p)$. Tìm số các tập con A của tập hợp $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ có tính chất sau:*

i) A chứa đúng p phần tử;

ii) Tổng tất cả các phần tử của A chia hết cho p.

Nhận xét 2.2.1. *Bài toán 2.2.16 ở trên là một trường hợp riêng của Bài toán tổng quát 2.2.3 khi $n = 2p$.*

Bài toán 2.2.17 ([4]). *Cho số nguyên $n \geq 2$. Hãy tìm số các hoán vị $(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)$ của $1,\ 2,\ \ldots,\ n$ sao cho tồn tại duy nhất một chỉ số $i \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n-1\}$ thỏa mãn $a_i > a_{i+1}$.*

Bài toán 2.2.18 ([4]). *Giả sử F_k là tập hợp tất cả các bộ $(A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_k)$, trong đó A_i $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k)$ là một tập con của $\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ (các tập $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_k$ có thể bằng nhau). Hãy tính*

$$S_n = \sum_{(A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_k) \in F_k} |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k|.$$

Bài toán 2.2.19 ([4]). *Cho số nguyên dương n* và *$S = \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$. Tìm số các tập con (kể cả tập rỗng) của S mà không chứa hai số nguyên dương liên tiếp.*

Bài toán 2.2.20 ([4]). *Cho số nguyên dương n và $S = \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$. Gọi c_n là số các tập con của S mà **chứa đúng** hai số nguyên dương liên tiếp. Chứng minh rằng*

$$c_n = \frac{2nF_{n+1} - (n+1)F_n}{5}.$$

Bài toán 2.2.21 ([4]). *Xét đa giác đều 12 đỉnh $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_{12}$ với tâm O. Ta tô màu các miền tam giác OA_iA_{i+1} $(1 \leq i \leq 12)$ $(A_{13} = A_1)$ bằng bốn màu đỏ, xanh da trời, xanh thẫm và vàng sao cho hai miền tam giác kề nhau được tô bởi hai màu khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách tô màu như vậy?*

Bài toán 2.2.22 ([3]). *Gọi S là tập tất cả các hoán vị $(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)$ của $(1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ sao cho trong mỗi hoán vị này có đúng một phần tử a_i (khác a_1) lớn hơn các phần tử đứng trước nó. Tìm số trung bình của các số a_1 trong các phần tử thuộc S.*

Bài toán 2.2.23 ([3]). *Chứng minh rằng*

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1991}C_{1991}^{0} - \frac{1}{1990}C_{1990}^{1} + \frac{1}{1989}C_{1989}^{2} - \cdots \\ &\cdots + \frac{(-1)^m}{1991-m}C_{1991-m}^{m} + \cdots - \frac{1}{996}C_{996}^{995} = \frac{1}{1991}. \end{aligned}$$

Bài toán 2.2.24 ([4]). *Tìm số tập con của tập* $\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ *sao cho trong mỗi tập con chứa ít nhất hai phần tử là hai số nguyên liên tiếp.*

Bài toán 2.2.25 ([4]). *Có* n *quả bóng* $b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n$ *và* $2n$ *hộp* $h_1,\ h_2,\ \ldots,\ h_{2n}$. *Biết rằng quả bóng* b_i $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ *chỉ bỏ vào được các hộp* $h_1,\ h_2,\ \ldots,\ h_{2i}$. *Hỏi có bao nhiêu cách bỏ* k $(1 \leq k \leq n)$ *quả bóng vào các hộp, biết rằng mỗi hộp chứa nhiều nhất một quả bóng? (Hai cách bỏ bóng được gọi là khác nhau khi ít nhất một quả bóng được bỏ vào hai hộp khác nhau trong hai cách đó).*

Bài toán 2.2.26 ([4]). *Có* n $(n > 1)$ *thí sinh ngồi xung quanh một bàn tròn. Hỏi có bao nhiêu cách phát đề sao cho hai thí sinh ngồi cạnh nhau luôn có đề khác nhau, biết rằng trong ngân hàng đề có đúng* m $(m > 1)$ *đề và mỗi đề có nhiều bản?*

Bài toán 2.2.27 ([4]). *Cho* A *và* E *là hai đỉnh đối tâm của một hình tám cạnh đều. Có một con ếch bắt đầu nhảy từ* A. *Tại bất cứ đỉnh nào trừ* E, *ếch có thể tới một trong hai đỉnh kề. Nếu ếch nhảy tới* E *thì nó dừng lại ở đó. Gọi* a_n *là số đường đi phân biệt của đúng* n *bước nhảy để ếch nhảy từ* A *đến* E. *Chứng minh rằng*

$$a_{2n-1} = 0,\ a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[(2+\sqrt{2})^{n-1} - (2-\sqrt{2})^{n-1}\Big].$$

Bài toán 2.2.28 ([4]). *Cho bảng ô vuông* $n \times n$ $(n > 1)$. *Hỏi có bao nhiêu cách đánh dấu các ô vuông trong bảng sao cho trong mỗi hình vuông* 2×2 *có đúng* 2 *ô vuông được đánh dấu? (Hai cách đánh dấu được coi là khác nhau nếu có một ô vuông nào đó mà trong cách này thì được đánh dấu còn trong cách kia thì không).*

Bài toán 2.2.29 ([4]). *Tìm số các số nguyên dương* n *thỏa mãn các điều kiện:*

i) n *có* 1000 *chữ số;*

ii) Tất cả các chữ số của n *là lẻ;*

iii) Hiệu của hai chữ số liên tiếp bất kì của n *luôn bằng* 2.

Bài toán 2.2.30 ([4])**.** *Tìm số các bộ số nguyên* $(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)$ $(n > 1)$ *thỏa mãn:*

$$\begin{cases} |a_i| \leq 1, & \forall i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n \\ |a_i - a_{i+1}| \leq 1, & \forall i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1. \end{cases}$$

Bài toán 2.2.31 ([1])**.** *Cho tập hợp* $A \subset \mathbb{R}$*, ta định nghĩa tập hợp*

$$A + 1 = \{a + 1 \mid a \in A\}.$$

Hỏi có bao nhiêu tập con A *của tập hợp* $\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ $(n \in \mathbb{N},\ n \geq 1)$ *sao cho* $A \cup (A + 1) = \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$*?*

Chương 3

PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG ÁNH XẠ

3.1 Phương pháp sử dụng ánh xạ

Định nghĩa 3.1.1 ([4])**.** *Cho ánh xạ* $f : A \longrightarrow B$.

Ánh xạ f *được gọi là một đơn ánh nếu với hai phần tử bất kì* $a_1,\ a_2 \in A$ *mà* $a_1 \neq a_2$ *thì* $f(a_1) \neq f(a_2)$, *tức là* $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$.

Ánh xạ f *được gọi là một toàn ánh nếu với mọi* $b \in B$ *đều tồn tại* $a \in A$ *để* $f(a) = b$.

Ánh xạ f *được gọi là một song ánh nếu với mọi* $b \in B$, *tồn tại và duy nhất* $a \in A$ *để* $f(a) = b$. *Nói cách khác,* f *là song ánh khi và chỉ khi nó đồng thời là đơn ánh và toàn ánh.*

Định lý 3.1.1 ([4])**.** *Cho* A *và* B *là hai tập hợp hữu hạn.*

a) Nếu có một đơn ánh $f : A \longrightarrow B$ *thì* $|A| \leq |B|$.

b) Nếu có một toàn ánh $f : A \longrightarrow B$ *thì* $|A| \geq |B|$.

c) Nếu có một song ánh $f : A \longrightarrow B$ *thì* $|A| = |B|$.

3.2 Áp dụng

Bài toán 3.2.1 ([2]). *Gọi M là tập tất cả các số nguyên dương (viết theo hệ thập phân) có n chữ số 1, n chữ số 2 và không còn chữ số nào khác; N là tập tất cả các số nguyên dương có n chữ số thuộc tập $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ và số chữ số 1 bằng số chữ số 2.*

Chứng minh: $|M| = |N| = C_{2n}^{n}$.

Bài toán 3.2.2 ([4]). *Cho tập S gồm tất cả các số nguyên trong đoạn $[1\ ;\ 2002]$. Gọi T là tập hợp tất cả các tập con không rỗng của S. Với mỗi X thuộc T, kí hiệu $m(X)$ là trung bình cộng các phần tử của X. Tính*

$$\alpha = \frac{\sum m(X)}{|T|},$$

trong đó tổng lấy theo tất cả các tập X thuộc T.

Bài toán 3.2.3 ([4]). *Hãy tính trung bình cộng tất cả các số N gồm 2002 chữ số thỏa mãn $N \vdots 99$ và các chữ số của N thuộc tập hợp $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$.*

Bài toán 3.2.4 ([5]). *Cho hàm số $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Đặt:*

$$A_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid \varphi(x) = x\};\ A_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid \varphi(\varphi(x)) = x\}.$$

Giả sử $A_2 \setminus A_1$ là một tập hợp hữu hạn và tồn tại hàm số $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(f(x)) = \varphi(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Chứng minh rằng số phần tử của $A_2 \setminus A_1$ là một số nguyên chia hết cho 4.

Bài toán 3.2.5 ([4]). *Có một nhóm người mà trong đó, mỗi cặp không quen nhau có đúng hai người quen chung, còn mỗi cặp quen nhau thì không có người quen chung. Chứng minh rằng số người quen của mỗi người là như nhau.*

Bài toán 3.2.6 ([4]). *Một cửa hàng kem có bán ba loại kem: kem xoài, kem sôcôla và kem sữa. Một nhóm có 6 người vào ăn kem và gọi 6 cốc kem. Hỏi* *a) Họ có tất cả bao nhiêu sự lựa chọn?*

b) Họ có tất cả bao nhiêu sự lựa chọn, trong đó cả ba loại kem đều có mặt?

Nhận xét 3.2.1. *Ta có bài toán tổng quát sau:*

Bài toán tổng quát 3.2.1. *Một cửa hàng kem có bán m loại kem. Một nhóm có n người vào ăn kem và gọi n cốc kem. Hỏi*

a) Họ có tất cả bao nhiêu sự lựa chọn?

b) Họ có tất cả bao nhiêu sự lựa chọn, trong đó cả m loại kem đều có mặt?

Bài toán 3.2.7 ([4])**.** *Cho trước số nguyên dương n và số nguyên dương r thỏa mãn $r < n - r + 1$. Giả sử $X = \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$. Hỏi có bao nhiêu tập con A của X có r phần tử mà không chứa hai số nguyên liên tiếp?*

Chẳng hạn, với $n = 7,\ r = 3,\ X = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$. Các tập con A của X có 3 phần tử mà không chứa hai số nguyên liên tiếp cả thảy gồm 10 tập sau:

$$\{1,\ 3,\ 5\},\ \{1,\ 3,\ 6\},\ \{1,\ 3,\ 7\},\ \{1,\ 4,\ 6\},\ \{1,\ 4,\ 7\},\ \{1,\ 5,\ 7\},\ \{2,\ 4,\ 6\},$$
$$\{2,\ 4,\ 7\},\ \{2,\ 5,\ 7\},\ \{3,\ 5,\ 7\}.$$

Bài toán 3.2.8 ([4])**.** *Cho tập $A = \{1,\ 2,\ \ldots,\ 2n\}$. Một tập con B của A được gọi là một tập cân nếu trong tập đó số các số chẵn và số các số lẻ bằng nhau. (Tập rỗng là một tập cân vì số các số chẵn và số các số lẻ trong tập rỗng đều bằng 0). Hỏi A có chứa bao nhiêu tập cân?*

Chẳng hạn, với $n = 2,\ A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, A có 6 tập con cân là các tập sau: $\varnothing,\ \{1,\ 2\},\ \{1,\ 4\},\ \{2,\ 3\},\ \{3,\ 4\},\ \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$.

Bài toán 3.2.9 ([5])**.** *Cho các số nguyên dương k và n thỏa mãn $k \leq n$. Viết phép toán sau: mỗi lần, lấy k số, nằm ở k vị trí liên tiếp của bộ số có thứ tự $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, rồi thay mỗi số bởi số đối của nó. Gọi T là tập gồm tất cả các bộ số có thứ tự $(t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:*

1) Nếu $(t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n) \in T$ *thì* $t_i \in \{-1,\ +1\}$, $\forall i = \overline{1, n}$*;*

2) Nếu $(t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n) \in T$ *thì tồn tại một phương án thực hiện liên tiếp phép toán nói trên đối với* $(t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n)$ *sao cho sau hữu hạn lần ta sẽ nhận được bộ số* $(1,\ 1,\ \ldots,\ 1)$.

Tìm số phần tử của tập T*.*

Bài toán 3.2.10 ([7]). *Hỏi từ các số* 1, 2, 3, 4, 5 *có thể lập được bao nhiêu số có* 10 *chữ số thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:*

1) Trong mỗi số, mỗi chữ số có mặt đúng hai lần;

2) Trong mỗi số, hai chữ số giống nhau không đứng cạnh nhau.

Bài toán 3.2.11. *Người ta tô tất cả các đỉnh của một đa giác đều* 10 *đỉnh bởi* 5 *màu khác nhau sao cho các điều kiện sau được đồng thời thỏa mãn:*

1) Mỗi đỉnh được tô bởi một màu;

2) Mỗi màu được dùng để tô cho đúng hai đỉnh không kề nhau.

Hai cách tô màu thỏa mãn các điều kiện trên được gọi là tương đương nếu cách tô màu này có thể nhận được từ cách tô màu kia nhờ một phép quay quanh tâm của đa giác đều đã cho.

Hỏi có tất cả bao nhiêu cách tô màu đôi một không tương đương?

Tổng quát hóa Bài toán 3.2.11, ta được Bài toán 3.2.12:

Bài toán 3.2.12 ([7]). *Cho số nguyên* $n \geq 2$ *và cho một đa giác đều* $2n$ *đỉnh. Người ta tô tất cả các đỉnh của đa giác đều đó bởi* n *màu sao cho các điều kiện sau được đồng thời thỏa mãn:*

1) Mỗi đỉnh được tô bởi một màu;

2) Mỗi màu được dùng để tô cho đúng hai đỉnh không kề nhau.

Hai cách tô màu thỏa mãn các điều kiện trên được gọi là tương đương nếu cách tô màu này có thể nhận được từ cách tô màu kia nhờ một phép quay quanh tâm của đa giác đều đã cho.

Hỏi có tất cả bao nhiêu cách tô màu đôi một không tương đương?

Bài toán 3.2.13 ([6])**.** *Một hoán vị* $\{x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_{2n}\}$ *của tập hợp* $\{1,\ 2,\ \dots,\ 2n\}$, $(n \in \mathbb{Z}^+)$ *được gọi là có tính chất* $\mathcal{P}$ *nếu* $|x_i - x_{i+1}| = n$, *với ít nhất một* $i \in \{1,\ 2,\ \dots,\ 2n-1\}$.

Chứng minh rằng, với mỗi số n, *số hoán vị có tính chất* $\mathcal{P}$ *lớn hơn số hoán vị không có tính chất* $\mathcal{P}$.

Bài toán 3.2.14 ([8] *Bài toán chia kẹo của Euler*)**.** *Cho* $k,\ n$ *là các số nguyên dương. Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình*

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = k. \tag{3.11}$$

Bài toán 3.2.15 ([8])**.** *Có* n *người xếp thành một hàng dọc. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra* k *người sao cho không có hai người liên tiếp được chọn?*

KẾT LUẬN

Luận văn đã đạt được một số kết quả sau đây:

1. Tóm tắt lý thuyết về Nguyên lý bù trừ và việc áp dụng nguyên lý để giải một số dạng toán khó, trong đó có những bài toán mà việc quy chúng về lý thuyết tập hợp để áp dụng nguyên lý này là một trong những cách giải mang tính sáng tạo. Luận văn đưa ra khá nhiều bài toán minh họa, trong đó có một số đề thi chọn học sinh giỏi quốc gia và quốc tế.

2. Giới thiệu tóm tắt về lý thuyết của phương pháp phân hoạch tập hợp. Việc áp dụng phương pháp này một cách phù hợp sẽ giúp cho việc tìm ra lời giải đúng và độc đáo cho một bài toán khó. Luận văn đưa ra khá nhiều bài toán minh họa, trong đó có một số đề thi chọn học sinh giỏi quốc gia và quốc tế. Đây cũng là phần đóng góp của luận văn.

3. Đề cập đến một phương pháp đếm gần gũi nhất với chương trình Toán phổ thông: phương pháp sử dụng ánh xạ. Điều quan trọng của phương pháp này là kỹ năng thiết lập một song ánh giữa hai tập hợp sao cho phù hợp với từng bài toán. Luận văn đưa ra khá nhiều bài toán minh họa, trong đó có một số đề thi chọn học sinh giỏi quốc gia và quốc tế. Đây cũng là phần đóng góp của luận văn.

4. Ngoài ra, quá trình giải bài toán theo phương pháp này cũng thường lồng ghép với nhiều nguyên lý đếm và phương pháp đếm khác, chẳng hạn Nguyên lý bù trừ, phương pháp thiết lập hệ thức truy hồi, ... và được coi như là một phương pháp tổng hợp của việc áp dụng các nguyên lý và phương pháp đếm nêu trên.

Tác giả hy vọng rằng, trong thời gian đến bản thân sẽ tiếp tục nghiên cứu nhằm hoàn thiện hơn nữa việc ứng dụng các nguyên lý đếm và phương pháp đếm trong việc giải các bài toán đếm ở phổ thông.