BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

LƯU THẾ HOÀNG

ỨNG DỤNG CÁC NGUYÊN LÝ ĐẾM VÀ PHƯƠNG PHÁP ĐẾM GIẢI TOÁN Ở PHỔ THÔNG

Chuyên ngành : Phương pháp Toán sơ cấp

Mã số : 60.46.40

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Người hướng dẫn khoa học: TS. TRỊNH ĐÀO CHIẾN

Đà Nẵng - Năm 2011

LỜI CAM ĐOAN

Tôi cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi.

Các số liệu, kết quả nêu trong luận văn là trung thực và chưa từng được ai công bố trong bất kỳ công trình nào khác.

Tác giả

Lưu Thế Hoàng

MỤC LỤC

BẢNG KÝ HIỆU

- $|A|$: Số phần tử của tập hợp hữu hạn A.
- $\mathbb{N}$: Tập hợp các số tự nhiên.
- $\mathbb{N}^*$: Tập hợp các số tự nhiên khác 0.
- $\mathbb{Q}$: Tập hợp các số hữu tỉ.
- $\mathbb{Q}^+$: Tập hợp các số hữu tỉ dương.
- $\mathbb{R}$: Tập hợp các số thực.

Một số ký hiệu khác sẽ được trình bày trong từng phần của luận văn.

MỞ ĐẦU

1. Lí do chọn đề tài

Các bài toán rời rạc là một trong những dạng toán khó trong chương trình toán phổ thông và thường xuất hiện trong các đề thi chọn học sinh quốc gia và quốc tế. Các bài toán rời rạc đôi khi có dạng không mẫu mực. Để giải được các bài toán này không phải chỉ cần các hằng đẳng thức, bất đẳng thức hay một kết quả trung gian mà cần phải phát hiện và xây dựng một cách lập luận hoặc một đại lượng mà nhờ đó mới tìm được lời giải.

Tuy nhiên, nhìn chung, để giải các bài toán dạng này, cần phải nắm vững một số vấn đề lý thuyết cơ bản chưa được đề cập có hệ thống ở chương trình toán phổ thông cũng như hệ chuyên toán.

Các bài toán rời rạc gắn chặt với lý thuyết tập hợp và logic. Do đó, trước khi nghiên cứu lý thuyết của toán rời rạc, rất cần thiết phải nắm vững những vấn đề cơ bản của lý thuyết tập hợp và logic, đặc biệt là một số nguyên lý trên tập hợp (chẳng hạn như nguyên lý cộng, nguyên lý nhân, nguyên lý quy nạp, nguyên lý Dirichlet, nguyên lý bù trừ, ...) và một số phương pháp đếm số lượng phần tử của một tập hợp hữu hạn (chẳng hạn như phương pháp sử dụng ánh xạ, phương pháp phân hoạch tập hợp, phương pháp thiết lập hệ thức truy hồi, phương pháp quỹ đạo, phương pháp thêm bớt, phương pháp quan hệ đệ quy, phương pháp hàm sinh, ...).

Nguyên lý quy nạp, nguyên lý Dirichlet, ... là những nguyên lý thường sử dụng trong chương trình phổ thông, đặc biệt trong chương trình chuyên toán. Riêng Nguyên lý bù trừ xuất hiện không nhiều, thường dưới dạng giản đồ Ven trong lý thuyết tập hợp ở đầu cấp Trung học, nhưng đó là một trong những kết quả nền tảng của lý thuyết tổ hợp. Nhiều bài toán khó trong các đề thi chọn học sinh giỏi ẩn sau đó là nguyên lý này mà các phương pháp giải khác gặp nhiều lúng túng.

Các phương pháp đếm số lượng phần tử của một tập hợp hữu hạn đóng một vai trò khá quan trọng trong một số môn khoa học, đặc biệt là Tin học và Toán ứng dụng. Có thể nói lý thuyết xác suất cổ điển có cơ sở là các bài toán đếm. Một số môn khoa học cơ bản khác như Sinh học di truyền, Hóa học cấu trúc, ... cũng sử dụng các phương pháp đếm. Trong các phương pháp đếm nêu trên, phương pháp sử dụng ánh xạ, phương pháp phân hoạch tập hợp, phương pháp thiết lập hệ thức truy hồi là các phương pháp quen thuộc thường dùng trong chương trình phổ thông chuyên toán.

2. Mục đích nghiên cứu

Với những lý do và ý nghĩa nêu trên, mục đích của luận văn là chọn lọc, giới thiệu và tìm kiếm những ứng dụng của một số nguyên lý đếm và phương pháp đếm gần gũi với chương trình toán phổ thông mà không quá đi sâu vào lý thuyết của những vấn đề này, thuộc lĩnh vực chuyên ngành Toán rời rạc.

Luận văn đề cập đến Nguyên lý bù trừ và hai phương pháp đếm số lượng phần tử của một tập hợp hữu hạn, đó là phương pháp phân hoạch tập hợp, phương pháp sử dụng ánh xạ. Riêng phương pháp thiết lập hệ thức truy hồi, tùy theo từng dạng toán, sẽ được lồng ghép vào hai phương pháp trên.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Với mục đích nêu trên, đối tượng nghiên cứu của luận văn là một số nguyên lý đếm và phương pháp đếm. Phạm vi nghiên cứu của các vấn đề này chủ yếu thuộc chuyên ngành Phương pháp Toán sơ cấp, phù hợp với chương trình toán phổ thông, đặc biệt dùng trong hệ chuyên toán. Trong khuôn khổ luận văn, những phương pháp đếm khác như phương pháp quỹ đạo, phương pháp thêm bớt, phương pháp quan hệ đệ quy, phương pháp hàm sinh, ... là những phương pháp chuyên sâu của toán rời rạc, không đề cập trong luận văn này.

4. Phương pháp nghiên cứu

Dựa trên các tài liệu sưu tầm được, luận văn tổng hợp lại các vấn đề lý thuyết phục vụ cho mục đích nghiên cứu, phù hợp với chuyên ngành

Phương pháp Toán sơ cấp. Các dạng bài tập thuộc phạm vi sử dụng Nguyên lý bù trừ và hai phương pháp đếm nêu trên có rải rác trong các tài liệu, đặc biệt trong các tạp chí Toán học và tuổi trẻ. Sưu tầm lại, phân loại bài tập theo dạng và tìm kiếm cách giải khác, tổng quát hóa các bài toán, ... là phương pháp nghiên cứu chủ yếu của luận văn.

5. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài

Nội dung nghiên cứu của luận văn mang tính khoa học, tính sư phạm và phần nào đóng góp vào thực tiễn dạy và học Toán ở phổ thông, phù hợp với chuyên ngành Phương pháp Toán sơ cấp.

Sau khi được cho phép bảo vệ, thông qua và được góp ý để sửa chữa bổ sung, luận văn có thể được dùng làm tài liệu tham khảo cho giáo viên, học sinh phổ thông và những ai quan tâm đến vấn đề này.

Trong khuôn khổ một luận văn, có thể còn nhiều góc độ sâu sắc hơn về nội dung vấn đề mà luận văn chưa đề cập. Tác giả luận văn sẽ tiếp tục nghiên cứu và bổ sung thường xuyên để nội dung của luận văn ngày càng được cập nhật, có thể dùng làm tài liệu để bồi dưỡng học sinh giỏi ở bậc Trung học phổ thông.

6. Cấu trúc của luận văn

Ngoài phần mở đầu và kết luận, luận văn có 3 chương chính sau:

Chương 1. Nguyên lý bù trừ.

Một trong những kết quả nền tảng của lý thuyết tổ hợp trong Toán rời rạc là Nguyên lý bù trừ (hay còn gọi là Công thức bao hàm và loại trừ). Thực chất của nguyên lý này là công thức tính số phần tử của hợp các tập hợp là Công thức bao hàm và loại trừ, bởi vì trong công thức này, đối với mỗi phần tử đã tính được số lần nó được đếm và số lần nó không được đếm.

Nội dung chương này đề cập đến Nguyên lý bù trừ và việc áp dụng nguyên lý để giải một số dạng toán khó, trong đó có những bài toán mà việc quy chúng về lý thuyết tập hợp để áp dụng nguyên lý này là một trong những cách giải mang tính sáng tạo. Luận văn đưa ra khá nhiều bài toán minh họa, trong đó có một số đề thi chọn học sinh giỏi quốc gia và quốc tế. Đây cũng là phần đóng góp của luận văn.

Chương 2. Phương pháp phân hoạch tập hợp.

Một số dạng toán, đặc biệt đối với Số học, phương pháp phân hoạch tập hợp đôi khi tỏ ra chiếm ưu thế hơn các phương pháp khác. Đây là phương pháp đếm thứ nhất mà luận văn đề cập. Quá trình giải bài toán theo phương pháp này thường lồng ghép với nhiều nguyên lý đếm và phương pháp đếm khác, chẳng hạn Nguyên lý bù trừ, phương pháp thiết lập hệ thức truy hồi, ...

Một phương pháp phân hoạch tập hợp phù hợp sẽ giúp cho việc tìm ra lời giải đúng và độc đáo cho một bài toán khó. Luận văn đưa ra khá nhiều bài toán minh họa, trong đó có một số đề thi chọn học sinh giỏi quốc gia và quốc tế. Đây cũng là phần đóng góp của luận văn.

Chương 3. Phương pháp sử dụng ánh xạ.

Đây là phương pháp gần gũi nhất với chương trình Toán phổ thông. Để đếm số phần tử của tập hợp A, ta có thể thiết lập một song ánh từ tập hợp A vào một tập hợp B nào đó mà ta đã biết cách đếm số phần tử. Từ đó suy ra số phần tử của tập hợp A. Điều quan trọng của phương pháp này là kỹ năng thiết lập một song ánh giữa hai tập hợp sao cho phù hợp với từng bài toán. Phương pháp này cũng tỏ ra hữu hiệu đối với một số bài toán khó của Số học. Ngoài ra, quá trình giải bài toán theo phương pháp này cũng thường lồng ghép với nhiều nguyên lý đếm và phương pháp đếm khác, chẳng hạn Nguyên lý bù trừ, phương pháp thiết lập hệ thức truy hồi, ...

Chương 1

NGUYÊN LÝ BÙ TRỪ

Chương này đề cập đến Nguyên lý bù trừ của tập hợp và áp dụng nguyên lý này để giải khá nhiều bài toán khó, trong đó có nhiều bài toán mà ẩn sau đó là lý thuyết tập hợp và Nguyên lý bù trừ.

1.1 Nguyên lý bù trừ

- Đối với 2 tập hợp hữu hạn A và B, ta có: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

- Đối với 3 tập hợp hữu hạn A, B và C, ta có:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + |A \cap B \cap C|.$$

- Tổng quát, ta có kết quả sau đây:

Cho $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$ là các tập hợp hữu hạn. Khi đó:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots$$
$$\cdots + (-1)^{n+1} \left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right|.$$

1.2 Áp dụng

Bài toán 1.2.1 ([2]). *Cho tập hợp* $S = \{1,\ 2,\ \ldots,\ 280\}$. *Đặt*

$$A_1 = \{\, k \in S \mid k \,\vdots\, 2 \,\},\ A_2 = \{\, k \in S \mid k \,\vdots\, 3 \,\},\ A_3 = \{\, k \in S \mid k \,\vdots\, 5 \,\},$$
$$A_4 = \{\, k \in S \mid k \,\vdots\, 7 \,\},\ A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4.$$

a) Chứng minh rằng cứ 5 phần tử tùy ý khác nhau từng đôi một của A thì có ít nhất hai số không nguyên tố cùng nhau.

b) Tính $|A|$.

Giải.

a) Sử dụng Nguyên lý Dirichlet, với 5 phần tử tùy ý khác nhau từng đôi một của A được phân vào 4 tập hợp $A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4$ thì có ít nhất hai phần tử thuộc cùng một tập hợp trong 4 tập hợp đó. Khi đó, hai phần tử này là hai số không nguyên tố cùng nhau. Vậy ta có điều phải chứng minh.

b) Áp dụng Nguyên lý bù trừ, ta có

$$\begin{aligned}
|A| &= |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| \\
&= \Big(|A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4|\Big) - \\
&- \Big(|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_4| + \\
&+ |A_3 \cap A_4|\Big) + \Big(|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + \\
&+ |A_2 \cap A_3 \cap A_4|\Big) - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\
&= (140 + 93 + 56 + 40) - (46 + 28 + 20 + 18 + 13 + 8) + \\
&+ (9 + 6 + 4 + 2) - 1 \\
&= 216.
\end{aligned}$$

Với cách tính, chẳng hạn

$$|A_2| = \left[\frac{280}{3}\right] = 93,\ |A_1 \cap A_2| = \left[\frac{280}{2.3}\right] = 46,\ \ldots$$

Bài toán 1.2.2 ([5]). *Tìm số nguyên dương lớn nhất N sao cho số tất cả các số nguyên trong tập $\{1,\ 2,\ \ldots,\ N\}$ chia hết cho 3 bằng số tất cả các số nguyên trong tập đó chia hết cho 5 hoặc 7.*

Giải. Đặt:

$$S = \{1,\ 2,\ \ldots,\ N\},\ A_3 = \{\, x \in S \mid x \,\vdots\, 3 \,\},$$

$$A_5 = \{\, x \in S \mid x \,\vdots\, 5 \,\},\ A_7 = \{\, x \in S \mid x \,\vdots\, 7 \,\}.$$

Suy ra: $|A_3| = \left[\dfrac{N}{3}\right]$, $|A_5| = \left[\dfrac{N}{5}\right]$, $|A_7| = \left[\dfrac{N}{7}\right]$, $|A_5 \cap A_7| = \left[\dfrac{N}{35}\right]$.

Giả thiết có nghĩa là $|A_3| = |A_5 \cup A_7|$. Áp dụng Nguyên lý bù trừ, ta được: $|A_3| = |A_5| + |A_7| - |A_5 \cap A_7|$ hay

$$\left[\frac{N}{3}\right] = \left[\frac{N}{5}\right] + \left[\frac{N}{7}\right] - \left[\frac{N}{35}\right]. \tag{1.1}$$

Ta có: $N = 35k + r$ ($k = 1,\ 2,\ \ldots$ và $r = \overline{0, 34}$). Thay vào (1.1), ta được:

$$\left[\frac{35k+r}{3}\right] = \left[\frac{35k+r}{5}\right] + \left[\frac{35k+r}{7}\right] - \left[\frac{35k+r}{35}\right]$$

$$\Rightarrow 11k + \left[\frac{2k+r}{3}\right] = 7k + \left[\frac{r}{5}\right] + 5k + \left[\frac{r}{7}\right] - k - \left[\frac{r}{35}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\frac{2k+r}{3}\right] = \left[\frac{r}{5}\right] + \left[\frac{r}{7}\right] - \left[\frac{r}{35}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{2k+r}{3} - 1 < \left[\frac{2k+r}{3}\right] = \left[\frac{r}{5}\right] + \left[\frac{r}{7}\right] - \left[\frac{r}{35}\right] \leq \frac{r}{5} + \frac{r}{7} - 0 = \frac{12r}{35}$$

(vì $x - 1 < [x] \leq x < [x] + 1$).

$$\Rightarrow 2k + r - 3 < \frac{36r}{35} \Rightarrow 2k < \frac{36r}{35} - r + 3 = \frac{r}{35} + 3 \leq \frac{34}{35} + 3 \approx 3,97.$$

$$\Rightarrow 2k \leq 3 \Rightarrow k \leq \frac{3}{2} \Rightarrow k \leq 1.$$

$$\Rightarrow N = 35k + r \leq 35.1 + 34 = 69.$$

Thay lần lượt $N = 69,\ 68,\ 67,\ 66,\ 65$ vào (1.1), ta được $N = 65$.

Bài toán 1.2.3 ([7])**.** *Tìm kết quả học tập ở một lớp học, người ta thấy: hơn* $\frac{2}{3}$ *số học sinh đạt điểm giỏi ở môn Toán cũng đồng thời đạt điểm giỏi ở môn Vật lý; hơn* $\frac{2}{3}$ *số học sinh đạt điểm giỏi ở môn Vật lý cũng đồng thời đạt điểm giỏi ở môn Ngữ văn; hơn* $\frac{2}{3}$ *số học sinh đạt điểm giỏi ở môn Ngữ văn cũng đồng thời đạt điểm giỏi ở môn Lịch sử; hơn* $\frac{2}{3}$ *số học sinh đạt điểm giỏi ở môn Lịch sử cũng đồng thời đạt điểm giỏi ở môn Toán. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một học sinh đạt điểm giỏi ở cả bốn môn nêu trên.*

Giải. Ký hiệu $T,\ L,\ V,\ S$ lần lượt là tập hợp các học sinh đạt điểm giỏi ở môn Toán, Vật lý, Ngữ văn, Lịch sử. Đặt: $T_l = T \cap L,\ L_v = L \cap V,\ V_s = V \cap S$. Từ giả thiết suy ra: $|T_l| > \frac{2}{3}|T|, |L_v| > \frac{2}{3}|L|,\ |V_s| > \frac{2}{3}|V|$. Ta cần chứng minh: $|T \cap L \cap V \cap S| > 0$.

Vì $T \cap L \cap V \cap S = (T \cap L) \cap (L \cap V) \cap (V \cap S)$ nên ta cần chứng minh $|(T \cap L) \cap (L \cap V) \cap (V \cap S)| > 0$ hay $|T_l \cap L_v \cap V_s| > 0$. Thật vậy, không mất tính tổng quát, giả sử $|T| \geq |L| \geq |V| \geq |S|$. Áp dụng Nguyên lý bù trừ, ta có:

$$\begin{aligned}
|T_l \cap L_v \cap V_s| &= |(T_l \cap L_v) \cap V_s| \\
&= |T_l \cap L_v| + |V_s| - |(T_l \cap L_v) \cup V_s| \\
&= |T_l| + |L_v| - |T_l \cup L_v| + |V_s| - |(T_l \cap L_v) \cup V_s| \\
&= |T_l| + |L_v| + |V_s| - |T_l \cup L_v| - |(T_l \cap L_v) \cup V_s| \\
&> \frac{2}{3}|T| + \frac{2}{3}|L| + \frac{2}{3}|V| - |L| - |V| \\
&= \frac{2}{3}|T| - \frac{1}{3}|L| - \frac{1}{3}|V| \\
&\geq \frac{2}{3}|T| - \frac{1}{3}|T| - \frac{1}{3}|T| \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 1.2.4 ([6])**.** *Một hoán vị $\{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{2n}\}$ của tập hợp $\{1,\ 2,\ \ldots,\ 2n\}$, n nguyên dương, được gọi là có tính chất $\mathcal{P}$ nếu $|x_i - x_{i+1}| = n$, với ít nhất một giá trị $i \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ 2n-1\}$. Chứng minh rằng với mỗi số n, số hoán vị có tính chất $\mathcal{P}$ lớn hơn số hoán vị không có tính chất $\mathcal{P}$.*

Giải. Đặt $M = \{1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ n+1,\ n+2,\ \ldots,\ 2n\}$. Lưu ý rằng: $|1-(n+1)| = n,\ |2-(n+2)| = n, \ldots$ Gọi A_k là tập tất cả các hoán vị của M sao cho trong các hoán vị đó, hai phần tử k và $k+n$ đứng kề nhau, với $k \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$. Gọi A là tập tất cả các hoán vị có tính chất $\mathcal{P}$. Nhận thấy: $A = \bigcup\limits_k A_k$. Khi đó:

$$|A| = \left|\bigcup_k A_k\right| = \sum_k |A_k| - \sum_{k<h} |A_k \cap A_h| + \sum_{k<h<m} |A_k \cap A_h \cap A_m| - \cdots$$

Vì đây là tổng các số hạng của dãy đơn điệu giảm và đan dấu nên suy ra:

$$|A| \geq \sum_k |A_k| - \sum_{k<h} |A_k \cap A_h|.$$

Ngoài ra, ta chứng minh được:

$$|A_k| = 2\Big[(2n-1)!\Big] \text{ và } |A_k \cap A_h| = 4\Big[(2n-2)!\Big].$$

Do đó:

$$|A| \geq (2n-2)!\Big[2n(2n-1) - \frac{n(n-1)}{2}.4\Big] = 2n^2\Big[(2n-2)!\Big] > \frac{(2n)!}{2},$$

$\dfrac{(2n)!}{2}$ là nửa số hoán vị toàn phần cả có tính chất $\mathcal{P}$ và không có tính chất $\mathcal{P}$.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 1.2.5 ([2])**.** *Cho hai số nguyên dương m và n sao cho $n+2$ chia hết cho m. Hãy tính số các bộ ba số nguyên dương $(x,\ y,\ z)$ thỏa mãn điều kiện tổng $x+y+z$ chia hết cho m, trong đó mỗi số $x,\ y,\ z$ đều không lớn hơn n.*

Giải. Đặt $k = \dfrac{n+2}{m}$, nhận thấy $k \in \mathbb{N}^*$. Ta có: $n = km - 2$. Xét các tập hợp:

$D = \{km-1,\ km\}$,
$E = \{1,\ 2,\ \ldots,\ km\}$,
$A = \{(x,\ y,\ z) \mid x,\ y,\ z \in E \setminus D;\ x+y+z \,\vdots\, m\}$,
$B = \{(x,\ y,\ z) \mid x,\ y,\ z \in E;\ x+y+z \,\vdots\, m\}$,
$C = \{(x,\ y,\ z) \mid x,\ y,\ z \in E;\ x \in D$ hoặc $y \in D$ hoặc $z \in D;\ x+y+z \,\vdots\, m\}$.

Ta cần tính $|A|$.

Nhận thấy: $|A| = |B| - |C|$.

- Tính $|B|$: Có km cách chọn $x \in E$. Với mỗi cách chọn $x \in E$, ta có km cách chọn $y \in E$. Với mỗi cách chọn x và y như trên, ta có k cách chọn $z \in E$ sao cho $x+y+z \,\vdots\, m$. Do đó: $|B| = km.km.k = k^3m^2$.

- Tính $|C|$: Đặt:

$$X = \{(x,\ y,\ z) \mid x \in D,\ y \in E,\ z \in E;\ x + y + z \,\vdots\, m\},$$
$$Y = \{(x,\ y,\ z) \mid y \in D,\ x \in E,\ z \in E;\ x + y + z \,\vdots\, m\},$$
$$Z = \{(x,\ y,\ z) \mid z \in D,\ x \in E,\ y \in E;\ x + y + z \,\vdots\, m\}.$$

Khi đó, ta có $C = X \cup Y \cup Z$. Do đó:

$$|C| = |X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|.$$

Bằng cách tính tương tự, ta được:

$$|X| = |Y| = |Z| = 2k^2m,\ |X \cap Y| = |X \cap Z| = |Y \cap Z| = 4k,$$
$$|X \cap Y \cap Z| = \tau(m) = \begin{cases} 2^{4-m} & \text{với } m = 1,\ 2,\ 3; \\ 1 & \text{với } m > 3. \end{cases} \tag{1.2}$$

Do đó: $|C| = 6k^2m - 12k + \tau(m)$.

Thay $k = \dfrac{n+2}{m}$, ta được: $|A| = |B| - |C| = \dfrac{n^3+8}{m} - \tau(m)$, với $\tau(m)$ xác định bởi (1.2).

Bài toán 1.2.6 ([5])**.** *Cho 3 số nguyên dương $m,\ n,\ p$ sao cho $n+1$ chia hết cho m. Hãy tìm công thức tính số các bộ $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_p)$ gồm p số nguyên dương sao cho tổng $x_1 + x_2 + \cdots + x_p$ chia hết cho m, trong đó mỗi số $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_p$ đều không lớn hơn n.*

Giải. Giả sử $n = km - 1$. Ký hiệu

$$E = \{1,\ 2,\ \ldots,\ km\},$$
$$D = \{km\},$$
$$A = \{(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_p) \mid x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_p \in E \setminus D,\ \sum_{i=1}^{p} x_i \,\vdots\, m\},$$
$$B = \{(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_p) \mid x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_p \in E,\ \sum_{i=1}^{p} x_i \,\vdots\, m\},$$
$$C_i = \{(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_p) \mid x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_p \in E,\ x_i \in D,\ \sum_{j=1}^{p} x_j \,\vdots\, m\},$$
$$i \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ p\}.$$

Ta cần tính $|A|$.

Nhận thấy: $|A| = |B| - |C|$, với $C = \bigcup\limits_{i=1}^{p} C_i$.

- Tính $|B|$: Có km cách chọn x_1, km cách chọn x_2, ..., km cách chọn x_{p-1}. Với mỗi cách chọn $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{p-1})$ thì $x_p \equiv m - \sum\limits_{i=1}^{p-1} x_i \pmod m$ và $x_p \le km$. Do đó x_p chỉ có k cách chọn. Do đó:

$$|B| = (km)^{p-1}.k = k^p.m^{p-1}.$$

- Tính $|C|$: Theo Nguyên lý bù trừ, ta có:

$$\begin{aligned} |C| = \sum_{i=1}^{p} |C_i| - &\sum_{1\le i_1<i_2\le p} |C_{i_1}\cap C_{i_2}| + \cdots \\ &\cdots + (-1)^{j-1}. \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_j\le p} |C_{i_1}\cap C_{i_2}\cap\cdots\cap C_{i_j}| + \cdots \\ &\cdots + (-1)^{p-1}.|C_1\cap C_2\cap\cdots\cap C_p|. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Lý luận tương tự như tính $|B|$, ta có:

$$|C_{i_1}\cap C_{i_2}\cap\cdots\cap C_{i_j}| = k^{p-j}.m^{p-j-1},\ \forall j = \overline{1, p-1} \tag{1.4}$$

và

$$|C_1\cap C_2\cap\cdots\cap C_p| = 1. \tag{1.5}$$

Thay (1.4) và (1.5) vào (1.3), ta được:

$$\begin{aligned} |C| &= \sum_{j=1}^{p-1}(-1)^{j-1}C_p^j k^{p-j} m^{p-j-1} + (-1)^{p-1} \\ &= -\frac{1}{m}\left[\sum_{j=0}^{p}(-1)^j C_p^j (km)^{p-j} - (km)^p - (-1)^p\right] + (-1)^{p-1} \\ &= -\frac{1}{m}\Big[(km-1)^p - (km)^p - (-1)^p\Big] + (-1)^{p-1}. \end{aligned}$$

Từ đó:

$$\begin{aligned} |A| &= |B| - |C| \\ &= \frac{k^p m^p}{m} + \frac{1}{m}\Big[(km-1)^p - (km)^p - (-1)^p\Big] + (-1)^p \\ &= \frac{1}{m}\Big[n^p - (-1)^p\Big] + (-1)^p. \end{aligned}$$

Bài toán 1.2.7 ([4]). *Cho các số nguyên dương k, n thỏa mãn điều kiện $n > k^2 - k + 1$. Giả sử n tập hợp $A_1, A_2, \ldots, A_n$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện:*

a) $|A_i| = k, \forall i\ (1 \le i \le n)$;

b) $|A_i \cup A_j| = 2k - 1, \forall i, j\ (i \ne j$ và $1 \le i, j \le n)$.

Hãy xác định số phần tử của tập hợp $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$.

Giải. Theo Nguyên lý bù trừ, ta có: $|A_i \cup A_j| = |A_i| + |A_j| - |A_i \cap A_j|$, nên từ các giả thiết a), b), ta được

$$2k - 1 = k + k - |A_i \cap A_j| = 2k - |A_i \cap A_j|.$$

Do đó

$$|A_i \cap A_j| = 1, \forall i, j\ (i \ne j \text{ và } 1 \le i, j \le n). \tag{1.6}$$

Xét tập bất kì, chẳng hạn A_1, từ (1.6), ta có $|A_1 \cap A_i| = 1, \forall i\ (2 \le i \le n)$. Vì $|A_1| = k$, nên theo Nguyên lý Dirichlet phải tồn tại ít nhất một phần tử $a \in A_1$ là phần tử chung của không ít hơn m trong số các tập $A_2, A_3, \ldots, A_n$ với

$$m \ge \frac{n-1}{k} > k - 1.$$

Giả sử ngược lại, mọi phần tử của A_1 đều thuộc không quá m trong số các tập $A_2, A_3, \ldots, A_n$ với $m < \dfrac{n-1}{k}$. Từ (1.6) suy ra mỗi a_i thuộc A_1 $(1 \le i \le k)$ tương ứng với không quá m $\left(m < \dfrac{n-1}{k}\right)$ tập khác nhau trong số các tập $A_2, A_3, \ldots, A_n$. Bởi vậy số các tập đã cho sẽ nhỏ hơn $\dfrac{n-1}{k}.k + 1 = n$.

Nếu $m < n - 1$ thì sẽ tồn tại A_j $(1 \le j \le n)$ mà a không thuộc A_j. Ký hiệu phần tử chung duy nhất của A_j với A_1 là b, với A_{it} $(1 \le t \le m)$ bằng a_{it}. Khi đó $\forall t\ (1 \le t \le m)$, $a_{it} \ne b$ và $\forall s, t\ (s \ne t$ và $1 \le s, t \le m)$, $a_{is} \ne a_{it}$.

Thật vậy, nếu tồn tại t $(1 \le t \le m)$ mà $a_{it} = b$ thì A_1 và A_{it} có ít nhất hai phần tử chung là a và b, nên mâu thuẫn với (1.6). Nếu tồn tại

$s,\ t\ (1 \leq s,\ t \leq m)$ mà $s \neq t$, nhưng $a_{is} = a_{it}$ thì A_{is} và A_{it} có ít nhất hai phần tử chung là a và a_{is}, nên mâu thuẫn với (1.6).

Do đó, A_j chứa ít nhất $m+1$ phần tử khác nhau: $b,\ a_{i1},\ a_{i2},\ \ldots,\ a_{im}$. Khi đó $|A_j| \geq m + 1 > k$. Ta đã đi tới mâu thuẫn với giả thiết a). Bởi vậy, $m = n - 1$ và $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i = \{a\}$.

Với mọi i $(1 \leq i \leq n)$, dùng a_t^i $(1 \leq t \leq k-1)$ để ký hiệu các phần tử khác a và thuộc A_i, nghĩa là

$$A_i = \{a,\ a_1^i,\ a_2^i,\ \ldots,\ a_{k-1}^i\}.$$

Khi đó, với mọi $i,\ j\ (1 \leq i,\ j \leq n)$, nếu $i \neq j$ thì với mọi t $(1 \leq t \leq k-1)$, $a_t^i \neq a_t^j$. Thật vậy, giả sử tồn tại $i,\ j\ (1 \leq i,\ j \leq n)$ mà $i \neq j$, nhưng tồn tại t $(1 \leq t \leq k-1)$, $a_t^i = a_t^j$, thì $A_i,\ A_j$ có ít nhất hai phần tử chung là a và a_t^i. Ta đã đi đến mâu thuẫn với (1.6).

Như vậy, với mọi $i,\ j\ (1 \leq i,\ j \leq n)$ mà $i \neq j$ thì $A_i,\ A_j$ chỉ có một phần tử chung duy nhất là a. Do đó:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} \Big|A_i \setminus \{a\}\Big| + |\{a\}| = n(k-1) + 1.$$

Bài toán 1.2.8 ([3])**.** *Có* 1999 *người tham dự một cuộc triển lãm. Cứ chọn ra* 50 *người một cách tùy ý thì trong số* 50 *người này sẽ có ít nhất* 2 *người không biết nhau. Chứng minh rằng ta có thể tìm được ít nhất* 41 *người sao cho mỗi người trong số này biết nhiều nhất là* 1958 *người khác.*

Giải. Gọi Y là tập hợp những người có biết ít nhất là 1959 người khác. Kí hiệu $N(p)$ là tập hợp những người mà người p có biết đến.

Để giải bài toán, ta giả sử ngược lại rằng có *ít hơn* 41 người sao cho mỗi người trong số này biết nhiều nhất là 1958 người khác. Khi đó, $|Y| \geq 1959$. Để có mâu thuẫn với giả thiết đề bài, ta sẽ chứng minh rằng tồn tại một nhóm gồm 50 người mà tất cả đều *có biết nhau.*

Chọn ra người $y_1 \in Y$ và đặt $B_1 = N(y_1)$, ta có $|B_1| \geq 1959$. Lúc đó $|B_1| + |Y| > 1999$, do đó tồn tại người $y_2 \in B_1 \cap Y$.

Lại đặt $B_2 = N(y_1) \cap N(y_2)$, ta có

$$\begin{aligned} |B_2| &= |B_1| + |N(y_2)| - |B_1 \cup N(y_2)| \\ &\geq 1959 + 1959 - 1999 = 1999 - 40.2. \end{aligned}$$

Như vậy $|B_2| + |Y| > 1999$, do đó tồn tại người $y_3 \in B_2 \cap Y$. Tiếp tục quá trình trên theo cách tương tự: giả sử ta có $j \leq 48$ người khác nhau $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_j$ thuộc Y mà tất cả 48 người này đều biết nhau, ta đặt

$$B_j = N(y_1) \cap N(y_2) \cap \cdots \cap N(y_j),$$

B_j có ít nhất là $1999 - 40j \geq 79 > 40$ phần tử. Lúc đó, $|B_j| + |Y| > 1999$ nên tồn tại người $y_{j+1} \in B_j \cap Y$.

Như vậy, $B_{j+1} = B_j \cap N(y_{j+1})$ có số phần tử ít nhất là

$$\begin{aligned} |B_j| + |N(y_{j+1})| - |B_j \cup N(y_{j+1})| &\geq (1999 - 40j) + 1959 - 1999 \\ &= 1999 - 40(j+1) > 0, \end{aligned}$$

nên ta lại tiếp tục quá trình này.

Như vậy, ta có thể tìm được 49 người $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_{49}$ sao cho tập hợp $N(y_1) \cap N(y_2) \cap \cdots \cap N(y_{49})$ khác rỗng. Suy ra, tồn tại một người $y_{50} \in B_{49}$. Nhưng lúc này, bất cứ 2 người nào trong số 50 người $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_{50}$ cũng biết nhau. Điều này mâu thuẫn.

Bài toán 1.2.9 ([8])**.** *Rút ngẫu nhiên* 13 *quân bài từ bộ bài* 52 *quân. Tính xác suất để trong* 13 *quân đó có "tứ quý".*

Giải. Có C_{52}^{13} cách rút 13 quân bài từ bộ bài 52 quân. Ta cần tìm số cách rút trong đó có 4 quân bài giống nhau.

Trước hết, ta đếm số cách rút có "tứ quý" A. Rõ ràng, có C_{48}^{9} cách rút như vậy (lấy 4 quân A và 9 quân bất kì từ 48 quân còn lại). Với các quân bài khác cũng vậy. Vì có 13 loại quân bài khác nhau nên số cách rút có "tứ quý" là $13.C_{48}^{9}$.

Trong lời giải trên, chúng ta đã đếm lặp. Cụ thể là những cách rút bài có hai "tứ quý", chẳng hạn "tứ quý" K và "tứ quý" A được đếm hai lần: một lần ở "tứ quý" A và một lần ở "tứ quý" K. Nhưng ta đang đếm không phải là số "tứ quý" mà là số lần gặp "tứ quý". Như thế, những lần đếm lặp đó phải trừ đi. Nhận thấy, số cách rút có "tứ quý" K và A sẽ là C_{44}^{5}. Lý luận tiếp tục như thế, ta có con số chính xác cách rút có "tứ quý" là:

$$13.C_{48}^{9} - C_{13}^{2}.C_{44}^{5} + C_{13}^{3}.C_{40}^{1}.$$

Xác suất cần tìm là

$$p = \frac{13.C_{48}^{9} - C_{13}^{2}.C_{44}^{5} + C_{13}^{3}.C_{40}^{1}}{C_{52}^{13}} \approx 0,0342,$$

tức là với một người rút ngẫu nhiên 13 quân bài từ bộ bài 52 quân, cứ trung bình 29 lần rút sẽ có 1 lần có "tứ quý". Xác suất có 1 "tứ quý" trong 1 ván chơi cao hơn và cũng có thể tính bằng việc áp dụng Nguyên lý bù trừ

$$P \sim 4p - 6p^2 + 4p^3 - p^4 \approx 0,1299,$$

tức là cứ khoảng 8 ván sẽ xuất hiện 1 "tứ quý".

Nhận xét 1.2.1. *Trong lời giải trên, để không bị đếm lặp, chúng ta đã lần lượt bớt đi, rồi lại thêm vào, rồi lại bớt đi, ... Cơ sở toán học của phương pháp này chính là Nguyên lý bù trừ đã được phát biểu ở trên.*

Bài toán 1.2.10 ([8]). *Có bao nhiêu cách xếp 8 con xe lên bàn cờ quốc tế đã bị gạch đi một đường chéo chính sao cho không có con nào ăn con nào?*

Giải. Có $(8!)^2$ cách xếp 8 con xe lên bàn cờ quốc tế sao cho không có con nào ăn con nào. Ta cần đếm số cách xếp không hợp lệ, tức là số cách xếp có ít nhất một con xe nằm trên đường chéo chính đã bị gạch.

Gọi A_i là tập hợp các cách xếp có quân xe nằm ở ô $(i,\ i)$.

Ta cần tìm $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_8|$.

Nhận thấy:

$|A_i| = 7!,\ \forall i = \overline{1,8}$; $|A_i \cap A_j| = 6!,\ \forall i, j$ thỏa $1 \le i < j \le 8$; ...; $|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_8| = 1$.

Áp dụng Nguyên lý bù trừ, ta có

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_8| = C_8^1.7! - C_8^2.6! + C_8^3.5! - \cdots - C_8^8.1! = 8! - \frac{8!}{2!} + \frac{8!}{3!} - \cdots - \frac{8!}{8!}.$$

Như vậy, số cách xếp 8 con xe lên bàn cờ quốc tế đã bị gạch đi một đường chéo chính sao cho không có con nào ăn con nào bằng

$$N(8) = (8!)^2 - \left(8! - \frac{8!}{2!} + \frac{8!}{3!} - \cdots - \frac{8!}{8!}\right) = (8!)\left(8! - \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{8!}\right).$$

Chương 2

PHƯƠNG PHÁP PHÂN HOẠCH TẬP HỢP

2.1 Phương pháp phân hoạch tập hợp

Xét bài toán đơn giản ở phổ thông như sau:

Bài toán 2.1.1. *Có bao nhiêu cách phân phối* 5 *đồ vật khác nhau cho* 3 *người sao cho mỗi người nhận được ít nhất một đồ vật.*

Lời giải của bài toán này đã được trình bày theo ý tưởng xét các khả năng phân tích số tự nhiên 5 thành tổng của ba số nguyên dương:

$$5 = 1 + 1 + 3 = 1 + 2 + 2 = 1 + 3 + 1 = 2 + 1 + 2 = 2 + 2 + 1 = 3 + 1 + 1.$$

Ứng với mỗi khả năng trên tìm số cách chia tương ứng và theo nguyên lý cộng ta được số cách chia theo yêu cầu bài toán là 150.

Phân tích lời giải: Lời giải theo ý tưởng trên thực hiện sẽ khá phức tạp khi số đồ vật cho trước là khá lớn và số người được chia cũng khá lớn.

Bài toán 2.1.2. *Có bao nhiêu cách phân phối n đồ vật khác nhau cho k người sao cho mỗi người nhận được ít nhất một đồ vật ($n,\ k \in \mathbb{N}^*$).*

Để giải quyết Bài toán 2.1.2, chúng ta cần một số kiến thức bổ sung về sự phân hoạch một tập hợp:

2.1.1 Các khái niệm

Các tập hợp khác rỗng $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_k$ được gọi là *một phân hoạch* của tập hợp A nếu:

$$\begin{cases} A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k, \\ A_i \cap A_j = \varnothing,\ \forall i,\ j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ k\},\ i \neq j. \end{cases}$$

Mỗi tập con A_i $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k)$ được gọi là *một thành phần* của phân hoạch.

Kí hiệu $|A|$ là số các phần tử của tập hợp A (lực lượng của tập A) và $S(n,\ k)$ là số tất cả các phân hoạch của tập A gồm n phần tử thành k tập khác rỗng với các số $n,\ k$ nguyên dương và $k \leq n$.

Nhận thấy $S(n,\ 1) = S(n,\ n) = 1$.

2.1.2 Công thức truy hồi của $S(n,\ k)$

Chứng minh rằng $S(n,\ k)$ thỏa mãn hệ thức sau:

$$S(n+1,\ k) = kS(n,\ k) + S(n,\ k-1), \text{ với } k \leq n. \tag{2.1}$$

Chứng minh. Giả sử A là tập hợp với $|A| = n+1$; $A = \{a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ a_{n+1}\}$. Gọi P là tập tất cả các phân hoạch của tập A thành k tập khác rỗng thì ta có

$$|P| = S(n+1,\ k). \tag{2.2}$$

Gọi:

• P_1 là tập tất cả các phân hoạch của tập A thành k thành phần khác rỗng sao cho $\{a_{n+1}\}$ là một thành phần của mỗi phân hoạch đó.

• P_2 là tập tất cả các phân hoạch của tập A thành k thành phần khác rỗng sao cho $\{a_{n+1}\}$ không là một thành phần của các phân hoạch đó.

Khi đó:

$$\begin{cases} P = P_1 \cup P_2 \\ P_1 \cap P_2 = \varnothing. \end{cases}$$

Ta tính $|P_1|$ và $|P_2|$:

• Tính $|P_1|$:

Vì $\{a_{n+1}\}$ là một thành phần của mỗi phân hoạch trong P_1 nên mỗi phân hoạch trong P_1 tương ứng với đúng một phân hoạch của tập $A \setminus \{a_{n+1}\} = \{a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n\}$ thành $k-1$ thành phần khác rỗng. Do đó

$$|P_1| = S(n,\ k-1). \tag{2.3}$$

• Tính $|P_2|$:

Xét một phân hoạch của P_2, chẳng hạn $\alpha = \{A_1,\ A_2,\ \dots,\ A_k\}$ với $a_{n+1} \in A_1$. Khi đó $A_1 \setminus \{a_{n+1}\} \neq \varnothing$ do $\{a_{n+1}\}$ không là một thành phần trong mỗi phân hoạch của P_2. Vì vậy $\alpha_1 = \{A_1 \setminus \{a_{n+1}\},\ A_2,\ \dots,\ A_k\}$ tạo thành một phân hoạch gồm k thành phần khác rỗng của tập $A \setminus \{a_{n+1}\}$. Xét tương tự khi $a_{n+1} \in A_i$ $(i = 2,\ 3,\ \dots,\ k)$.

Ngược lại, nếu $\beta = \{B_1,\ B_2,\ \dots,\ B_k\}$ là một phân hoạch của tập $A \setminus \{a_{n+1}\}$ thành k thành phần khác rỗng thì:

$$\begin{cases} \beta_1 = \{B_1 \cup \{a_{n+1}\},\ B_2,\ \dots,\ B_k\}, \\ \beta_2 = \{B_1,\ B_2 \cup \{a_{n+1}\},\ \dots,\ B_k\}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \beta_k = \{B_1,\ B_2,\ \dots,\ B_k \cup \{a_{n+1}\}\} \end{cases}$$

là các phân hoạch của tập A thành k thành phần trong P_2 và do vậy ta có:

$$|P_2| = kS(n,\ k). \tag{2.4}$$

Từ (2.2), (2.3), (2.4) và theo nguyên lý cộng $|P| = |P_1| + |P_2|$, ta có

$$S(n+1,\ k) = kS(n,\ k) + S(n,\ k-1),\ \text{với}\ k \leq n.$$

Công thức (2.1) được chứng minh.

Trở lại Bài toán 2.1.2, ta thấy phép chia theo yêu cầu bài toán là một phép chọn qua hai bước:

Bước 1: Số cách chia n đồ vật khác nhau thành k phần sao cho mỗi phần có ít nhất một đồ vật chính là số tất cả các phân hoạch của tập A gồm n phần tử thành k tập khác rỗng, theo định nghĩa ở trên số cách chia của bước này là $S(n,\ k)$.

Bước 2: Vì mỗi thành phần đem phân phối cho người khác nhau thì coi là khác nhau nên ứng với mỗi cách chia ở bước thứ nhất ta đem hoán vị các phần cho nhau thì được $k!$ cách phân phối đồ vật cho k người.

Theo nguyên lý nhân suy ra số cách chia của Bài toán 2.1.2 là $k!S(n,\ k)$.

2.1.3 Công thức tổng quát của $S(n,\ k)$

Từ $S(n,\ 1) = S(n,\ n) = 1$ và từ công thức truy hồi của $S(n,\ k)$, ta thấy $S(n,\ k)$ có những tính chất giống như đối với công thức tổ hợp C_n^k nên ta cũng xây dựng được tam giác số để tìm giá trị của $S(n,\ k)$ $(1 \leq k \leq n)$ tương tự như tam giác số Pascal đối với C_n^k. Trong bảng dưới đây dòng thứ n là dãy số

$$S(n,\ 1),\ S(n,\ 2),\ \ldots,\ S(n,\ n-1),\ S(n,\ n).$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 7 & & 6 & & 1 & & \\
 & 1 & & 15 & & 25 & & 10 & & 1 & \\
1 & & 31 & & 90 & & 65 & & 15 & & 1
\end{array}$$

Nhìn vào bảng giá trị của $S(n,\ k)$ ta thấy $S(5,\ 3) = 25$, vì vậy số cách chia của Bài toán 2.1.1 là:

$$3!S(5,\ 3) = 6.25 = 150 \text{ (cách)}.$$

Cuối cùng để giải quyết trọn vẹn vấn đề đã đặt ra, ta tìm công thức tổng quát của $S(n,\ k)$ tính theo n và k.

Ta chứng minh rằng:

$$S(n,\ k) = \frac{1}{k!}\sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j}C_k^j.j^n, \tag{2.5}$$

với các số nguyên dương $n,\ k$ và $k \leq n$.

Thật vậy, ta chứng minh quy nạp theo n.

• Với $n = 1$ thì $k = 1$ và có $S(1,\ 1) = (-1)^0.1 = 1$ đúng theo định nghĩa.

• Giả sử công thức (2.5) được chứng minh đúng cho n và mọi số nguyên dương $k \leq n$. Ta cần chứng minh công thức (2.5) cũng đúng cho $n+1$ và mọi số nguyên dương $k \leq n+1$.

Ta chứng minh với $k \leq n$ thì

$$S(n+1,\ k) = \frac{1}{k!}\sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j}C_k^j.j^{n+1}. \tag{2.6}$$

Thật vậy, theo (2.1) và với $k \leq n$ ta có:

$$\begin{aligned}
S(n+1,\ k) &= kS(n,\ k) + S(n,\ k-1)\\
&= k\frac{1}{k!}\sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j}C_k^j j^n + \frac{1}{(k-1)!}\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{k-1-j}C_{k-1}^j j^n\\
&= \frac{1}{k!}\left[k\sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j}C_k^j j^n + k\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{k-1-j}C_{k-1}^j j^n\right]\\
&= \frac{1}{k!}\left[k\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{k-j}j^n(C_k^j - C_{k-1}^j) + (-1)^{k-k}C_k^k k^{n+1}\right]\\
&= \frac{1}{k!}\left[k\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{k-j}C_{k-1}^{j-1}j^n + (-1)^{k-k}C_k^k k^{n+1}\right]\\
&= \frac{1}{k!}\left[\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{k-j}\left(\frac{k}{j}C_{k-1}^{j-1}\right)j^{n+1} + (-1)^{k-k}C_k^k k^{n+1}\right]\\
&= \frac{1}{k!}\left[\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{k-j}C_k^j j^{n+1} + (-1)^{k-k}C_k^k k^{n+1}\right]\\
&= \frac{1}{k!}\sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j}C_k^j j^{n+1}.
\end{aligned}$$

Vậy (2.6) được chứng minh.

Với $k = n+1$ ta còn chứng minh:

$$1 = S(n+1,\ n+1) = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{j=1}^{n+1}(-1)^{n+1-j}C_{n+1}^j j^{n+1} \tag{2.7}$$

Trước hết, ta phân tích phân thức

$$P(x) = \frac{x^n}{(x-1)(x-2)\dots(x-(n+1))}$$

thành tổng các phân thức có dạng $\dfrac{a_i}{x-i}$, với a_i là hằng số, $i = 1,\ 2,\ \dots,$ $n+1$. Tức là:

$$P(x) = \frac{a_1}{x-1} + \frac{a_2}{x-2} + \dots + \frac{a_{n+1}}{x-(n+1)}.$$

Quy đồng vế phải và đồng nhất các hệ số ở hai vế ta được:

$$\begin{aligned} x^n = a_1(x-2)\dots(x-n-1) + \dots + a_j(x-1)\dots \\ (x-j+1)(x-j-1)\dots(x-n-1) + \dots + \\ + a_{n+1}(x-1)\dots(x-n). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Suy ra:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{n+1} = 1. \tag{2.9}$$

Cho $x = j,\ j = 1,\ 2,\ \dots,\ n+1$ trong (2.8) ta được:

$$\begin{aligned} j^{n+1} &= j.a_j(j-1)(j-2)\dots 1.(-1)\dots(j-(n+1)) \\ &= a_j[j(j-1)\dots 1][((n+1)-j)(n-j)\dots 1](-1)^{n+1-j} \\ &= (-1)^{n+1-j}.a_j.j!.[(n+1)-j]!. \end{aligned}$$

Suy ra:

$$\frac{(-1)^{n+1-j}.C_{n+1}^j.j^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(-1)^{n+1-j}.j^{n+1}}{j!.[(n+1)-j]!} = a_j.$$

Từ đó và từ (2.9), ta có được:

$$\frac{1}{(n+1)!}\sum_{j=1}^{n+1}(-1)^{n+1-j}C_{n+1}^j j^{n+1} = \sum_{j=1}^{n+1} a_j = 1.$$

Ta có điều phải chứng minh.

Theo nguyên lý quy nạp toán học với $k \le n$, ta có:

$$S(n,\ k) = \frac{1}{k!}\sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j}C_k^j j^n.$$

Các công thức tính số phân hoạch của một tập hợp $S(n,\ k)$ còn được áp dụng để giải nhiều bài toán tổ hợp khác.

Phương pháp phân hoạch tập hợp đôi khi là một công cụ khá mạnh để giải quyết một số dạng khó của bài toán rời rạc, trong đó việc lựa chọn một phân hoạch phù hợp cho tập hợp là một kỹ thuật rất quan trọng. Sau đây là một số bài toán minh họa.

2.2 Áp dụng

Bài toán 2.2.1 ([5]). *Cho p, q là hai số lẻ nguyên tố cùng nhau. Khi đó chứng minh:*

$$\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}}\left[\frac{iq}{p}\right]+\sum_{j=1}^{\frac{q-1}{2}}\left[\frac{jp}{q}\right]=\left(\frac{p-1}{2}\right)\left(\frac{q-1}{2}\right).$$

Chứng minh. Giả sử

$$A=\left\{(i;j)\middle|1\le i\le\frac{p-1}{2},\ 1\le j\le\frac{q-1}{2}\right\}.$$

Khi đó:

$$|A|=\left(\frac{p-1}{2}\right)\left(\frac{q-1}{2}\right).$$

Ta phân hoạch tập A thành các tập hợp:

$$A_1=\{(i;j)\mid qi>pj\},\ A_2=\{(i;j)\mid qi<pj\},\ A_3=\{(i;j)\mid qi=pj\}.$$

Ta có: $|A_3|=0$.

Mặt khác

$$|A_1|=\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}}\left[\frac{iq}{p}\right],\ |A_2|=\sum_{j=1}^{\frac{q-1}{2}}\left[\frac{jp}{q}\right].$$

Vì $|A|=|A_1|+|A_2|$ nên ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 2.2.2 ([5]). *Khai triển $f(x)=(1+x+x^2+\cdots+x^{1000})^{1000}$ được đa thức*

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{10^6}x^{10^6}.$$

Tính $S=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{1000}$.

Giải. Trước hết, chúng ta chứng minh kết quả sau:

Bổ đề 2.2.1. *Cho hai số tự nhiên n, k. Xét tập hợp:*

$$H_{n,k}=\{(x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)\mid x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n\in\mathbb{N},\ x_0+x_1+\cdots+x_n=k\}.$$

Thế thì: $|H_{n,k}|=C_{n+k}^n$.

Chứng minh. Ta chứng minh bổ đề trên bằng phương pháp quy nạp theo n.

Khi $n = 0$ thì $H_{0,k} = \{k\}$, $|H_{0,k}| = 1 = C_k^0$: khẳng định đúng.

Giả sử khẳng định đã đúng đến $n-1$, $n \geq 1$.

Xét phân hoạch $H_{n,k} = B_0 \cup B_1 \cup \cdots \cup B_k$, trong đó $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in B_j$ nếu $x_n = j$, với $j \in \{0, 1, \ldots, k\}$. Theo quy nạp ta có:

$$|B_j| = |H_{n-1,k-j}| = C_{n-1+k-j}^{n-1}, \ \forall j = 0, 1, \ldots, k.$$

Dùng công thức

$$C_m^{i-1} + C_m^i = C_{m+1}^i \text{ hay } C_m^{i-1} = C_{m+1}^i - C_m^i,$$

ta có

$$\begin{aligned} |H_{n,k}| = \sum_{j=0}^{k} |B_j| = \sum_{j=0}^{k} C_{n-1+k-j}^{n-1} = \sum_{j=0}^{k} (C_{n+k-j}^n - C_{n-1+k-j}^n) \\ = C_{n+k}^n. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Do đó, ta có điều phải chứng minh.

Lưu ý: $|H_{n,k}| = C_{n+k}^n - C_{n-1}^n = C_{n+k}^n$, với quy ước rằng $C_{n-1}^n = 0$.

Trở lại với bài toán của chúng ta ở dạng tổng quát sau:

"Với $m, n \in \mathbb{N}$, khai triển $f(x) = (1 + x + x^2 + \cdots + x^m)^{n+1}$ được đa thức

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{m(n+1)} x^{m(n+1)}".$$

Viết cụ thể khai triển của $f(x)$, ta có

$$a_i = |H_{n,i}| = C_{n+i}^n, \ \forall i = 0, 1, \ldots, m,$$

($|H_{n,i}| > a_i$ nếu $i \geq m+1$).

Nói riêng

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_m = \sum_{i=0}^{m} C_{n+i}^n = \sum_{i=0}^{m} (C_{n+1+i}^{n+1} - C_{n+i}^{n+1}) = C_{n+1+m}^{n+1}.$$

Bài toán đã cho là trường hợp $n + 1 = m = 1000$.

Do đó $S = C_{2000}^{1000}$.

Bài toán 2.2.3 ([5]). *Cho tập hợp M gồm 2005 số dương $a_1,\ a_2,\ \ldots,$ a_{2005}. Xét tất cả các tập hợp con T_i khác rỗng của M. Gọi s_i là tổng các số thuộc một tập hợp con T_i nói trên. Chứng minh rằng có thể chia tập hợp tất cả các số s_i được thành lập như vậy thành 2005 tập hợp con khác rỗng không giao nhau sao cho tỉ số của hai số bất kì thuộc cùng một tập hợp con vừa được phân chia không vượt quá 2.*

Giải. Đặt $n = 2005$.

Không mất tính tổng quát ta giả sử $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$.

Đặt $S_0 = 0,\ S_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m\ (1 \leq m \leq n)$.

Gọi $P = \{s_i \mid T_i \subseteq M\}$.

Ký hiệu $P_m = \{s \in P \mid S_{m-1} < s \leq S_m\}$, với $m = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

Ta chứng minh rằng cách chia P thành các tập P_m như trên thỏa mãn điều kiện bài toán. Muốn vậy ta chỉ cần chứng minh nếu $b \in P_m$ thì $2b > S_m$.

Thật vậy, do $b > S_{m-1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{m-1}$ và $b = \sum\limits_{k=1}^{h} a_{i_k}$ nên phải tồn tại i_k $(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ h)$ mà $i_k \geq m$.

Vậy $b \geq a_{i_k} \geq a_m = S_m - S_{m-1} > S_m - b$ hay $2b > S_m$.

Bài toán 2.2.4 ([7]). *Cho A là tập hợp gồm 16 số nguyên dương đầu tiên. Hãy tìm số nguyên dương k nhỏ nhất có tính chất: trong mỗi tập con có k phần tử của tập hợp A đều tồn tại hai số phân biệt a và b sao cho $a^2 + b^2$ là một số nguyên tố.*

Giải. Giả sử k là số nguyên dương sao cho trong mỗi tập con có k phần tử của tập A đều tồn tại hai số phân biệt a và b sao cho $a^2 + b^2$ là một số nguyên tố.

+ Xét tập con T gồm tất cả các số chẵn thuộc tập A. Dễ thấy, T có 8 phần tử và với $a,\ b$ tùy ý thuộc T luôn có $a^2 + b^2$ là một hợp số. Từ đó, suy ra $k \geq 9$.

+ Bằng cách tính và kiểm tra trực tiếp tất cả các tổng $a^2 + b^2$, với $a,\ b \in A$, ta được một phân hoạch gồm 8 tập con của tập A mà mỗi tập con gồm hai phần tử là hai số có tổng bình phương là một số nguyên tố:

$$\begin{aligned} A =&\{1,\ 4\} \cup \{2,\ 3\} \cup \{5,\ 8\} \cup \{6,\ 11\} \cup \\ &\cup \{7,\ 10\} \cup \{9,\ 16\} \cup \{12,\ 13\} \cup \{14,\ 15\}. \end{aligned}$$

Theo Nguyên lý Dirichlet, trong 9 phần tử tùy ý của tập A phải có hai phần tử thuộc cùng một tập con trong phân hoạch nêu trên. Nói một cách khác, trong mỗi tập con có 9 phần tử của tập A đều tồn tại hai số phân biệt a, b mà $a^2 + b^2$ là một số nguyên tố.

Từ các kết quả trên ta được: $k_{min} = 9$.

Chú ý 2.2.1. *Phân hoạch gồm 8 tập con của tập A đã nêu trong lời giải không phải là phân hoạch duy nhất có tính chất: mỗi tập con gồm 2 phần tử là 2 số mà tổng bình phương của chúng là một số nguyên tố.*

Bài toán 2.2.5 ([9])**.** *Trong không gian cho 2006 điểm phân biệt và không có 4 điểm nào đồng phẳng. Người ta nối tất cả các cặp điểm bằng các đoạn thẳng. Một số tự nhiên k được gọi là tốt nếu ta có thể gán cho mỗi đoạn thẳng một số tự nhiên không quá k sao cho mọi tam giác có 3 đỉnh là 3 trong 2006 điểm trên có 2 cạnh được gán 2 số bằng nhau, cạnh còn lại được gán số lớn hơn. Tìm số tốt có giá trị nhỏ nhất.*

Giải. Ta sẽ chứng minh số tốt nhỏ nhất là 10.

Trước hết, ta định nghĩa: Một cách gán các số tự nhiên không vượt quá k lên các đoạn thẳng nối n điểm trong không gian, không có bốn điểm nào đồng phẳng, là một *cách gán tốt* nếu với mọi tam giác có ba đỉnh trong n điểm đã cho thì có hai cạnh được gán hai số bằng nhau và cạnh còn lại được gán số lớn hơn, và khi đó ta gọi k là số *n-tốt*. Kí hiệu số n-tốt có giá trị nhỏ nhất là $f(n)$. Ta sẽ chứng minh $f(2006) = 10$.

Trước hết, ta chứng minh với mọi $n \geq 5$ thì

$$f(n) = f\left(\left[\frac{n+1}{2}\right]\right) + 1. \tag{2.11}$$

Nhận xét rằng với $k \geq l$ thì $f(k) \geq f(l)$ nên $f(n) \geq f\left(\left[\frac{n+1}{2}\right]\right)$. Khi đó, để chứng minh (2.11), ta chỉ cần chứng minh $f\left(\left[\frac{n+1}{2}\right]\right)$ không là số n-tốt và $f\left(\left[\frac{n+1}{2}\right]\right) + 1$ là số n-tốt.

Giả sử $f\left(\left[\dfrac{n+1}{2}\right]\right)$ là số n-tốt, tức là tồn tại một cách gán các số tự nhiên không vượt quá $f\left(\left[\dfrac{n+1}{2}\right]\right)$ lên các cạnh nối n điểm là một cách gán tốt. Nhận xét rằng không có tam giác nào có ba đỉnh trong các điểm đó có hai cạnh được gán số $f\left(\left[\dfrac{n+1}{2}\right]\right)$, hay nói cách khác, hai cạnh mà được gán số $f\left(\left[\dfrac{n+1}{2}\right]\right)$ thì không có đầu mút chung. Suy ra, ta có thể kí hiệu n điểm đã cho như sau: $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_{2k-1},\ A_{2k},\ A_{2k+1},\ \ldots,\ A_n$, ở đây các cạnh được gán số $f\left(\left[\dfrac{n+1}{2}\right]\right)$ là $A_1A_2,\ A_2A_3,\ \ldots,\ A_{2k-1}A_{2k}$ và các điểm còn lại là $A_{2k+1},\ \ldots,\ A_n$.

Xét các điểm $A_1,\ A_3,\ \ldots,\ A_{2k-1},\ A_{2k+1},\ \ldots,\ A_n$ (do $2k \leq n$ nên có ít nhất $\left[\dfrac{n+1}{2}\right]$ điểm được chọn, gọi số điểm đã chọn là m) và các đoạn thẳng nối các điểm đó. Do không có đoạn thẳng nào được gán số $f\left(\left[\dfrac{n+1}{2}\right]\right)$, và phần đã chọn là một phần của một cách gán tốt nên nó là một cách gán tốt với các số không vượt quá $f\left(\left[\dfrac{n+1}{2}\right]\right)-1$, suy ra $f(m) < f\left(\left[\dfrac{n+1}{2}\right]\right)$, mâu thuẫn với $m \geq \dfrac{n+1}{2}$. Do đó giả sử sai hay

$$f(n) > f\left(\left[\frac{n+1}{2}\right]\right). \tag{2.12}$$

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh $f\left(\left[\dfrac{n+1}{2}\right]\right)+1$ là số n-tốt. Thật vậy, xét n điểm $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$. Ta gán số 0 lên các cạnh A_iA_j mà $i \not\equiv j \pmod 2$.

Với các điểm $A_1,\ A_3,\ \ldots$, ta có thể gán các số từ 0 đến $f\left(\left[\dfrac{n+1}{2}\right]\right)$ lên các đoạn nối chúng sao cho là một cách gán tốt với các điểm đó nên cũng có thể gán các số từ 1 đến $f\left(\left[\dfrac{n+1}{2}\right]\right)+1$ sao cho là một cách gán tốt đối với các điểm đó.

Lập luận tương tự, ta cũng có thể gán các số từ 1 đến $f\left(\left[\dfrac{n+1}{2}\right]\right)+1$

lên các cạnh nối các điểm A_2, A_4, ... sao cho là một cách gán tốt đối với các điểm đó.

Ta chứng minh cách gán như vậy là một cách gán tốt đối với các điểm A_1, A_2, ..., A_n.

Thật vậy, xét tam giác $A_iA_jA_k$, nếu $i \equiv j \equiv k \pmod 2$ thì từ trên suy ra có hai cạnh được gán hai số bằng nhau và cạnh còn lại được gán số lớn hơn. Nếu trong ba số i, j, k có hai số cùng tính chẵn lẻ và khác tính chẵn lẻ với số còn lại, không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $i \equiv j \pmod 2$, $i \not\equiv k \pmod 2$, $j \not\equiv k \pmod 2$. Theo cách gán ta có cạnh A_iA_k và A_jA_k được gán số 0 và cạnh A_iA_j được gán một số lớn hơn hoặc bằng 1, điều này thỏa mãn.

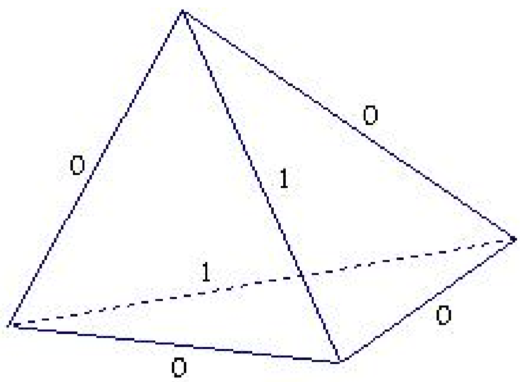
Do đó,

$$f\left(\left[\frac{n+1}{2}\right]\right) + 1 \text{ là số } n\text{-tốt}. \tag{2.13}$$

Từ (2.12) và (2.13), suy ra $f(n) = f\left(\left[\dfrac{n+1}{2}\right]\right) + 1$.

Ta có: $f(2006) = f(1003)+1 = f(502)+2 = f(251)+3 = f(126)+4 = f(63)+5 = f(32)+6 = f(16)+7 = f(8)+8 = f(4)+9$.

Tiếp theo, ta sẽ tính $f(4)$. Trước hết, ta thấy 0 không là số 4-tốt. Thật vậy, nếu 0 là số 4-tốt, xét cách gán các số 0 lên các đoạn nối bốn điểm, xét ba điểm bất kỳ tạo thành một tam giác thì ba cạnh của tam giác đó đều được gán ba số bằng nhau, điều này mẫu thuẫn. Mặt khác, 1 là số 4-tốt (xem Hình 2.1).



Hình 2.1: 1 là số 4-tốt

Suy ra $f(4) = 1$. Do đó $f(2006) = 10$.

Vậy số tốt có giá trị nhỏ nhất cần tìm là 10.

Bài toán 2.2.6 ([5]). *Giả sử c là số hữu tỉ dương và khác 1. Chứng minh rằng có thể phân hoạch tập các số nguyên dương thành hai tập khác nhau A, B sao cho $\frac{x}{y} \neq c$ với mọi x, y cùng nằm trong A hoặc cùng nằm trong B.*

Giải. Đặt $c = \frac{p}{q}$, với p và q là hai số nguyên tố cùng nhau.

Trước hết, ta thấy rằng các số không chia hết cho p và không chia hết cho q thì đặt chúng thuộc A hoặc B đều được, chúng không ảnh hưởng gì đến tính chất của tập hợp.

Bây giờ xét các số chia hết cho p hoặc q, chúng có dạng kp^mq^n, với k không chia hết cho p và q. Ta chia các số đó thành các nhóm dựa theo bậc $(m+n)$ của chúng, bởi vì ta nhận thấy các số có bậc khác nhau thì có thể ở chung một tập hợp.

Vấn đề bây giờ còn lại là chia các số có cùng bậc vì chính những số này nếu ở chung một tập hợp thì sẽ gây ra vấn đề. Nhận thấy là cần tránh thương của chúng có p bậc 1 (lẻ) nên chỉ với việc chia các số có cùng bậc thành các số có bậc p chẵn chung một tập hợp và bậc p lẻ chung một tập hợp.

Ví dụ với bậc 5: nếu kp^2q^3, kp^4q, kq^5 ở A thì kpq^4, kp^3q^2, kp^5 ở B với k không chia hết cho p và q, ...

Theo cách chia như trên ta thấy đã phân hoạch được toàn bộ tập hợp các số nguyên dương thành hai tập hợp thỏa mãn điều kiện đề bài.

Bài toán 2.2.7 ([5]). *Với mỗi số nguyên $r \geq 1$, xác định số nguyên nhỏ nhất $h(r) \geq 1$ sao cho với mọi cách chia tập hợp $\{1, 2, \ldots, h(r)\}$ thành r tập con đều tồn tại các số nguyên $a \geq 0$, $y \geq x \geq 1$ sao cho $a+x$, $a+y$, $a+x+y$ thuộc cùng một tập con.*

Giải. Đặt $M_0 = \{1, 2, \ldots, 2r\}$, $M_1 = \{r, r+1, \ldots, 2r\}$ thì $M_1 \subset M_0$ ($M_1 = M_0$ khi $r = 1$) và M_1 có $r+1$ phần tử.

Như thế, giả sử ta chia tập hợp M_0 thành r tập con $M_0 = \bigcup_{i=1}^{r} C_i$ thì tồn tại hai phần tử u, v thuộc M_1, cùng thuộc một tập con C_i nào đấy.

Giả sử $r \leq u < v \leq 2r$. Khi đó, đặt $a = 2u - v$, $x = y = v - u$, ta có $a \geq 0$ và $x = y \geq 1$ thì

$$a + x = a + y = u, \ a + x + y = v.$$

Ta đã có $u, \ v$ thuộc cùng một tập con C_i nào đó của M_0. Do đó M_0 là một tập hợp thỏa mãn điều kiện của đề bài. Suy ra

$$h(r) \leq 2r. \tag{2.14}$$

Bây giờ, xét một cách chia tập hợp $M_2 = \{1, \ 2, \ \ldots, \ 2r - 1\}$ thành r tập con như sau:

$M_2 = \bigcup\limits_{k=1}^{r} D_k$, trong đó $D_k = \{k, \ k + r\}$, với $k = 1, \ 2, \ \ldots, \ r - 1$ và $D_r = \{r\}$.

Ta xét hai trường hợp:

1) Giả sử tồn tại $a \geq 0, \ y \geq x \geq 1$ sao cho $a + x, \ a + y, \ a + x + y$ thuộc cùng một tập con D_k nào đấy với $k = 1, \ 2, \ \ldots, \ r - 1$. Khi đó: $a + x = a + y = k$ và $a + x + y = k + r$.

Như thế, suy ra rằng $x = y = r$ và $a = k - r < 0$, mâu thuẫn.

Do đó, điều giả sử không đúng.

2) Giả sử tồn tại $a \geq 0, \ y \geq x \geq 1$ sao cho $a + x, \ a + y, \ a + x + y$ cùng thuộc $D_r = \{r\}$ thì $a + x = a + y = a + x + y = r$. Điều này không thể xảy ra vì luôn luôn có $a + x = a + y \neq a + x + y$.

Vậy với cách chia tập hợp M_2 như trên sẽ không tồn tại các số $a \geq 0, \ y \geq x \geq 1$ sao cho $a + x, \ a + y, \ a + x + y$ thuộc cùng một tập con $D_k, \ k = 1, \ 2, \ \ldots, \ r$ của M_2.

Từ đó, suy ra

$$h(r) > 2r - 1. \tag{2.15}$$

Từ (2.14) và (2.15), ta có $h(r) = 2r$. Đây là số nguyên nhỏ nhất $h(r)$ cần tìm.

Bài toán 2.2.8 ([5])**.** *Tìm số các phân hoạch tập hợp $\{1, \ 2, \ \ldots, \ n\}$ thành ba tập con $A_1, \ A_2, \ A_3$ (các tập này có thể là tập hợp rỗng) sao cho các điều kiện sau được thỏa mãn:*

1) Sau khi sắp xếp các phần tử của $A_1, \ A_2, \ A_3$ theo thứ tự tăng dần thì hai phần tử liên tiếp luôn có tính chẵn, lẻ khác nhau;

2) Nếu cả ba tập $A_1,\ A_2,\ A_3$ đều không rỗng thì có đúng một tập có số nhỏ nhất là số chẵn.

Giải. Ta có thể giả thiết thêm:

3) $1 \in A_1$ và số nhỏ nhất trong A_2 bé hơn số nhỏ nhất trong A_3.

Ta xây dựng các phân hoạch bằng cách xếp lần lượt các số $1,\ 2,\ \ldots,\ n$ vào $A_1,\ A_2,\ A_3$ theo các điều kiện 1), 2) và 3).

Ta có: $1 \in A_1$, còn số 2 có hai khả năng: $2 \in A_1$ hoặc $2 \in A_2$ (do 3)).

Nếu A_2 và A_3 còn là tập hợp rỗng thì các số tiếp theo, do điều kiện 3), đều chỉ có hai cách xếp: vào A_1 hoặc A_2.

Sau khi phần tử đầu tiên của A_2 được xếp thì số tiếp theo chỉ có hai cách xếp: vào A_2 hoặc vào A_3 (vì số đó có cùng tính chẵn, lẻ với phần tử cuối của A_1 lúc đó). Khi A_3 còn là tập hợp rỗng thì do điều kiện 1), 2), các số tiếp theo cũng chỉ có hai cách xếp vào hai trong ba tập $A_1,\ A_2,\ A_3$.

Sau khi phần tử đầu tiên của A_3 được xếp, ta có thể chứng minh tiếp bằng phép quy nạp rằng mỗi số luôn có thể và chỉ có thể xếp vào hai trong ba tập $A_1,\ A_2,\ A_3$.

Thật vậy, giả sử đến một bước nào đó, số k có thể xếp vào một trong hai tập A_{i_1} và A_{i_2} và không thể xếp vào A_{i_3}, với $(i_1,\ i_2,\ i_3)$ là một hoán vị nào đó của $(1,\ 2,\ 3)$, nghĩa là k khác tính chẵn, lẻ với hai số cuối của A_{i_1} và A_{i_2} lúc đó, và cùng tính chẵn, lẻ với số cuối của A_{i_3} lúc đó. Giả sử ta xếp k vào A_{i_1} thì ở bước tiếp theo, số $k+1$ chỉ có thể xếp vào A_{i_1} hoặc A_{i_3} (do điều kiện 1)). Nghĩa là cũng có đúng hai khả năng sắp xếp đối với $k+1$.

Tóm lại, với mỗi số trong tập $\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$, trừ số 1, đều cho ta hai khả năng sắp xếp.

Vậy có 2^{n-1} phân hoạch tập $\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ vào ba tập $A_1,\ A_2,\ A_3$ theo yêu cầu của bài toán.

Bài toán 2.2.9 ([7]). *Một đơn vị kiểm lâm muốn lập lịch đi tuần tra rừng cho cả năm* 2006 *với các yêu cầu i) và ii) sau:*

i) Số ngày đi tuần tra trong năm nhiều hơn một nửa tổng số ngày của năm;

ii) Không có hai ngày đi tuần tra nào cách nhau đúng một tuần lễ.

1) Chứng minh rằng có thể lập được lịch đi tuần tra rừng thỏa mãn các yêu cầu nêu trên, biết rằng năm 2006 *có* 365 *ngày.*

2) Hỏi có thể lập được tất cả bao nhiêu lịch đi tuần tra rừng như vậy?

Giải.

1) Đánh số ngày của năm 2006 bởi $1,\ 2,\ \ldots,\ 365$. Xét lịch tuần tra sau: tuần tra vào những ngày m mà $m \equiv 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6 \pmod{14}$. Tổng số những ngày này là 183. Con số này vượt quá nửa tổng số ngày của năm 2006, nên phương án tuần tra đó đáp ứng các yêu cầu của bài toán.

2) Kí hiệu $A_i = \{m \leq 365 \mid m \equiv i \pmod 7\}$. Ta có $|A_1| = 53$, $|A_i| = 52$, với mọi $i \neq 1$. Như vậy, số ngày tuần tra trong A_1 không quá 27, số ngày tuần tra trong A_i còn lại không quá 26, và tổng số ngày tuần tra không vượt quá $6.26 + 27 = 183$. Vậy mỗi lịch tuần tra thỏa mãn yêu cầu đề bài phải có 183 ngày.

Bây giờ ta xác định số các tập hợp 183 ngày thỏa mãn yêu cầu đề bài. Số cách chọn các ngày trong A_1 được xác định duy nhất (chỉ gồm các ngày có dạng $14k + 1$). Và với mỗi $i \neq 1$ có đúng 27 cách chọn 26 ngày trong A_i không thuộc vào hai tuần liên tiếp nhau, đặc trưng bởi dãy $\underbrace{(0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ 1,\ \ldots,\ 1)}_{26 \text{ số}}$ (trong đó tại vị trí 0 là các ngày có dạng $14k + i$ và tại vị trí 1 là các ngày có dạng $14k + 7 + i$). Như vậy, có thể lập được tất cả 27^6 lịch tuần tra khác nhau thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Bài toán 2.2.10 ([7]). *Xét tập hợp số S có* 2006 *phần tử. Ta gọi một tập con T của S là tập con "bướng bỉnh" nếu với hai số u, v tùy ý (có thể $u = v$) thuộc T luôn có $u + v$ không thuộc T. Chứng minh rằng:*

1) Nếu S là tập hợp gồm 2006 *số nguyên dương đầu tiên thì mỗi tập con "bướng bỉnh" của S đều có không quá* 1003 *phần tử.*

2) Nếu S là tập hợp gồm 2006 *số nguyên dương tùy ý thì tồn tại một tập con "bướng bỉnh" của S có* 669 *phần tử.*

Giải.

1) Xét A là tập con "bướng bỉnh" gồm x phần tử $a_1 < a_2 < \cdots < a_x$ của $S = \{1,\ 2,\ \ldots,\ 2006\}$.

Khi đó, $B = \{a_2 - a_1,\ a_3 - a_1,\ \ldots,\ a_x - a_1\}$ là một tập con gồm $x - 1$ phần tử của S.

Do A là tập con "bướng bỉnh" cho nên $A \cap B = \varnothing$.

Suy ra, $x + (x - 1) \le 2006$ hay $x \le 1003$.

2) Giả sử tập hợp đã cho là $S = \{a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{2006}\}$.

Gọi P là tích của tất cả các ước số lẻ của $\prod\limits_{i=1}^{2006} a_i$. Nhận thấy, tồn tại số nguyên tố p có dạng $p = 3r + 2$ (với r là số nguyên dương) là ước của $3P + 2$. Số nguyên tố p này nguyên tố cùng nhau với tất cả các số a_i $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ 2006)$ đã cho.

Với mỗi số $a \in S$, dãy $a,\ 2a,\ \ldots,\ (p-1)a$ là một hoán vị của $1,\ 2,\ \ldots,\ p-1$ theo mod p.

Do đó, tồn tại tập hợp A_a gồm $r+1$ số nguyên $x \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ p-1\}$ để $x.a$ theo mod p thuộc $A = \{r+1,\ r+2,\ \ldots,\ 2r+1\}$. Với mỗi $x \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ p-1\}$, kí hiệu $S_x = \{a \in S \mid x.a \in A\}$, ta có

$$|S_1| + |S_2| + \cdots + |S_{p-1}| = \sum_{a \in S} |A_a| = 2006.(r+1).$$

Do đó, tồn tại $x_0 \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ p-1\}$ sao cho

$$|S_{x_0}| \ge \frac{2006.(r+1)}{3r+1} > 668.$$

Chọn B là tập con gồm 669 phần tử của S_{x_0}. Khi đó, B là một tập con "bướng bỉnh" của S.

Thật vậy, nếu chọn $u,\ v,\ w \in B$ (u có thể bằng v) thì

$$x_0u,\ x_0v,\ x_0w \in A.$$

Kiểm tra, ta thấy $x_0u + x_0v \not\equiv x_0w \pmod{p}$ nên $u + v \ne w$.

Bài toán 2.2.11 ([3]). *Cho số nguyên $n \ge 2$. Gọi S là tập hợp gồm n phần tử và A_i, với $1 \le i \le m$, là các tập con khác nhau và gồm ít nhất hai phần tử của S sao cho từ*

$$A_i \cap A_j \ne \varnothing,\ A_i \cap A_k \ne \varnothing,\ A_j \cap A_k \ne \varnothing$$

ta suy ra được $A_i \cap A_j \cap A_k \ne \varnothing$.

Chứng minh rằng $m \le 2^{n-1} - 1$.

Giải. Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp theo n. Hiển nhiên phát biểu ở đề bài đúng khi $n = 2$.

Giả sử $n > 2$ và phát biểu đúng với mọi số nguyên bé hơn n. Ta xét hai trường hợp.

Trường hợp 1: Không tồn tại i và j nào để $A_i \cup A_j = S$ và $|A_i \cap A_j| = 1$.

Gọi x là phần tử tùy ý thuộc S. Số tất cả các tập A_i không chứa x lớn nhất bằng $2^{n-2} - 1$ theo giả thiết quy nạp. Số các tập con chứa x của S là 2^{n-1}. Nếu $x \in A_i$ thì sẽ không có j nào để cho $A_j = (S \setminus A_i) \cup \{x\}$, bằng không thì phải có $|A_i \cap A_j| = 1$. Do vậy, quá lắm là một nửa các tập con chứa x của S xuất hiện dưới dạng các tập A_i. Như thế, số lớn nhất các tập A_i là

$$2^{n-2} - 1 + 2^{n-2} = 2^{n-1} - 1.$$

Trường hợp 2: Tồn tại một phần tử $x \in S$ sao cho

$$A_1 \cup A_2 = S \text{ và } A_1 \cap A_2 = \{x\}.$$

Đặt $|A_1| = r + 1$ và $|A_2| = s + 1$. Khi đó $r + s = n - 1$.

Theo giả thiết quy nạp, số lớn nhất cả các tập A_i sao cho $A_i \subseteq A_1$ là $2^r - 1$. Tương tự, số lớn nhất cả các tập A_i sao cho $A_i \subseteq A_2$ là $2^s - 1$.

Nếu A_i không phải là tập con của A_1 và A_2 thì

$$A_1 \cap A_i \neq \varnothing,\ A_2 \cap A_i \neq \varnothing.$$

Vì $A_1 \cap A_2 \neq \varnothing$ nên ta có $A_1 \cap A_2 \cap A_i \neq \varnothing$. Như vậy, ta có

$$A_1 \cap A_2 \cap A_i = \{x\}.$$

Do đó, $A_i = \{x\} \cup (A_i \setminus A_1) \cup (A_i \setminus A_2)$, ngoài ra, do các tập khác rỗng $A_i \setminus A_1$ và $A_i \setminus A_2$ có thể được chọn tương ứng theo $2^s - 1$ và $2^r - 1$ cách, nên số lớn nhất các tập này là

$$(2^s - 1)(2^r - 1).$$

Cộng thêm các kết quả riêng này vào, ta nhận được số lớn nhất các tập A_i là $2^{n-1} - 1$.

Bài toán 2.2.12 ([3]). *a) Chứng minh tập $\mathbb{Q}^+$ các số hữu tỉ dương có thể phân hoạch được thành ba tập A, B, C rời nhau thỏa mãn:*

$$BA = B,\ B^2 = C,\ BC = A$$

trong đó $HK = \{hk \mid h \in H,\ k \in K\}$ và $B^2 = BB$.

b) Chứng minh tất cả các lập phương của các số hữu tỉ dương đều thuộc A theo phân hoạch trên.

c) Tìm các phân hoạch $\mathbb{Q}^+ = A \cup B \cup C$ như vậy mà không có số nguyên dương n nào mà $n \leq 34$, với n và $n+1$ thuộc A, nghĩa là:

$$min\{n \in \mathbb{N}^* \mid n \in A,\ n+1 \in A\} > 34.$$

Giải.

a) Một phân hoạch của $\mathbb{Q}^+$ có tính chất đã nêu có thể tìm được như sau: Đặt số 1 trong A và phân phối các số nguyên tố một cách bất kì trong A, B, C. Xét số hữu tỉ bất kì

$$x = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}.q_1^{\beta_1}.q_2^{\beta_2}\dots q_h^{\beta_h}.r_1^{\gamma_1}.r_2^{\gamma_2}\dots r_m^{\gamma_m},$$

trong đó các số p_i $(i = \overline{1,k})$, q_j $(j = \overline{1,h})$, r_s $(s = \overline{1,m})$ là những số nguyên tố phân biệt, các số p_i $(i = \overline{1,k})$ ở trong A, các số q_j $(j = \overline{1,h})$ ở trong B và các số r_s $(s = \overline{1,m})$ ở trong C, còn các số α_i $(i = \overline{1,k})$, β_j $(j = \overline{1,h})$, γ_s $(s = \overline{1,m})$ là những số nguyên (dương hoặc âm). Khi đó, x thuộc A, B, hay C tùy theo

$$(\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_h) + 2(\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_m)$$

đồng dư với $0 \pmod 3$, $1 \pmod 3$, hay $2 \pmod 3$.

Ta có $\mathbb{Q}^+ = A \cup B \cup C$ là phân hoạch cần tìm.

b) Trước hết, ta chứng minh rằng: $AC = C,\ C^2 = B,\ A^2 = A$.

Thật vậy, điều này xảy ra vì

$$\begin{aligned} AC &= AB^2 = (AB)B = BB = C,\\ C^2 &= CC = B^2C = B(BC) = BA = B,\\ A^2 &= AA = A(BC) = (AB)C = BC = A. \end{aligned}$$

Nếu x là số hữu tỉ dương, ta có:

(i) Nếu $x \in A$ thì $x^2 \in A^2 = A$ và vì thế $x^3 = x.x^2 \in AA = A$.

(ii) Nếu $x \in B$ thì $x^2 \in B^2 = C$, vậy $x^3 = x.x^2 \in BC = A$.

(iii) Nếu $x \in C$ thì $x^2 \in C^2 = B$, vậy $x^3 = x.x^2 \in CB = A$.

Vậy mọi lập phương của các số hữu tỉ dương đều thuộc A.

c)

(1) Từ b), suy ra $1,\ 8,\ 27 \in A$.

(2) Rõ ràng nếu điều kiện đã cho được thỏa mãn thì $2 \notin A$. Do đó, $2 \in B$ hay $2 \in C$. Vì tính đối xứng của bài toán đối với B và C nên ta có thể giả thiết $2 \in B$. Khi đó $4 \in C,\ 16 \in B,\ 32 \in C$.

(3) Nếu $7 \in A$ thì do $8 \in A$, điều kiện đã cho không được thỏa mãn. Vậy $7 \in B$ hay $7 \in C$. Nếu $7 \in B$ thì vì $4 \in C$, ta có $28 \in A$. Nhưng $27 \in A$ nên điều đó dẫn đến vô lí. Do đó $7 \in C$, vậy $14 \in A$ vì $2 \in B$, từ đó $28 \in B$.

(4) Ta cũng có $13 \notin A$ vì $14 \in A$. Nếu $13 \in C$ thì $26 \in A$ và $2 \in B$. Nhưng $27 \in A$ nên cũng đưa đến mâu thuẫn. Vậy $13 \in B$, suy ra $26 \in C$ do $2 \in B$.

(5) Vì 15 không thể ở trong A do $14 \in A$, ta phải có các khả năng sau:

(*) $3 \in B,\ 5 \in C$,

(**) $5 \in B,\ 3 \in C$,

(***) $3 \notin A$ (vì $3 \in A \Rightarrow 9 \in A$, vô lí vì $8 \in A$),

(****) Nếu $3 \in B,\ 5 \in B$ thì $21 \in A$ (vì $7 \in C$) và $20 \in A$ (vì $4 \in C$): vô lí, vậy $3 \in C$. Do đó $9 \in B,\ 6 \in A$ (vì $2 \in B$), $12 \in B$ (vì $4 \in C$), $18 \in C$ (vì $6 \in A$), $24 \in C$ (vì $8 \in A$), $21 \in B$ (vì $7 \in C$). Trong trường hợp này $5 \notin B$.

Do đó $5 \in C$, suy ra

$$\begin{aligned}
&15 \in B,\ 10 \in A \text{ (vì } 2 \in B),\ 20 \in B \text{ (vì } 4 \in C),\\
&25 \in B,\ 30 \in C \text{ (vì } 6 \in A),\ 35 \in B \text{ (vì } 7 \in C).
\end{aligned}$$

(6) Dễ dàng phân phối các số còn lại (tất cả đều nhỏ hơn hoặc bằng 34) là $11,\ 17,\ 19,\ 22,\ 23,\ 29,\ 31,\ 33,\ 34$ vào $A,\ B,\ C$. Vì $10 \in A$ nên rõ ràng 11 không ở trong A. Để tránh $33 \in A,\ 34 \in A$ ta đồng thời nên tránh $11 \in B$ và $17 \in C$. Do vậy ta cho $11 \in B,\ 17 \in B$, từ đó

$22 \in C$ (vì $2 \in B$), $33 \in A$ (vì $3 \in C$), $34 \in C$ (vì $2 \in B$). Bốn số còn lại là 19, 23, 29, 31 (đều là số nguyên tố) có thể phân phối tùy ý trong A, B, C. Chẳng hạn tất cả chúng đều ở trong A, cho ta:

$$A = \{1, 6, 8, 10, 14, 19, 23, 27, 29, 31, 33, \ldots\},$$
$$B = \{2, 9, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 20, 21, 25, 28, 35, \ldots\},$$
$$C = \{3, 4, 5, 7, 18, 22, 24, 26, 30, 32, 34, \ldots\}.$$

Ta thấy rằng không có hai số nguyên liên tiếp nào nhỏ hơn hoặc bằng 34 ở trong A. Vậy ta có phân hoạch cần tìm nếu ta phân phối các số nguyên tố lớn hơn hoặc bằng 37 và được A, B, C (như ở a)).

Bài toán 2.2.13 ([3])**.** *Chứng minh rằng tập hợp* $\{1, 2, 3, \ldots, 1989\}$ *có thể được viết thành hợp của các tập hợp con rời nhau* $A_1, A_2, \ldots, A_{117}$ *sao cho mọi* A_i, $i = 1, 2, \ldots, 117$, *đều có chứa* 17 *phần tử và tổng giá trị các phần tử của những* A_i *đó đều bằng nhau.*

Giải. Trước hết, ta xây dựng 117 tập hợp gồm 3 số sao cho tổng của 3 số đó trong mỗi tập hợp đều bằng 0 và chúng rời nhau từng đôi một như sau:

Từ tập hợp $\{1, 2, 3, \ldots 1989\}$, ta tạo thành tập gồm 1989 số:

$$M = \{-994, -993, \ldots, 993, 994\},$$

tập hợp này có được bằng cách lấy từng phần tử của tập hợp đã cho trừ đi 995. Khi đó, ta tạo 116 tập hợp gồm 3 số nói trên là:

$$\begin{aligned}
N_1 &= \{993, -496, -497\},\\
N_2 &= \{-993, 496, 497\},\\
N_{2k+1} &= \{993 - 4k, 2k - 496, 2k - 497\},\\
N_{2k+2} &= \{-993 + 4k, -2k + 496, -2k + 497\},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
N_{115} &= \{765, -382, -383\},\\
N_{116} &= \{-765, 382, 383\}.
\end{aligned}$$

Ngoài ra, ta đặt $N_{117} = \{-1, 0, 1\}$. Tất cả 117 tập hợp trên đều rời nhau từng đôi một. Thật vậy, trong mỗi tập N_i ($i = 1, 2, \ldots, 116$), do các phần tử thứ hai đều chẵn nên các phần tử thứ hai của các tập hợp $N_1, N_2, \ldots, N_{116}$ không thể trùng với các phần tử thứ nhất hoặc thứ ba của những tập hợp này, tất cả các phần tử thứ nhất của những tập hợp này có giá trị tuyệt đối lớn hơn phần tử thứ ba, thành thử các tập hợp N_i rời nhau từng đôi một (với mọi $i = 1, 2, \ldots, 116$). Do đó, các tập hợp $N_1, N_2, \ldots, N_{116}, N_{117}$ rời nhau từng đôi một. Ngoài ra, nếu số x nào đó là phần tử của một trong các tập hợp N_i ($i \in \{1, 2, \ldots, 117\}$) thì số $(-x)$ cũng là phần tử của một trong các tập hợp N_i ($i \in \{1, 2, \ldots, 117\}$) đó.

Để ý rằng $14.117 = 1638$ phần tử còn lại của tập hợp M, không thuộc về một trong các tập hợp N_i (với mọi $i = 1, 2, \ldots, 117$) ở trên, được chia thành $7.117 = 819$ cặp số với dấu đối nhau. Bằng cách tùy ý ta thêm 7 cặp số phân biệt vào các tập hợp N_i ($i = 1, 2, \ldots, 117$) đã chọn ở trên, ta sẽ chia được tập hợp M thành 117 tập hợp con từng cặp không giao nhau. Cuối cùng để thỏa mãn yêu cầu của bài toán, ta chỉ cần xây dựng 117 tập A_i ($i = 1, 2, \ldots, 117$) bằng cách cộng 995 vào từng phần tử của các tập N_i (với mọi $i = 1, 2, \ldots, 117$) tương ứng.

Chú ý 2.2.2. *Ta có bài toán tổng quát sau:*

Bài toán tổng quát 2.2.1. *Chứng minh rằng tập hợp* $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ *có thể được viết thành hợp của các tập hợp rời nhau* $A_1, A_2, \ldots, A_m$, *với* m *là ước số của* n, *sao cho mọi* A_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, *đều có chứa* $\dfrac{n}{m}$ *phần tử và tổng giá trị các phần tử của những* A_i *đó đều bằng nhau.*

Bài toán 2.2.14 ([4])**.** *Với số tự nhiên tùy ý* $n > 3$ *cho* $k = \left[\dfrac{1}{6}n(n+1)\right]$ *và tập* X_n *gồm* $\dfrac{n(n+1)}{2}$ *phần tử, trong đó có* k *phần tử màu xanh,* k *phần tử màu đỏ, các phần tử còn lại đều màu trắng. Chứng minh rằng có thể chia tập* X_n *thành* n *tập con từng cặp không giao nhau* $A_1, A_2, \ldots, A_n$, *sao cho với số* m *tùy ý* ($1 \le m \le n$) *tập con* A_m *gồm đúng* m *phần tử và các phần tử đều cùng màu.*

Giải. Bài toán được chứng minh bằng quy nạp theo $n > 3$.

1) Cơ sở quy nạp. Với $n = 4, 5, 6, 7, 8, 9$ chia X_i ($4 \le i \le 9$) được chỉ dẫn như sau:
- Với $n = 4$, ta có: $\dfrac{n(n+1)}{2} = 10$, $k = \left[\dfrac{1}{6}n(n+1)\right] = 3$ và

+ Số phần tử màu xanh là 1 và 2, các nhóm màu xanh tương ứng là A_1 và A_2;

+ Số phần tử màu đỏ là 3, nhóm màu đỏ là A_3;

+ Số phần tử màu trắng là 4, nhóm màu trắng là A_4.

- Với $n = 5$, ta có: $\dfrac{n(n+1)}{2} = 15,\ k = \left[\dfrac{1}{6}n(n+1)\right] = 5$ và

+ Số phần tử màu xanh là 1 và 4, các nhóm màu xanh tương ứng là A_1 và A_4;

+ Số phần tử màu đỏ là 2 và 3, các nhóm màu đỏ tương ứng là A_2 và A_3;

+ Số phần tử màu trắng là 5, nhóm màu trắng là A_5.

- Với $n = 6$, ta có: $\dfrac{n(n+1)}{2} = 21,\ k = \left[\dfrac{1}{6}n(n+1)\right] = 7$ và

+ Số phần tử màu xanh là 1 và 6, các nhóm màu xanh tương ứng là A_1 và A_6;

+ Số phần tử màu đỏ là 2 và 5, các nhóm màu đỏ tương ứng là A_2 và A_5;

+ Số phần tử màu trắng là 3 và 4, các nhóm màu trắng tương ứng là A_3 và A_4.

- Với $n = 7$, ta có: $\dfrac{n(n+1)}{2} = 28,\ k = \left[\dfrac{1}{6}n(n+1)\right] = 9$ và

+ Số phần tử màu xanh là 4 và 5, các nhóm màu xanh tương ứng là A_4 và A_5;

+ Số phần tử màu đỏ là 3 và 6, các nhóm màu đỏ tương ứng là A_3 và A_6;

+ Số phần tử màu trắng là 1, 2 và 7, các nhóm màu trắng tương ứng là A_1, A_2 và A_7.

- Với $n = 8$, ta có: $\dfrac{n(n+1)}{2} = 36,\ k = \left[\dfrac{1}{6}n(n+1)\right] = 12$ và

+ Số phần tử màu xanh là 5 và 7, các nhóm màu xanh tương ứng là A_5 và A_7;

+ Số phần tử màu đỏ là 4 và 8, các nhóm màu đỏ tương ứng là A_4 và A_8;

+ Số phần tử màu trắng là 1, 2, 3 và 6, các nhóm màu trắng tương ứng là A_1, A_2, A_3 và A_6.

- Với $n = 9$, ta có: $\dfrac{n(n+1)}{2} = 45,\ k = \left[\dfrac{1}{6}n(n+1)\right] = 15$ và

+ Số phần tử màu xanh là 6 và 9, các nhóm màu xanh tương ứng là A_6 và A_9;

+ Số phần tử màu đỏ là 7 và 8, các nhóm màu đỏ tương ứng là A_7 và A_8;

+ Số phần tử màu trắng là 1, 2, 3, 4 và 5, các nhóm màu trắng tương ứng là A_1, A_2, A_3, A_4 và A_5.

2) Quy nạp. Giả sử $n \geq 10$ và đối với các số nhỏ hơn n, cụ thể là đối với $n - 6$ khẳng định đã được chứng minh. Khi đó theo giả thiết quy nạp, tập con $X_{n-6} \subset X_n$ gồm $\dfrac{(n-6)(n-5)}{2}$ phần tử, trong đó có $k_1 = \left[\dfrac{(n-6)(n-5)}{6}\right]$ phần tử màu xanh, $k_1 = \left[\dfrac{(n-6)(n-5)}{6}\right]$ phần tử màu đỏ, còn lại là màu trắng đã được chia thành $n - 6$ tập con

$$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_{n-6},$$

mà mỗi tập con đều gồm các phần tử cùng màu và số phần tử của mỗi tập con đều bằng chỉ số tương ứng của những tập con này.

Trong tập X_n có $k = \left[\dfrac{n(n+1)}{6}\right]$ phần tử màu xanh và $k = \left[\dfrac{n(n+1)}{6}\right]$ phần tử màu đỏ. Do

$$\begin{aligned} k - k_1 &= \left[\frac{n(n+1)}{6}\right] - \left[\frac{(n-6)(n-5)}{6}\right] \\ &\geq \frac{n(n+1)}{6} - \frac{(n-6)(n-5)}{6} \\ &= 2n - 5 \end{aligned}$$

hoặc

$$\begin{aligned} k - k_1 &= \left[\frac{n(n+1)}{6}\right] - \left[\frac{(n-6)(n-5)}{6}\right] \\ &\leq \frac{n(n+1)}{6} - \frac{(n-6)(n-5)}{6} \\ &= 2n - 5 \end{aligned}$$

nên $k - k_1 = 2n - 5$. Từ đó suy ra số lượng phần tử của X_n màu xanh và màu đỏ nằm ngoài X_{n-6} đều bằng $2n - 5$.

Do $|X_n|-|X_{n-6}| = \dfrac{n(n+1)}{2} - \dfrac{(n-6)(n-5)}{2} = 6n-15$, nên số lượng phần tử màu trắng của X_n nằm ngoài X_{n-6} là $6n-15-2(2n-5) = 2n-5$.

Khi đó, ta xác định các tập con $A_{n-5},\ A_{n-4},\ A_{n-3},\ A_{n-2},\ A_{n-1},\ A_n$ như sau: $A_{n-5},\ A_n$ gồm các phần tử màu xanh; $A_{n-3},\ A_{n-2}$ gồm các phần tử màu đỏ; $A_{n-4},\ A_{n-1}$ gồm các phần tử màu trắng.

Như vậy, ta đã chia được X_n thành n tập $A_1,\ A_2,\ \dots,\ A_n$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài toán 2.2.15 ([4]). *Đối với mỗi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$, hãy tìm số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ lớn nhất thỏa mãn điều kiện: trong tập gồm n phần tử có thể chọn ra được k tập con khác nhau, mà hai tập bất kì trong các tập con này đều có giao khác rỗng.*

Giải. Giả sử $X = \{a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n\}$.

1) Chứng minh $k \geq 2^{n-1}$. Ta cố định phần tử a_1 và chỉ xét các tập con $A_1,\ A_2,\ \dots,\ A_k$ có chứa a_1. Khi đó, số tập con này bằng đúng số tập con của tập $\{a_2,\ a_3,\ \dots,\ a_n\}$ mà $\forall i,\ j\ (1 \leq i,\ j \leq k)$ đều có $a_1 \in A_i \cap A_j$, nên $k \geq 2^{n-1}$.

2) Chứng minh $k \leq 2^{n-1}$. Giả sử chọn được $k > 2^{n-1}$ tập con của tập X, mà giao của hai tập bất kì trong các tập được chọn ra đều khác rỗng.

Chia tất cả 2^n tập con của tập X thành 2^{n-1} cặp sao cho trong mỗi cặp đều gồm tập con và phần bù của nó. Vì số tập con chọn ra lớn hơn 2^{n-1} nên theo Nguyên lí Dirichlet, phải có ít nhất hai tập con đã chọn ra lập thành một cặp. Do đó giao của hai tập này bằng rỗng. Vậy ta đi tới mâu thuẫn với tính chất của các tập đã chọn ra nên $k \leq 2^{n-1}$.

Vậy số tự nhiên k lớn nhất thỏa mãn điều kiện bài toán là $k = 2^{n-1}$.

Bài toán 2.2.16 ([6]). *Cho p là một số nguyên tố lẻ. Tìm số các tập con A của tập hợp $\{1,\ 2,\ \dots,\ 2p\}$, biết rằng:*

i) A chứa đúng p phần tử;

ii) Tổng tất cả các phần tử của A chia hết cho p.

Giải.

Cách 1. Với mỗi $i = 1,\ \dots,\ p$, đặt $A_i = \{(a_1,\ \dots,\ a_p)$ không có thứ tự với $a_i \in \{1, \ldots, 2p\}$, $a_1 + \cdots + a_p$ chia hết cho p và trong bộ $(a_1, \ldots, a_p)$ có đúng một số xuất hiện i lần, các số còn lại xuất hiện đúng một lần$\}$.

Khi đó, A_1 chính là tập con A của $\{1, \ldots, 2p\}$ thỏa mãn

i) A chứa đúng p phần tử;

ii) tổng tất cả các phần tử của A chia hết cho p.

Kí hiệu:

$\overline{A_i}$ là tập hợp nhận được từ A_i bằng cách trong mỗi bộ $(a_1, \ldots, a_p)$ ta loại i số giống nhau, $i = 1, \ldots, p$.

$\overline{\overline{A_i}}$ là tập hợp nhận được từ A_i bằng cách trong mỗi bộ $(a_1, \ldots, a_p)$ ta loại $i - 1$ số giống nhau, $i = 2, \ldots, p$.

Khi đó

$$\begin{cases} |A_i| + |A_{i+1}| = 2C_{2p}^{p-i}, & i = 2, \ldots, p-1; \\ p|A_1| + |A_2| = 2C_{2p}^{p-i}, & i = 1. \end{cases} \tag{2.16}$$

Thật vậy, xét các bộ (không thứ tự) $(b_1, \ldots, b_{p-i})$, $b_i \neq b_j$, với $i \neq j$. Đặt $S = b_1 + \cdots + b_{p-i}$. Khi đó tồn tại duy nhất r thỏa mãn $0 \leq r < p$ sao cho $s + ir \equiv 0 \pmod p$. Do vậy, nếu thêm vào bộ $(b_1, \ldots, b_{p-i})$ i số r hoặc i số $p + r$ thì ta sẽ được một bộ gồm p số mà

1) mỗi số đều thuộc $\{1, 2, \ldots, 2p\}$;

2) tổng của p số chia hết cho p;

3) có đúng một số xuất hiện i lần hoặc $i + 1$ lần, phụ thuộc vào việc tồn tại hay không tồn tại $j \in \{1, \ldots, p - i\}$ để $b_j = r$ hay $b_j = p + r$, các số khác chỉ xuất hiện đúng một lần. Sau phép toán f như vậy thì các bộ đều sẽ thuộc $A_i \cup A_{i+1}$.

Bây giờ ta tính số lặp của các bộ sau phép toán f:

1') Với $i = 1$ thì mỗi bộ thuộc A_1 được lặp p lần, các bộ thuộc A_2 chỉ lặp 1 lần;

2') Với $i \in \{2, \ldots, p - 1\}$ thì các bộ đều lặp đúng một lần.

Vì vậy, số bộ sinh ra nhờ f không vượt quá tổng số các phần tử của nó nhân với số lặp

$$\begin{cases} 2C_{2p}^{p-i} \le p|A_1| + |A_2|, & i = 1; \\ 2C_{2p}^{p-i} \le |A_i| + |A_{i+1}|, & i = 2, \dots, p-1. \end{cases} \tag{2.17}$$

Hơn nữa, các phần tử của $\overline{A_i}$ và $\overline{\overline{A_{i+1}}}$ đều gồm $p-i$ số đôi một khác nhau nên mỗi bộ số xuất hiện trong $\overline{A_i}$ và trong $\overline{\overline{A_{i+1}}}$ không quá 2 lần. Vậy

$$\left|\overline{A_i}\right| + \left|\overline{\overline{A_{i+1}}}\right| \le 2C_{2p}^{p-1}.$$

Vì

$$\left|\overline{A_i}\right| = \begin{cases} p|A_1|, & i = 1; \\ |A_i|, & i = 2, \dots, p \end{cases}$$

và $\left|\overline{\overline{A_{i+1}}}\right| = |A_i|,\ i = 1, \dots, p-1$ nên

$$\begin{cases} 2C_{2p}^{p-i} \ge p|A_1| + |A_2|, & i = 1; \\ 2C_{2p}^{p-i} \ge |A_i| + |A_{i+1}|, & i = 2, \dots, p-1. \end{cases} \tag{2.18}$$

Từ (2.17) và (2.18) cho ta (2.16). Vậy

$$(p|A_1|+|A_2|)-(|A_2|+|A_3|)+\cdots+(-1)^p(|A_{p-1}|+|A_p|) = \sum_{i=1}^{p-1}(-1)^{i+1}2C_{2p}^{p-i}.$$

Do p lẻ nên

$$p|A_1| - |A_p| = \sum_{i=1}^{p-1}(-1)^{i+1}2C_{2p}^{p-i}.$$

Do $|A_p| = 2p$ nên số tập con cần tính bằng

$$|A_1| = \frac{1}{p}\left(2p + \sum_{i=1}^{p-1}(-1)^{i+1}2C_{2p}^{p-i}\right).$$

Để ý rằng

$$2\sum_{i=1}^{p-1}(-1)^{i+1}C_{2p}^{p-i} = C_{2p}^{p} - 2.$$

Do đó, số tập con cần tính bằng

$$|A_1| = \frac{1}{p}\Big(2p + C_{2p}^{p} - 2\Big) = 2 + \frac{C_{2p}^{p} - 2}{p}.$$

Cách 2. Kí hiệu $S(A)$ là tổng các phần tử của A, $\overline{x}$ là dư khi chia x cho p $(0 \leq \overline{x} \leq p-1)$ và $H = \{A \subset \{1,\ 2,\ \ldots,\ 2p\}\ :\ |A| = p\}$.

Xét hai tập hợp $B = \{1,\ 2,\ \ldots,\ p\}$ và $C = \{p+1,\ p+2,\ \ldots,\ 2p\}$.

Ta có $S(B) \equiv S(C) \equiv 0 \pmod p$.

Bỏ tập B và C khỏi H, ta phân các tập còn lại của H thành các lớp theo quy tắc sau:

Hai tập A và A' thuộc về cùng một lớp nếu:

i) $A \cap C = A' \cap C$;

ii) Tồn tại m, với $1 \leq m \leq p-1$ sao cho: với mọi $x \in A$, $\exists x' \in A'$ để $x + m \equiv x' \pmod p$.

Ta thấy rằng nếu A và A' cùng ở một lớp thì $S(A) \not\equiv S(A') \pmod p$.

Thật vậy, nếu trái lại thì

$$\sum_{x' \in A \cap B} x' \equiv \sum_{x \in A \cap B} x \equiv \sum_{x \in A \cap B} (x + m) \pmod p.$$

Suy ra $m|A \cap B| \ \vdots\ p$. Mâu thuẫn.

Thành thử mỗi lớp chứa không quá p tập hợp. Mặt khác, với mỗi tập A, các tập $A_m = (A \cap C) \cup \{\overline{x+m}\}_{x \in A \cap B}$ $(m = 1,\ 2,\ \ldots,\ p-1)$ rõ ràng là cùng lớp với A.

Vậy mỗi lớp chứa đúng p tập hợp và trong mỗi lớp chỉ có đúng một tập A mà $S(A) \ \vdots\ p$. Từ đó, suy ra số tập hợp A cần tìm là

$$2 + \frac{C_{2p}^{p} - 2}{p}.$$

Bài toán tổng quát 2.2.2. *Cho p là một số nguyên tố lẻ và số nguyên dương $t < p$. Tìm số các tập con D của tập hợp $Y = \{1,\ 2,\ \ldots,\ p\}$ có tính chất sau:*

i) D chứa đúng t phần tử;

ii) $S(D) \equiv r \pmod p$, với r là hằng số, $0 \le r < p$, $S(D)$ là tổng các phần tử của D.

Giải. Gọi $\mathcal{H}$ là tập hợp các tập con D của Y mà $|D| = t < p$. Với mỗi tập $D = \{d_1, d_2, \ldots, d_t\}$, lập ánh xạ $\varphi_m : D \longrightarrow D_m$, với $\varphi_m(d_i) = d_{m_i}$ như sau: $\varphi_m(d_i) \equiv d_i + m \pmod p$, với m là hằng số và $0 \le \varphi_m(d_i) \le p-1$. Lúc đó $D_m = \{d_{m_1}, \ldots, d_{m_t}\}$. Ta thấy $d_i \ne d_j \Leftrightarrow d_{m_i} \ne d_{m_j}$, với $i \ne j$ nên φ_m là song ánh và D_m gồm t phần tử phân biệt.

Nhận thấy quan hệ $D\varphi_m D_m$ giữa các tập gồm t phần tử trong $\mathcal{H}$ là quan hệ tương đương và $\mathcal{H}$ được phân hoạch thành các lớp rời nhau, mỗi lớp gồm p tập (do $m = 0, 1, \ldots, p-1$) và mỗi tập có đúng t phần tử.

Vì vậy số các lớp của $\mathcal{H}$ là $\dfrac{C_p^t}{p}$.

Tính tổng $S(D_m) \equiv S(D) + mt \pmod p$, ta thấy mt không chia hết cho số nguyên tố p nên $S(D_m)$ và $S(D)$ có số dư khác nhau khi chia cho p mà mỗi lớp có đúng p tập $(m = 0, 1, \ldots, p-1)$ nên trong mỗi lớp phải tồn tại đúng một tập có tổng các phần tử của nó khi chia cho p có số dư là r.

Với mỗi r mà $0 \le r \le p-1$, gọi s_r là số các tập D của $\mathcal{H}$ mà $S(D) \equiv r \pmod p$ ta kết luận được $s_0 = s_1 = \ldots = s_{p-1} = \dfrac{C_p^t}{p}$.

Bài toán tổng quát 2.2.3. *Cho p là một số nguyên tố lẻ, $n \in \mathbb{N}^*$ $(n > p)$. Tìm số các tập con A của tập hợp $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ có tính chất sau:*

i) A chứa đúng p phần tử;

ii) Tổng tất cả các phần tử của A chia hết cho p.

Giải.

Cách 1. Giả sử $n = kp + r$, với $0 \le r \le p-1$. Xét các tập con của $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ như sau: $B_1 = \{1, 2, \ldots, p\}$; $B_2 = \{p+1, p+2, \ldots, 2p\}$; $\ldots$; $B_k = \{(k-1)p+1, (k-1)p+2, \ldots, kp\}$; $C_1 = X = \{1, 2, \ldots, kp+r\}$; $C_2 = \{p+1, p+2, \ldots, kp+r\}$; $\ldots$; $C_k = \{(k-1)p+1, (k-1)p+2, \ldots, kp+r\}$; $C_{k+1} = \{kp+1, \ldots, kp+r\}$ (nếu $r = 0$ thì $C_{k+1} = \varnothing$).

Trong tập $\mathcal{E}$ các tập con A có đúng p phần tử của tập X, ta xác định một quan hệ T như sau: ATA' nếu thỏa mãn hai điều kiện:

1) nếu $A \cup A' \subseteq C_i$ với chỉ số i lớn nhất $(1 \leq i \leq k)$ thì

$$A \cap C_{i+1} = A' \cap C_{i+1};$$

2) tồn tại ánh xạ $f : A \cap B_i \longrightarrow A' \cap B_i$ (i lớn nhất như trên) thỏa mãn: với mọi $x \in A \cap B_i$ thì $f(x) \equiv x + m \pmod p$, trong đó m là hằng số, $0 \leq m \leq p - 1;\ 1 \leq f(x) \leq p$.

Ta chứng minh được quan hệ T là quan hệ tương đương trong tập $\mathcal{E}$ và $\mathcal{E}$ được phân hoạch thành lớp các tập con có đúng p phần tử. Trong phân hoạch này có k lớp gồm đúng 1 tập con là $\{B_1\},\ \{B_2\},\ \ldots,\ \{B_k\}$. Xét lớp có ít nhất hai tập hợp là A và A' với chỉ số i lớn nhất nào đó mà $A \cup A' \subseteq C_i$, lúc đó $A \cap C_{i+1} = E = A' \cap C_{i+1}$ và $A \cap B_i = D,\ A' \cap B_i = D'$. Khi đó $A = D \cup E;\ A' = D' \cup E$ với D và E rời nhau, D' và E rời nhau. Giả sử $|D| = |D'| = t = p - |E|$. Lúc đó, xét quan hệ T hạn chế trong các tập D gồm đúng t phần tử trong tập $\mathcal{H}$ các tập con D, ta áp dụng được kết quả của Bài toán tổng quát 2.2.2:

• Mỗi lớp các tập D của $\mathcal{H}$ chứa đúng p tập hợp, suy ra mỗi lớp các tập A của $\mathcal{E}$ cũng chứa đúng p tập hợp, do đó số các lớp như thế của $\mathcal{E}$ là $\dfrac{C_n^p - k}{p}$ (do có k lớp $\{B_i\}$).

• Nếu $S(E) \equiv p - r \pmod p$ và $S(D) \equiv r \pmod p$ thì $S(A) \equiv S(D) + S(E) \equiv 0 \pmod p$, nghĩa là trong mỗi lớp của tập A có đúng một tập hợp có tổng các phần tử chia hết cho p.

Tóm lại, số các tập con có đúng p phần tử và có tổng các phần tử chia hết cho p bằng $k + \dfrac{C_n^p - k}{p}$, trong đó $k = \left[\dfrac{n}{p}\right]$.

Dùng công cụ số phức, ta có cách giải 2 sau đây:

Cách 2. Xét đa thức:

$$P(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1. \tag{2.19}$$

Đa thức này có $p - 1$ nghiệm phức phân biệt. Gọi α là một nghiệm bất kì của $P(x)$. Chú ý rằng $\alpha,\ \alpha^2,\ \ldots,\ \alpha^{p-1}$ là $p - 1$ nghiệm phân biệt của $P(x)$ và $\alpha^p = 1$. Do đó

$$x^p - 1 = \prod_{i=1}^{p}(x - \alpha^i).$$

Xét đa thức $Q(x) = \prod\limits_{i=1}^{n}(x - \alpha^i)$ và gọi

$$H = \{A \subset \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}\ :\ |A| = p\}.$$

Giả sử

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i.$$

Nhận thấy

$$a_{n-p} = -\sum_{A \in H} \alpha^{S(A)},$$

trong đó $S(A)$ là tổng các phần tử của A.

Vì rằng nếu $S(A) \equiv i \pmod p$ thì $\alpha^{S(A)} = \alpha^i$ nên

$$a_{n-p} = -\sum_{i=0}^{p-1} n_i \alpha^i \tag{2.20}$$

Ở đó n_i là số các tập $A \in H$ mà $S(A) \equiv i \pmod p$. Mặt khác, giả sử $n = kp + r$ $(0 \leq r \leq p - 1)$.

Khi đó

$$Q(x) = \prod_{i=1}^{kp}(x - \alpha^i)\prod_{i=1}^{r}(x - \alpha^i) = (x^p - 1)^k \prod_{i=1}^{r}(x - \alpha^i). \tag{2.21}$$

Từ (2.21) rút ra được $a_{n-p} = -k$. Thành thử

$$\sum_{i=0}^{p-1} n_i \alpha^i = k. \tag{2.22}$$

Xét đa thức $R(x) = \sum\limits_{i=1}^{p-1} n_i x^i + n_0 - k$.

Từ (2.22) suy ra α là nghiệm của R. Vì deg$P$=deg$R$ và α là một nghiệm bất kì của P nên P và R chỉ sai khác nhau hằng số nhân. Vậy

$$n_{p-1} = n_{p-2} = \ldots = n_1 = n_0 - k.$$

Suy ra

$$n_0 - k = \frac{\sum\limits_{i=1}^{p-1} n_i + n_0 - k}{p} = \frac{C_n^p - k}{p}.$$

Vậy đáp số của bài toán là $n_0 = k + \dfrac{C_n^p - k}{p}$, trong đó $k = \left[\dfrac{n}{p}\right]$.

Nhận xét 2.2.1. *Bài toán 2.2.16 ở trên là một trường hợp riêng của Bài toán tổng quát 2.2.3 khi $n = 2p$.*

Một trong những phương pháp có hiệu quả để giải bài toán tổ hợp là thiết lập hệ thức truy hồi. Nội dung cơ bản của phương pháp này như sau: Thay vì ta đếm trực tiếp $f(n)$ theo yêu cầu của bài toán, ta sẽ thiết lập hệ thức quan hệ giữa $f(n)$, $f(n-1)$, $\ldots$ để từ đó tính được $f(n)$. Bên cạnh đó, ta sẽ thấy được sự hiệu quả khi kết hợp phương pháp này với phương pháp phân hoạch tập hợp trong việc giải các bài toán tổ hợp. Các bài toán sau sẽ minh họa cho phương pháp này.

Bài toán 2.2.17 ([4])**.** *Cho số nguyên $n \geq 2$. Hãy tìm số các hoán vị $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ của $1, 2, \ldots, n$ sao cho tồn tại duy nhất một chỉ số $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ thỏa mãn $a_i > a_{i+1}$.*

Giải. Gọi S_n là số các hoán vị thỏa mãn điều kiện của bài toán. Để ý rằng số các hoán vị mà $a_n = n$ là S_{n-1}. Còn số các hoán vị $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ với $a_i = n$ $(1 \leq i \leq n-1)$ là C_{n-1}^{i-1}. Do vậy:

$$S_n = S_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} C_{n-1}^{i-1} = S_{n-1} + 2^{n-1} - 1.$$

Chú ý rằng $S_2 = 1$, từ đó ta có: $S_n = 2^n - n - 1$.

Ở bài này, ta thiết lập hệ thức truy hồi xuất phát từ S_n đi đến S_{n-1}. Trong một số trường hợp, ta lại đi theo hướng ngược lại. Chẳng hạn bài toán sau:

Bài toán 2.2.18 ([4]). *Giả sử F_k là tập hợp tất cả các bộ (A_1, A_2, ..., A_k), trong đó A_i ($i = 1, 2, \ldots, k$) là một tập con của $\{1, 2, \ldots, n\}$ (các tập A_1, A_2, ..., A_k có thể bằng nhau). Hãy tính*

$$S_n = \sum_{(A_1,\, A_2,\, \ldots,\, A_k) \in F_k} |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k|.$$

Giải. Do có 2^n tập con của $\{1, 2, \ldots, n\}$ nên có 2^{nk} bộ $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$.

Với mỗi k-bộ $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ của tập $\{1, 2, \ldots, n-1\}$, ta có thể thêm hoặc không thêm n vào tập A_i để được k-bộ $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ của tập $\{1, 2, \ldots, n\}$. Với chú ý rằng số k-bộ $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ của tập $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ là $2^{(n-1)k}$ và có $2^k - 1$ cách thêm n vào k-bộ $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ của tập $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ thì ta có:

$$S_n = 2^k.S_{n-1} + (2^k - 1).2^{k(n-1)}.$$

Nhận thấy: $S_1 = 2^k - 1$. Từ đó bằng quy nạp, ta chứng minh được:

$$S_n = n.2^{k(n-1)}(2^k - 1).$$

Bài toán 2.2.19 ([4]). *Cho số nguyên dương n* và $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. *Tìm số các tập con (kể cả tập rỗng) của S mà không chứa hai số nguyên dương liên tiếp.*

Giải. Gọi a_n là số các tập con của S thỏa mãn điều kiện đề bài. Nhận thấy $a_1 = 2,\ a_2 = 3,\ a_3 = 5$. Chẳng hạn, với $n = 3$ có 5 tập con thỏa mãn là

$$\varnothing;\ \{1\};\ \{2\};\ \{3\};\ \{1; 3\}.$$

Gọi $\mathcal{A}_n$ là họ các tập con có tính chất đã nêu. Mỗi tập $A \in \mathcal{A}_{n+2}$ gồm hai loại:

+ Loại 1 gồm các tập chứa $n + 2$.

+ Loại 2 gồm các tập không chứa $n + 2$.

Nếu A là tập loại 1 thì A không chứa $n + 1$. Do đó, nếu bỏ đi khỏi A phần tử $n + 2$, ta được một tập con của $\mathcal{A}_n$. Ngược lại, với mỗi tập con B của $\mathcal{A}_n$ thì tập $A = B \cup \{n + 2\}$ là tập loại 1 của $\mathcal{A}_{n+2}$. Thành thử, số tập loại 1 là a_n. Mỗi tập loại 2 rõ ràng là một tập con của $\mathcal{A}_{n+1}$ và ngược lại. Khi đó, số tập loại 2 là a_{n+1}. Do đó, ta có quan hệ sau

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n.$$

Mặt khác với dãy Fibonacci, ta có $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Vì $a_1 = F_3 = 2$; $a_2 = F_4 = 3$; $a_3 = F_5 = 5$, ta suy ra $a_n = F_{n+2}$. Vậy

$$a_n = F_{n+2} = \frac{a^{n+2} - b^{n+2}}{\sqrt{5}}, \text{ trong đó } a = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Bài toán 2.2.20 ([4])**.** *Cho số nguyên dương n và $S = \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$. Gọi c_n là số các tập con của S mà **chứa đúng** hai số nguyên dương liên tiếp. Chứng minh rằng*

$$c_n = \frac{2nF_{n+1} - (n+1)F_n}{5}.$$

Giải. Gọi $\mathcal{C}_n$ là họ các tập con có tính chất đã nêu. Mỗi tập $C \in \mathcal{C}_{n+2}$ gồm ba loại:

+ Loại 1 gồm các tập chứa $n+2,\ n+1$.

+ Loại 2 gồm các tập không chứa $n+2$.

+ Loại 3 gồm các tập chứa $n+2$ nhưng không chứa $n+1$.

Ta xét các trường hợp:

- Nếu C là tập loại 1 thì C cũng không chứa n (vì nếu C chứa n thì C chứa hai cặp số nguyên liên tiếp là $n,\ n+1$ và $n+1,\ n+2$, điều này không thỏa mãn điều kiện đề bài). Bỏ đi khỏi C các phần tử $n+1,\ n+2$ ta được một tập con của $\{1,\ 2,\ \ldots,\ n-1\}$ không chứa hai số nguyên dương liên tiếp. Do đó, nó là một phần tử của $\mathcal{A}_{n-1}$ (theo Bài toán 2.2.19). Ngược lại, với mỗi tập con A của $\mathcal{A}_{n-1}$ thì tập $C = A \cup \{n+1,\ n+2\}$ là tập loại 1 của $\mathcal{C}_{n+2}$. Phép tương ứng này là song ánh. Vậy, số tập loại 1 là $a_{n-1} = F_{n+1}$.

- Mỗi tập loại 2 rõ ràng là một tập con của $\mathcal{C}_{n+1}$ và ngược lại. Vậy, số tập loại 2 là c_{n+1}.

- Nếu C là tập loại 3 thì C không chứa $n+1$. Do đó, nếu bỏ đi khỏi C phần tử $n+2$, ta được một tập con của $\mathcal{C}_n$. Ngược lại, với mỗi tập con B của $\mathcal{C}_n$ thì tập $C = B \cup \{n+2\}$ là tập loại 3 của $\mathcal{C}_{n+2}$. Vậy, ta có hệ thức sau

$$c_{n+2} = c_{n+1} + c_n + F_{n+1}.$$

Từ đó bằng quy nạp, sử dụng hệ thức truy hồi của dãy Fibonacci, ta có công thức nêu trên.

Bài toán 2.2.21 ([4]). *Xét đa giác đều 12 đỉnh $A_1, A_2, \ldots, A_{12}$ với tâm O. Ta tô màu các miền tam giác OA_iA_{i+1} $(1 \le i \le 12)$ $(A_{13} = A_1)$ bằng bốn màu đỏ, xanh da trời, xanh thẫm và vàng sao cho hai miền tam giác kề nhau được tô bởi hai màu khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách tô màu như vậy?*

Giải. Xét trường hợp tổng quát cho đa giác đều n đỉnh và tô bằng k màu, $k \ge 3$. Gọi $P_{n,k}$ là số cách tô màu sao cho hai miền kề nhau được tô bởi hai màu khác nhau.

Ta có: k cách tô màu miền OA_1A_2, $k-1$ cách tô màu miền OA_2A_3, $k-1$ cách tô màu miền OA_3A_4, $\ldots$, $k-1$ cách tô màu miền OA_nA_1. Tổng cộng có $k(k-1)^{n-1}$ cách tô.

Tuy nhiên, chúng ta phải trừ đi các cách tô sai khi OA_nA_1 và OA_1A_2 có màu giống nhau. Đối với mỗi cách tô sai, ta lại coi OA_nA_2 như một miền tam giác (bỏ qua đỉnh A_1) sẽ tương ứng $1-1$ với một cách tô đúng của đa giác $(n-1)$ đỉnh. Do vậy, ta có công thức truy hồi:

$$\begin{aligned}
P_{n,k} &= k(k-1)^{n-1} - P_{n-1,k}\\
&= k(k-1)^{n-1} - [k(k-1)^{n-2} - P_{n-2,k}]\\
&= k(k-1)^{n-1} - k(k-1)^{n-2} + [k(k-1)^{n-3} - P_{n-3,k}]\\
&= k(k-1)^{n-1} - k(k-1)^{n-2} + k(k-1)^{n-3} - \cdots +\\
&+ (-1)^{n-4}[k(k-1)^3 - P_{3,k}],
\end{aligned}$$

suy ra:

$$\begin{aligned}
P_{n,k} &= k[(k-1)^{n-1} - (k-1)^{n-2} + (k-1)^{n-3} - \cdots +\\
&+ (-1)^{n-4}(k-1)^3] + (-1)^{n-3}k(k-1)(k-2)\\
&= k\frac{(k-1)^n + (-1)^{n-4}(k-1)^3}{1+k-1} + (-1)^{n-3}k(k-1)(k-2)\\
&= (k-1)^n + (-1)^n(k-1)^3 + (-1)^{n-1}k(k-1)(k-2)\\
&= (k-1)^n + (-1)^n(k-1)[(k-1)^2 - k(k-2)]\\
&= (k-1)^n + (-1)^n(k-1).
\end{aligned}$$

Từ đó, ta có đáp số: $P_{12,4} = 3^{12} + 3$.

Bài toán 2.2.22 ([3]). *Gọi S là tập tất cả các hoán vị $(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)$ của $(1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ sao cho trong mỗi hoán vị này có đúng một phần tử a_i (khác a_1) lớn hơn các phần tử đứng trước nó. Tìm số trung bình của các số a_1 trong các phần tử thuộc S.*

Giải. Gọi $a(n)$ là số tất cả các hoán vị thuộc S và $b(n)$ là tổng các phần tử đầu tiên của những hoán vị này. Gọi $f(n)$ là số trung bình của các phần tử đầu tiên đó, ta có

$$f(n) = \frac{b(n)}{a(n)}.$$

Nhận thấy $a(1) = 0,\ a(2) = 1,\ b(2) = 1,\ a(3) = 3,\ b(3) = 5.$

Nếu phần tử đầu tiên của hoán vị là 1 thì phần tử thứ hai sẽ thỏa mãn tính chất là luôn lớn hơn các phần tử đứng trước nó. Mà n thì luôn lớn hơn các phần tử đứng trước nó. Do đó, n phải là phần tử đứng thứ hai (chú ý giả thiết: mỗi hoán vị này có *đúng* một phần tử a_i (khác a_1) lớn hơn các phần tử đứng trước nó). Lúc này, các phần tử đứng sau n là phần tử nào cũng được trong $n-2$ phần tử còn lại. Do vậy, có đúng $(n-2)!$ hoán vị thuộc S mà phần tử đầu tiên là 1.

Nếu phần tử đầu tiên khác 1 thì số 1 có thể nằm ở bất cứ đâu trong hoán vị và có thể bớt đi 1 đơn vị ở các số khác để có thể tạo nên một hoán vị $n-1$ phần tử thỏa mãn các điều kiện đề bài. Ngược lại, với một hoán vị $n-1$ phần tử cho trước thỏa mãn các điều kiện đề bài, ta có thể tăng mỗi phần tử 1 đơn vị rồi đặt số 1 vào vị trí bất kì trong $n-1$ vị trí, ngoại trừ vị trí đầu, để nhận được hoán vị n phần tử thỏa mãn các điều kiện đề bài.

Vậy ta có:

$$a(n) = (n-1).a(n-1) + (n-2)!,$$

và

$$\begin{aligned} b(n) &= (n-1)[a(n-1) + b(n-1)] + (n-2)! \\ &= a(n) + (n-1).b(n-1). \end{aligned}$$

Bằng quy nạp, ta chứng chứng minh được $a(n) = (n-1)!.s_{n-1}$.

Ta cũng có $b(n) = n!.s_{n-1} - (n-1).(n-1)!$. Thật vậy, khi $n = 2$ ta có $b(2) = 2 - 1 = 1$, công thức đúng. Giả sử công thức đúng với $n-1$, ta có

$$\begin{aligned}
b(n) &= a(n) + (n-1).b(n-1)\\
&= (n-1)!.s_{n-1} + (n-1).(n-1)!.s_{n-2} - (n-1)(n-2).(n-2)!\\
&= (n-1)!.s_{n-2} + (n-2)! + (n-1).(n-1)!.s_{n-2} -\\
&- (n-1)(n-2).(n-2)!\\
&= n!.s_{n-2} + (n-2)! - (n-2).(n-1)!\\
&= n!.s_{n-1} - (n-1).(n-1)! - \frac{n!}{n-1} + (n-2)! + (n-1)!\\
&= n!.s_{n-1} - (n-1).(n-1)! + (n-2)!(-n+1+n-1)\\
&= n!.s_{n-1} - (n-1).(n-1)!.
\end{aligned}$$

Do đó, công thức đúng với mọi n theo quy nạp.

Từ đó, ta có được $f(n) = n - \dfrac{n-1}{s_{n-1}}$, với $s_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$.

Bài toán 2.2.23 ([3]). *Chứng minh rằng*

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1991}C_{1991}^0 - \frac{1}{1990}C_{1990}^1 + \frac{1}{1989}C_{1989}^2 - \cdots\\
&\cdots + \frac{(-1)^m}{1991-m}C_{1991-m}^m + \cdots - \frac{1}{996}C_{996}^{995} = \frac{1}{1991}.
\end{aligned}$$

Giải. Với $n = 1,\ 2,\ \ldots$, ta đặt $S(n) = \sum\limits_m (-1)^m C_{n-m}^m$, trong đó tổng được lấy từ $m = 0$ cho đến hết những số hạng khác 0.

Ta sẽ sử dụng công thức sau: $\sum\limits_{m=k}^{n} C_m^k = C_{n+1}^{k+1}$. Từ đó:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-2} S(k) &= \sum_{k=0}^{n-2}\sum_m (-1)^m C_{k-m}^m = \sum_m (-1)^m \sum_{k=2m}^{n-2} C_{k-m}^m\\
&= \sum_m (-1)^m C_{n-1-m}^{m+1} = 1 - S(n).
\end{aligned}$$

Như thế, ta có $S(n) = 1 - \sum\limits_{k=0}^{n-2} S(k)$, suy ra

$$S(n+1) = S(n) - S(n-1). \tag{2.23}$$

Ta có $S(0) = S(1) = 1$, từ đó ta có

$S(2) = 0,\ S(3) = -1,\ S(4) = -1,\ S(5) = 0,\ S(6) = 1,\ S(7) = 1.$

Từ (2.23), ta có $S(m) = S(n)$ nếu $m \equiv n \pmod 6$. Do

$$\frac{n}{n-m} C_{n-m}^{m} = C_{n-m}^{m} + C_{n-m-1}^{m-1}$$

nên ta có được

$$\begin{aligned}
&1991.\Big[\frac{1}{1991} C_{1991}^{0} - \frac{1}{1990} C_{1990}^{1} + \frac{1}{1989} C_{1989}^{2} - \cdots \\
&\cdots + \frac{(-1)^m}{1991-m} C_{1991-m}^{m} + \cdots - \frac{1}{996} C_{996}^{995}\Big] \\
&= S(1991) - S(1989) = 0 - (-1) = 1,
\end{aligned}$$

suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 2.2.24 ([4])**.** *Tìm số tập con của tập $\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ sao cho trong mỗi tập con chứa ít nhất hai phần tử là hai số nguyên liên tiếp.*

Giải. Gọi S_n là tập hợp các tập con không rỗng của tập $\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ mà trong mỗi tập con không có hai phần tử nào là hai số nguyên liên tiếp. Chia các phần tử của S_n thành hai nhóm:

+ Nhóm không chứa $\{n\}$: số các tập con như vậy là $|S_{n-1}|$;

+ Nhóm mà mỗi tập hợp trong nhóm chứa phần tử n: $\{n\}$ hoặc

$\{a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ n\}$ $(n \geq 1)$. Rõ ràng $a_i \neq n-1$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ nên số các tập con như vậy là $|S_{n-2}| + 1$.

Do vậy

$$|S_n| = |S_{n-1}| + |S_{n-2}| + 1.$$

Với chú ý $|S_2| = 2,\ |S_3| = 4$, ta có

$$|S_n| = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right] - 1.$$

Mặt khác, số tập con không rỗng của tập $\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ là $2^n - 1$. Vậy số tập con mà trong mỗi tập con chứa ít nhất hai phần tử là hai số nguyên liên tiếp là:

$$2^n - 1 - |S_n| = 2^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right].$$

Bài toán 2.2.25 ([4]). *Có n quả bóng $b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n$ và $2n$ hộp $h_1,\ h_2,\ \ldots,\ h_{2n}$. Biết rằng quả bóng b_i $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ chỉ bỏ vào được các hộp $h_1,\ h_2,\ \ldots,\ h_{2i}$. Hỏi có bao nhiêu cách bỏ k $(1 \le k \le n)$ quả bóng vào các hộp, biết rằng mỗi hộp chứa nhiều nhất một quả bóng? (Hai cách bỏ bóng được gọi là khác nhau khi ít nhất một quả bóng được bỏ vào hai hộp khác nhau trong hai cách đó).*

Giải. Đặt $S_{n,k}$ là số cách bỏ k quả bóng vào các hộp. Giả sử $2 \le k \le n$. Nếu một trong k quả bóng được chọn là b_n thì $(k-1)$ quả bóng còn lại có thể bỏ vào các hộp bằng $S_{n-1,k-1}$ cách. Đồng thời, b_n có $2n-(k-1) = 2n-k+1$ cách chọn một trong các hộp còn lại để bỏ. Do đó, số cách bỏ bóng trong trường hợp này là $(2n-k+1).S_{n-1,k-1}$.

Trường hợp quả b_n không được chọn. Để ý rằng $k \le n-1$. Mọi quả bóng trong các quả $b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_{n-1}$ đều có thể bỏ vào các hộp bằng $S_{n-1,k}$ cách, suy ra

$$S_{n,k} = S_{n-1,k} + (2n-k+1)S_{n-1,k-1}\ (n \ge 3,\ 2 \le k \le n).$$

Nhận thấy

$$S_{n,n} = (n+1)S_{n-1,n-1},\ S_{n,1} = n(n+1),\ S_{1,1} = 2.$$

Từ đó, bằng quy nạp ta chứng minh được:

$$S_{n,k} = \frac{(n+1).k!.(C_n^k)^2}{n-k+1}.$$

Bài toán 2.2.26 ([4]). *Có n $(n > 1)$ thí sinh ngồi xung quanh một bàn tròn. Hỏi có bao nhiêu cách phát đề sao cho hai thí sinh ngồi cạnh nhau luôn có đề khác nhau, biết rằng trong ngân hàng đề có đúng m $(m > 1)$ đề và mỗi đề có nhiều bản?*

Giải. Nhận xét rằng do thí sinh ngồi theo vòng tròn, nên một cách tự nhiên chúng ta nghĩ tới việc tìm cách "cắt" và "nắn" vòng tròn thành hàng thẳng.

Cách 1. Kí hiệu P_n là số cách phát đề hợp lệ cho n học sinh $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ ngồi theo vòng tròn (một cách phát đề được coi là hợp lệ nếu mỗi thí sinh được nhận chỉ một đề và hai thí sinh bất kì ngồi gần nhau thì nhận được hai loại đề khác nhau).

Ta viết $a_i = a_j$ $(i \neq j)$ nếu a_i và a_j cùng loại đề và $a_i \neq a_j$ trong trường hợp ngược lại, ta chứng minh:

$$P_{n+1} = (m-2)P_n + (m-1)P_{n-1}. \tag{2.24}$$

Xét một cách phát đề hợp lệ cho $n+1$ thí sinh $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n+1}$.

Nếu $a_1 \neq a_n$ thì bỏ a_{n+1} đi, ta có một cách phát đề hợp lệ cho n thí sinh $(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)$ và có $(m-2)$ cách phát đề cho a_{n+1}.

Nếu $a_1 = a_n$ thì bỏ a_{n+1} và a_n đi, ta có một cách phát đề hợp lệ cho $(n-1)$ thí sinh $(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n-1})$. Ta có $(m-1)$ cách phát đề cho $(a_n,\ a_{n+1})$ để hợp lệ với $a_n = a_1$. Vậy ta có được (2.24).

Mặt khác nhận thấy $P_2 = m(m-1);\ P_3 = m(m-1)(m-2)$. Bằng quy nạp, ta chứng minh được:

$$P_n = (m-1)^n + (m-1)(-1)^n.$$

Cách 2. Bài toán tương đương với việc đếm số các dãy (a_i) $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ thỏa mãn điều kiện: $a_i \in M = \{1,\ 2,\ \ldots,\ m\}$, $\forall i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ và $a_1 \neq a_2,\ a_2 \neq a_3,\ \ldots,\ a_{n-1} \neq a_n,\ a_n \neq a_1$.

Trong tập hợp các dãy (a_i) thỏa mãn $a_i \in M$, $\forall i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ và $a_1 \neq a_2,\ a_2 \neq a_3,\ \ldots,\ a_{n-1} \neq a_n$, ta gọi A_n là tập hợp các dãy (a_i) mà $a_1 \neq a_n$ và B_n là tập hợp các dãy (a_i) mà $a_1 = a_n$.

Do với mỗi dãy thuộc B_n, nếu bỏ đi số a_n thì ta được một dãy thuộc A_{n-1} nên $|B_n| = |A_{n-1}|$. Mặt khác, nhận thấy $|A_n| + |B_n| = m(m-1)^{n-1}$ (do a_1 có m cách chọn, a_{i+1} có $(m-1)$ cách chọn khác a_i, với mọi $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$).

Do đó

$$|A_n| = m(m-1)^{n-1} - |A_{n-1}|.$$

Chú ý rằng $|A_2| = m(m-1)$, vậy ta có:

$$|A_n| = (m-1)^n + (m-1)(-1)^n.$$

Bài toán 2.2.27 ([4])**.** *Cho A và E là hai đỉnh đối tâm của một hình tám cạnh đều. Có một con ếch bắt đầu nhảy từ A. Tại bất cứ đỉnh nào trừ E, ếch có thể tới một trong hai đỉnh kề. Nếu ếch nhảy tới E thì nó dừng lại ở đó. Gọi a_n là số đường đi phân biệt của đúng n bước nhảy để* *ếch nhảy từ A đến E. Chứng minh rằng*

$$a_{2n-1} = 0,\ a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[(2+\sqrt{2})^{n-1} - (2-\sqrt{2})^{n-1}\Big].$$

Giải. Gọi các đỉnh của hình tám cạnh đều là $A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F,\ G,\ H$. Ta có $a_{2n-1} = 0$ là hiển nhiên. Gọi b_n là số đường đi từ C tới E qua n bước nhảy. Qua hai bước đầu tiên, ếch có thể về A hoặc đến C hoặc đến G.

Do đó

$$a_{2n} = 2a_{2n-2} + 2b_{2n-2},\ \forall n > 0. \tag{2.25}$$

Từ C (hoặc G), sau hai bước nhảy ếch có thể về lại C hoặc tới A, nếu $n > 2$. Do đó

$$b_{2n} = 2b_{2n-2} + a_{2n-2},\ \forall n > 1. \tag{2.26}$$

Từ (2.25) và (2.26), suy ra:

$$a_{2n} = 4a_{2n-2} - 2a_{2n-4}.$$

Cùng với $a_2 = 0,\ a_4 = 2$, ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 2.2.28 ([4])**.** *Cho bảng ô vuông $n \times n$ ($n > 1$). Hỏi có bao nhiêu cách đánh dấu các ô vuông trong bảng sao cho trong mỗi hình vuông 2×2 có đúng 2 ô vuông được đánh dấu? (Hai cách đánh dấu được coi là khác nhau nếu có một ô vuông nào đó mà trong cách này thì được đánh dấu còn trong cách kia thì không).*

Giải. Gọi S_n là số cách đánh dấu các ô vuông trong bảng $n \times n$ thỏa mãn điều kiện đề bài. Xét tập T gồm các ô vuông nằm trong cột cuối cùng (tính từ phải sang) và hàng cuối cùng (tính từ trên xuống), ta gọi A_n là các cách đánh dấu mà có hai ô vuông kề nhau trong T cùng được đánh dấu hoặc cùng không được đánh dấu và B_n là các cách đánh dấu mà các ô vuông trong T được đánh dấu xen kẽ.

Nhận thấy mỗi cách đánh dấu thuộc B_n sẽ ứng với một cách đánh dấu thuộc B_{n-1}, còn mỗi cách đánh dấu thuộc A_n sẽ ứng với một cách đánh dấu thuộc A_{n-1} và một cách đánh dấu thuộc B_{n-1}. (Điều này suy ra khi xét bảng ô vuông $(n-1) \times (n-1)$ có được từ bảng $n \times n$ sau khi bỏ T).

Từ đó, ta có

$$|B_n| = |B_{n-1}|,\ |A_n| = |A_{n-1}| + |B_{n-1}|\ (n > 2).$$

Mặt khác $S_n = |A_n| + |B_n|,\ \forall n > 1$, nên $S_n = 2S_{n-1} - S_{n-2},\ \forall n > 3$.

Nhận thấy rằng: $S_2 = 6,\ S_3 = 14$. Từ đó bằng quy nạp, ta có:

$$S_n = 8n - 10,\ \forall n \geq 2.$$

Bài toán 2.2.29 ([4]). *Tìm số các số nguyên dương n thỏa mãn các điều kiện:*

i) n có 1000 chữ số;

ii) Tất cả các chữ số của n là lẻ;

iii) Hiệu của hai chữ số liên tiếp bất kì của n luôn bằng 2.

Giải. Trong tập hợp S_k các số nguyên dương n có k chữ số thỏa mãn ii) và iii), gọi $A_k,\ B_k,\ C_k,\ D_k,\ E_k$ lần lượt là tập hợp các số tận cùng bởi $1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9$.

Từ mỗi số thuộc A_k nếu ta bỏ đi chữ số tận cùng thì nhận được một số thuộc B_{k-1}, mặt khác từ mỗi số thuộc B_{k-1} nếu ta bổ sung thêm số 1 làm chữ số tận cùng thì nhận được một số thuộc A_k, do đó $|A_k| = |B_{k-1}|$. Từ mỗi số thuộc B_k nếu ta bỏ đi chữ số tận cùng thì nhận được một số thuộc A_{k-1} hoặc C_{k-1}, nếu ta bổ sung thêm số 3 làm chữ số tận cùng cho các số thuộc A_{k-1} hoặc C_{k-1} thì nhận được một số thuộc B_k. Do đó: $|B_k| = |A_{k-1}| + |C_{k-1}|$.

Tương tự, ta có

$$|C_k| = |B_{k-1}| + |D_{k-1}|,\ |D_k| = |C_{k-1}| + |E_{k-1}| \text{ và } |E_k| = |D_{k-1}|,\ (\forall k > 1).$$

Sử dụng năm đẳng thức trên, bằng cách thế liên tục, ta có

$$\begin{aligned}
|S_k| &= |A_k| + |B_k| + |C_k| + |D_k| + |E_k| \\
&= |A_{k-1}| + 2|B_{k-1}| + 2|C_{k-1}| + 2|D_{k-1}| + |E_{k-1}| \\
&= 2|A_{k-2}| + 3|B_{k-2}| + 4|C_{k-2}| + 3|D_{k-2}| + 2|E_{k-2}| \\
&= 3|A_{k-3}| + 6|B_{k-3}| + 6|C_{k-3}| + 6|D_{k-3}| + 3|E_{k-3}|.
\end{aligned}$$

Suy ra $|S_k| = 3|S_{k-2}|\ (\forall k > 3)$. Do $|S_2| = 8$ nên $|S_{1000}| = 8.3^{499}$.

Bài toán 2.2.30 ([4]). *Tìm số các bộ số nguyên* $(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)$ $(n > 1)$ *thỏa mãn:*

$$\begin{cases} |a_i| \le 1, & \forall i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n \\ |a_i - a_{i+1}| \le 1, & \forall i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1. \end{cases}$$

Giải. Trong tập S_n các bộ n số nguyên $(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)$ thỏa mãn đề bài, gọi $A_n,\ B_n,\ C_n$ là tập hợp các bộ có a_n bằng $-1,\ 0,\ 1$ tương ứng.

Ta có: $|S_n| = |A_n| + |B_n| + |C_n|$.

Mặt khác, nhận thấy từ mỗi bộ thuộc A_n hoặc B_n, ta có thể bổ sung $a_{n+1} = -1$ để được một bộ thuộc A_{n+1} nên $|A_{n+1}| = |A_n| + |B_n|$.

Tương tự, ta có $|C_{n+1}| = |C_n| + |B_n|$ và $|B_{n+1}| = |A_n| + |B_n| + |C_n| = |S_n|$.

Từ đó, ta có

$$\begin{aligned} |S_{n+1}| &= |A_{n+1}| + |B_{n+1}| + |C_{n+1}| \\ &= (|A_n| + |B_n| + |C_n|) + |B_{n+1}| + |B_n| \\ &= 2|S_n| + |S_{n-1}|. \end{aligned}$$

Kết hợp với $|S_2| = 7,\ |S_3| = 17$, ta tính được:

$$|S_n| = \frac{(1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1}}{2}.$$

Bài toán 2.2.31 ([1]). *Cho tập hợp* $A \subset \mathbb{R}$*, ta định nghĩa tập hợp*

$$A + 1 = \{a + 1 \mid a \in A\}.$$

Hỏi có bao nhiêu tập con A *của tập hợp* $\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ $(n \in \mathbb{N},\ n \ge 1)$ *sao cho* $A \cup (A+1) = \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$*?*

Giải. Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, đặt $A_n = \{A \mid A \cup (A+1) = \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}\}$ và $S_n = |A_n|$. Nhận thấy $S_1 = 0,\ S_2 = 1$.

Xét $A_{n+1} = \{A \mid A \cup (A+1) = \{1,\ 2,\ \ldots,\ n+1\}\},\ n \ge 2$.

- Ta thấy $n + 1 \notin A$, vì nếu $n + 1 \in A$ thì $n + 2 \in A + 1$. Khi đó $n + 2 \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n+1\}$. Điều này vô lí.

- Ta cũng có $n \in A$, vì nếu $n \notin A$ thì $n + 1 \notin A + 1$. Khi đó

$$n + 1 \notin \{1,\ 2,\ \ldots,\ n+1\}.$$

Điều này cũng vô lí.

Với mỗi tập $A \in A_{n+1}$, ta xét tập $B = A \setminus \{n\}$. Khi đó

$$B \subset \{1,\ 2,\ \ldots,\ n-1\}.$$

Suy ra $B + 1 = A + 1 \setminus \{n+1\}$.

Do đó $A \in A_{n+1} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} B \cup (B+1) = \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}; & (1) \\ B \cup (B+1) = \{1,\ 2,\ \ldots,\ n-1\}. & (2) \end{array}\right.$

Số các tập B thỏa mãn (1) là S_n.

Số các tập B thỏa mãn (2) là S_{n-1}.

Vậy ta có $S_{n+1} = S_n + S_{n-1},\ S_1 = 0,\ S_2 = 1$.

Từ đó, ta tìm được:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right]. \end{aligned}$$

Chương 3

PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG ÁNH XẠ

3.1 Phương pháp sử dụng ánh xạ

Để hình dung rõ nét về phương pháp sử dụng ánh xạ, ta xem xét nhận xét sau: Có n người đến dự một buổi nói chuyện trong một hội trường có 300 ghế. Giả sử mỗi người chỉ chiếm một ghế ngồi và mỗi ghế chỉ có nhiều nhất một người ngồi. Nếu ta được thông báo rằng mọi người đều có chỗ ngồi thì ta kết luận $n \leq 300$. Nếu ta biết thêm rằng không có ghế nào trống thì ta biết ngay là $n = 300$. Nếu có một số người phải đứng vì không có ghế thì ta suy ra $n > 300$. Như vậy, có thể xác định hay ước lượng số phần tử của một tập hợp A nào đó thông qua một tập hợp B mà ta đã biết số phần tử của nó nhờ một phép tương ứng (ánh xạ) giữa A và B. Đây là một phương pháp được sử dụng rất hiệu quả để giải nhiều bài toán đếm nâng cao.

Định nghĩa 3.1.1 ([4])**.** *Cho ánh xạ* $f : A \longrightarrow B$.

Ánh xạ f *được gọi là một đơn ánh nếu với hai phần tử bất kì* $a_1, a_2 \in A$ *mà* $a_1 \neq a_2$ *thì* $f(a_1) \neq f(a_2)$*, tức là* $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$.

Ánh xạ f *được gọi là một toàn ánh nếu với mọi* $b \in B$ *đều tồn tại* $a \in A$ *để* $f(a) = b$.

Ánh xạ f *được gọi là một song ánh nếu với mọi* $b \in B$*, tồn tại và duy nhất* $a \in A$ *để* $f(a) = b$*. Nói cách khác,* f *là song ánh khi và chỉ khi nó đồng thời là đơn ánh và toàn ánh.*

Định lý 3.1.1 ([4])**.** *Cho* A *và* B *là hai tập hợp hữu hạn.*

a) Nếu có một đơn ánh $f : A \longrightarrow B$ *thì* $|A| \leq |B|$.

b) Nếu có một toàn ánh $f : A \longrightarrow B$ *thì* $|A| \geq |B|$.

c) Nếu có một song ánh $f : A \longrightarrow B$ thì $|A| = |B|$.

3.2 Áp dụng

Bài toán 3.2.1 ([2]). *Gọi M là tập tất cả các số nguyên dương (viết theo hệ thập phân) có n chữ số 1, n chữ số 2 và không còn chữ số nào khác; N là tập tất cả các số nguyên dương có n chữ số thuộc tập $\{1, 2, 3, 4\}$ và số chữ số 1 bằng số chữ số 2.*

Chứng minh: $|M| = |N| = C_{2n}^n$.

Giải. Rõ ràng $|M|$ và $|N|$ là các tập hữu hạn.

Ta chứng minh rằng tồn tại một song ánh từ N vào M. Phương pháp như sau:

Số có n chữ số gồm các chữ số $1, 2, 3, 4$ và số các chữ số 1 bằng số các chữ số 2 được "nhân đôi" thành số có $2n$ chữ số theo quy tắc: Đầu tiên, hai phiên bản của số này được viết kề nhau thành số có $2n$ chữ số. Sau đó, các chữ số 3 ở n chữ số đầu được đổi thành chữ số 1, các chữ số 3 ở n chữ số sau được đổi thành chữ số 2. Tương tự, các chữ số 4 ở n chữ số đầu được đổi thành chữ số 2, các chữ số 4 ở n chữ số sau được đổi thành chữ số 1.

Như thế, ta thu được một số có đúng n chữ số 1 và n chữ số 2. Rõ ràng đây là một đơn ánh. Để chứng minh đây là một song ánh, ta xây dựng ánh xạ ngược như sau:

Với một số có n chữ số 1 và n chữ số 2, ta cắt n chữ số đầu và n chữ số cuối và đặt chúng "song song" với nhau khi thực hiện phép "cộng". Thực hiện phép "cộng" theo quy tắc: $1+1 = 1,\ 2+2 = 2,\ 1+2 = 3,\ 2+1 = 4$. Ta sẽ thu được một số có n chữ số gồm các chữ số $1, 2, 3, 4$, với số các chữ số 1 bằng số các chữ số 2.

Do đó, song ánh giữa hai tập hợp M và N đã được thiết lập.

Tính $|M|$:

Có $2n$ vị trí để bố trí các chữ số 1, suy ra có C_{2n}^n cách. Còn lại n vị trí để bố trí các chữ số 2, suy ra có 1 cách. Theo nguyên lý nhân, ta có: $1.C_{2n}^n = C_{2n}^n$ số có n chữ số 1 và n chữ số 2. Do đó $|M| = C_{2n}^n$.

Do vậy: $|N| = |M| = C_{2n}^n$.

Bài toán 3.2.2 ([4])**.** *Cho tập S gồm tất cả các số nguyên trong đoạn* $[1\ ;\ 2002]$*. Gọi T là tập hợp tất cả các tập con không rỗng của S. Với mỗi X thuộc T, kí hiệu $m(X)$ là trung bình cộng các phần tử của X. Tính*

$$\alpha = \frac{\sum m(X)}{|T|},$$

trong đó tổng lấy theo tất cả các tập X thuộc T.

Giải. Xây dựng song ánh $f : T \longrightarrow T$ như sau:

$$f(X) = \{2003 - x \mid x \in X\},\ \forall X \in T.$$

Rõ ràng $m(X) + m(f(X)) = 2003$. Do đó:

$$2\sum m(X) = \sum[m(X)+m(f(X))] = |T|.2003 \Rightarrow \alpha = \frac{\sum m(X)}{|T|} = \frac{2003}{2}.$$

Bài toán 3.2.3 ([4])**.** *Hãy tính trung bình cộng tất cả các số N gồm* 2002 *chữ số thỏa mãn $N \ \vdots\ 99$ và các chữ số của N thuộc tập hợp* $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$.

Giải. Gọi M là tập các số N thỏa mãn điều kiện đề bài. Xây dựng ánh xạ $f : M \longrightarrow M$ như sau:

Nếu $N = \overline{a_1a_2\ldots a_{2002}}$ thì $f(N) = \overline{b_1b_2\ldots b_{2002}}$, với

$$b_i = 9 - a_i,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ 2002.$$

Do $N + f(N) = \underbrace{\overline{99\ldots9}}_{\text{2002 chữ số 9}} \ \vdots\ 99$ nên f là song ánh.

Từ đó, ta có:

$$2\sum_{N\in M} N = |M|.\underbrace{\overline{99\ldots9}}_{\text{2002 chữ số 9}}.$$

Suy ra, trung bình cộng các số N là:

$$\frac{\underbrace{\overline{99\ldots9}}_{\text{2002 chữ số 9}}}{2} = \frac{10^{2002}-1}{2}.$$

Bài toán 3.2.4 ([5])**.** *Cho hàm số* $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*. Đặt:*

$$A_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid \varphi(x) = x\};\ A_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid \varphi(\varphi(x)) = x\}.$$

Giả sử $A_2 \setminus A_1$ *là một tập hợp hữu hạn và tồn tại hàm số* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *thỏa mãn* $f(f(x)) = \varphi(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Chứng minh rằng số phần tử của $A_2 \setminus A_1$ *là một số nguyên chia hết cho* 4.

Giải. Kí hiệu $f_0(x) = x,\ f_1(x) = f(x),\ f_{n+1}(x) = f(f_n(x))$, với $n \in \mathbb{N}$.

Với $x \in A_1$ ta có $\varphi(x) = x \Rightarrow \varphi(\varphi(x)) = x \Rightarrow x \in A_2$. Do đó: $A_1 \subset A_2$.

Với mọi $x,\ y \in A_1$ ta có

$$f(x) = f(y) \Rightarrow f(f(x)) = f(f(y)) \Rightarrow \varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow x = y.$$

Suy ra f là đơn ánh.

Mặt khác, $x \in A_1 \Rightarrow z = f(x) \in A_1 \Rightarrow x = f(z)$.

Vậy f là hàm $1 - 1$ trên tập hợp A_1.

Tương tự, ta cũng có f là hàm $1 - 1$ trên tập $A = A_2 \setminus A_1$. Từ đó, nếu $x \in A$ thì $x,\ f(x),\ f(f(x)),\ f(f(f(x)))$ là 4 số thực phân biệt thuộc A. Thật vậy, $x \in A \Rightarrow f_4(x) = x$. Nếu tồn tại $0 \le i,\ j \le 3;\ i \ne j$ để $f_i(x) = f_j(x) \Rightarrow f_2(x) = x \Rightarrow x \in A_1$, mâu thuẫn.

Đặt

$$M(x) = \{x,\ f(x),\ f_2(x),\ f_3(x)\} \subset A;$$
$$M(y) = \{y,\ f(y),\ f_2(y),\ f_3(y)\} \subset A.$$

Nếu $f_i(y) \in M(x)$ với $i \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$ nào đó thì ta viết:

$$M(y) = \{f_i(y),\ f_{i+1}(y),\ f_{i+2}(y),\ f_{i+3}(y)\} = M(x).$$

Như vậy, A là hợp của một số hữu hạn các tập $M(x)$ rời nhau. Do vậy: $|A| \vdots 4$.

Bài toán 3.2.5 ([4])**.** *Có một nhóm người mà trong đó, mỗi cặp không quen nhau có đúng hai người quen chung, còn mỗi cặp quen nhau thì không có người quen chung. Chứng minh rằng số người quen của mỗi người là như nhau.*

Giải. Giả sử a quen b và gọi tập các người quen của a và tập các người quen của b (không kể a, b) lần lượt là A và B. Mỗi người a' thuộc A sẽ quen với duy nhất một người thuộc B (do a' và b không quen nhau, hơn nữa họ đã có một người quen chung là a). Tương tự, mỗi người thuộc B cũng quen với duy nhất một người thuộc A. Vậy tồn tại một song ánh đi từ A tới B, tức a và b có số người quen bằng nhau.

Nếu a không quen b thì tồn tại c quen cả a và b. Do đó, số người quen của a và số người quen của b bằng nhau do cùng bằng số người quen của c.

Bài toán 3.2.6 ([4])**.** *Một cửa hàng kem có bán ba loại kem: kem xoài, kem sôcôla và kem sữa. Một nhóm có* 6 *người vào ăn kem và gọi* 6 *cốc kem. Hỏi*

a) Họ có tất cả bao nhiêu sự lựa chọn?

b) Họ có tất cả bao nhiêu sự lựa chọn, trong đó cả ba loại kem đều có mặt?

Giải.

a) Ta thử liệt kê một vài sự lựa chọn:

+ 2 kem xoài, 1 kem sôcôla, 3 kem sữa;

+ 1 kem xoài, 4 kem sôcôla, 1 kem sữa;

+ 2 kem sôcôla, 4 kem sữa;

+ 3 kem xoài, 3 kem sữa.

Mỗi sự lựa chọn: "a kem xoài, b kem sôcôla và c kem sữa" được kí hiệu bởi một bộ ba $(a,\ b,\ c)$, trong đó $a,\ b,\ c$ là các số nguyên không âm thỏa mãn điều kiện $a+b+c=6$. Chẳng hạn, bốn sự lựa chọn ở trên được kí hiệu là các bộ $(2,\ 1,\ 3)$; $(1,\ 4,\ 1)$; $(0,\ 2,\ 4)$ và $(3,\ 0,\ 3)$.

Với mỗi bộ ba $(a,\ b,\ c)$ như vậy, ta đặt tương ứng với một dãy nhị phân (dãy gồm các chữ số 0 và 1) theo quy tắc sau: viết từ trái sang phải a số 1 liên tiếp, số 0, b số 1 liên tiếp, số 0, rồi c số 1 liên tiếp

$$\underbrace{11\ldots1}_{a \text{ số } 1}0\underbrace{11\ldots1}_{b \text{ số } 1}0\underbrace{11\ldots1}_{c \text{ số } 1}.$$

Như vậy, mỗi bộ ba $(a,\ b,\ c)$ được tương ứng với một dãy nhị phân độ dài 8 (tức là gồm 8 kí tự), trong đó có 6 kí tự 1 và 2 kí tự 0.

Chẳng hạn,

$$(2,\ 1,\ 3) \longrightarrow 11010111$$

$$(1,\ 4,\ 1) \longrightarrow 10111101$$

$$(0,\ 2,\ 4) \longrightarrow 01101111$$

$$(3,\ 0,\ 3) \longrightarrow 11100111$$

Rõ ràng, phép tương ứng đó là một đơn ánh. Ngược lại, với mỗi dãy 8 kí tự trong đó có 6 kí tự 1 và 2 kí tự 0 khi ta đếm từ trái sang phải mà có: a số 1 liên tiếp, số 0, b số 1 liên tiếp, số 0 và c số 1 liên tiếp thì dãy đó sẽ ứng với bộ $(a,\ b,\ c)$ thỏa mãn $a+b+c=6$.

Chẳng hạn, dãy 10110111 sẽ ứng với bộ $(1,\ 2,\ 3)$, tức là ứng với sự lựa chọn: 1 kem xoài, 2 kem sôcôla và 3 kem sữa. Dãy 01011111 ứng với bộ $(0,\ 1,\ 5)$, tức là ứng với sự lựa chọn 1 kem sôcôla và 5 kem sữa.

Như vậy, ta đã thiết lập được một song ánh giữa tập hợp các sự lựa chọn với tập hợp các dãy nhị phân độ dài 8, trong đó có 6 kí tự 1 và 2 kí tự 0.

Do đó, số các sự lựa chọn bằng số các dãy nhị phân độ dài 8, trong đó có 6 kí tự 1 và 2 kí tự 0.

Mặt khác, một dãy nhị phân độ dài 8 với 6 kí tự 1 và 2 kí tự 0 tương ứng với cách chọn 2 vị trí trong 8 vị trí để ghi số 0 (6 vị trí còn lại ghi số 1).

Nhận thấy có $C_8^2=28$ dãy nhị phân độ dài 8 với 6 kí tự 1 và 2 kí tự 0. Do đó, số các lựa chọn là 28.

b) Mỗi sự lựa chọn: "a kem xoài, b kem sôcôla và c kem sữa" được kí hiệu bởi một bộ ba $(a,\ b,\ c)$, trong đó $a,\ b,\ c$ là các số nguyên dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=6$.

Với mỗi bộ $(a,\ b,\ c)$ thỏa mãn điều kiện trên ta cho tương ứng với bộ $(x,\ y,\ z)$ với $x=a-1$, $y=b-1$, $z=c-1$. Khi đó, $(x,\ y,\ z)$ là các số nguyên không âm thỏa mãn điều kiện $x+y+z=a+b+c-3=3$. Nhận thấy có thể kiểm tra rằng đây là một phép song ánh giữa tập các bộ ba $(a,\ b,\ c)$, trong đó $a,\ b,\ c$ là các số nguyên dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=6$ ứng với tập các bộ ba $(x,\ y,\ z)$ là các số nguyên không âm thỏa mãn điều kiện $x+y+z=a+b+c-3=3$. Bằng suy luận tương tự như câu a), ta tìm được số các sự lựa chọn là $C_5^2=10$.

Nhận xét 3.2.1. *Ta có bài toán tổng quát sau:*

Bài toán tổng quát 3.2.1. *Một cửa hàng kem có bán m loại kem. Một nhóm có n người vào ăn kem và gọi n cốc kem. Hỏi*

a) Họ có tất cả bao nhiêu sự lựa chọn?

b) Họ có tất cả bao nhiêu sự lựa chọn, trong đó cả m loại kem đều có mặt?

Đáp số: a) C_{n+m-1}^{m-1}; b) C_{n-1}^{m-1}.

Bài toán 3.2.7 ([4]). *Cho trước số nguyên dương n và số nguyên dương r thỏa mãn $r < n - r + 1$. Giả sử $X = \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$. Hỏi có bao nhiêu tập con A của X có r phần tử mà không chứa hai số nguyên liên tiếp?*

Chẳng hạn, với $n = 7,\ r = 3,\ X = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$. Các tập con A của X có 3 phần tử mà không chứa hai số nguyên liên tiếp cả thảy gồm 10 tập sau:

$\{1,\ 3,\ 5\},\ \{1,\ 3,\ 6\},\ \{1,\ 3,\ 7\},\ \{1,\ 4,\ 6\},\ \{1,\ 4,\ 7\},\ \{1,\ 5,\ 7\},$
$\{2,\ 4,\ 6\},\ \{2,\ 4,\ 7\},\ \{2,\ 5,\ 7\},\ \{3,\ 5,\ 7\}.$

Giải. Gọi $\mathcal{A}$ là họ tất cả các tập con của X có tính chất đã nêu và $\mathcal{B}$ là họ tất cả các tập con có r phần tử của tập hợp $Y = \{1,\ 2,\ \ldots,\ n-(r-1)\}$. Ta thiết lập một ánh xạ $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ như sau:

Giả sử $A = \{a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_r\} \in \mathcal{A}$. Ta có thể giả thiết $a_1 < a_2 < \cdots < a_r$. Đặt

$$b_i = a_i - (i-1) = a_i - i + 1,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ r.$$

Ta có $b_{i+1} - b_i = a_{i+1} - a_i - 1 \geq 1$ (do $a_{i+1} - a_i \geq 2$).

Do đó

$$b_1 < b_2 < \cdots < b_r \leq n - r + 1.$$

Đặt $B = \{b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_r\}$. Khi đó: $B \in \mathcal{B}$.

Ta định nghĩa $f(A) = B$. Ta có $B \in \mathcal{B}$, do vậy f là một ánh xạ từ $\mathcal{A}$ vào $\mathcal{B}$. Ta sẽ chứng minh f là song ánh.

+ f là đơn ánh: Từ công thức $b_i = a_i - (i-1) = a_i - i + 1$, suy ra $a_i = b_i + i - 1$. Do đó, nếu $f(A) = f(A')$ thì $A = A'$.

+ f là toàn ánh: Giả sử $B = \{b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_r\} \in \mathcal{B}$, nhận thấy $b_1 < b_2 < \cdots < b_r \leq n - r + 1$.

Xét tập $A = \{a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_r\}$, trong đó $a_i = b_i + i - 1$. Ta có

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_r \leq n - r + 1 + r - 1 = n,\ a_{i+1} - a_i = b_{i+1} - b_i + 1 \geq 2.$$

Do đó, $A \in \mathcal{A},\ f(A) = B$, suy ra $|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}| = C^r_{n-r+1}$. Vậy có tất cả C^r_{n-r+1} các tập con của X có tính chất đã nêu.

Bài toán 3.2.8 ([4])**.** *Cho tập $A = \{1,\ 2,\ \ldots,\ 2n\}$. Một tập con B của A được gọi là một tập cân nếu trong tập đó số các số chẵn và số các số lẻ bằng nhau. (Tập rỗng là một tập cân vì số các số chẵn và số các số lẻ trong tập rỗng đều bằng 0). Hỏi A có chứa bao nhiêu tập cân?*

Chẳng hạn, với $n = 2,\ A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, A có 6 tập con cân là các tập sau: $\varnothing$, $\{1,\ 2\}$, $\{1,\ 4\}$, $\{2,\ 3\}$, $\{3,\ 4\}$, $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$.

Giải. Ký hiệu $X = \{2,\ 4,\ \ldots,\ 2n\}$ là tập hợp tất cả các số chẵn của A và $Y = \{1,\ 3,\ \ldots,\ 2n-1\}$ là tập hợp tất cả các số lẻ của A. Gọi $\mathcal{C}$ là họ tất cả các tập cân của A và $\mathcal{D}$ là họ tất cả các tập con của A có đúng n phần tử.

Ta lập một ánh xạ f từ $\mathcal{C}$ vào $\mathcal{D}$ như sau: Giả sử B là một tập cân. Kí hiệu $B_1,\ B_2$ tương ứng là tập các số chẵn và tập các số lẻ của B. Khi đó đặt:

$$f(B) = B_1 \cup (Y \setminus B_2).$$

Do B là tập cân nên $|B_1| = |B_2|$. Thành thử $|f(B)| = |B_1| + |Y \setminus B_2| = |B_1| + |Y| - |B_2| = |Y| = n$. Vậy $f(B) \in \mathcal{D}$.

Tiếp theo ta chứng minh f là một song ánh.

+ f là đơn ánh: Với mọi $B,\ C \in \mathcal{C}$, giả sử $f(B) = f(C)$. Suy ra $B_1 \cup (Y \setminus B_2) = C_1 \cup (Y \setminus C_2)$. Vì $B_1,\ C_1$ là tập các số chẵn; $Y \setminus B_2,\ Y \setminus C_2$ là tập các số lẻ nên từ đó suy ra $B_1 = C_1,\ Y \setminus B_2 = Y \setminus C_2$. Do đó $B_1 = C_1,\ B_2 = C_2$ hay $B = C$.

+ f là toàn ánh: Giả sử $M \in \mathcal{D}$ là một tập con của A có n phần tử. Kí hiệu $M_1,\ M_2$ tương ứng là tập các số chẵn và tập các số lẻ của M. Đặt $B_1 = M_1,\ B_2 = Y \setminus M_2$ và $B = B_1 \cup B_2$. Ta có

$$|B_1| = |M_1|,\ |B_2| = |Y| - |M_2| = n - |M_2| = |M| - |M_2| = |M_1|.$$

Suy ra $|B_1| = |B_2|$, do đó B là một tập cân. Rõ ràng

$$f(B) = B_1 \cup (Y \setminus B_2) = M_1 \cup M_2 = M.$$

Vì có một song ánh giữa họ các tập cân và họ các tập con có n phần tử của A nên số các tập cân của A bằng số các tập con có n phần tử của A. Vậy A có tất cả C_{2n}^{n} tập cân.

Bài toán 3.2.9 ([5]). *Cho các số nguyên dương k và n thỏa mãn $k \leq n$. Viết phép toán sau: mỗi lần, lấy k số, nằm ở k vị trí liên tiếp của bộ số có thứ tự $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, rồi thay mỗi số bởi số đối của nó. Gọi T là tập gồm tất cả các bộ số có thứ tự $(t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:*

1) Nếu $(t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n) \in T$ thì $t_i \in \{-1,\ +1\}$, $\forall i = \overline{1, n}$;

2) Nếu $(t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n) \in T$ thì tồn tại một phương án thực hiện liên tiếp phép toán nói trên đối với $(t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n)$ sao cho sau hữu hạn lần ta sẽ nhận được bộ số $(1,\ 1,\ \ldots,\ 1)$.

Tìm số phần tử của tập T.

Giải. Gọi phép toán đã cho là phép toán f. Ta có các nhận xét:

- Nhận xét 1: Sau một số chẵn lần thực hiện, f cho cùng một nhóm k số liên tiếp của bộ $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, giá trị của k số đó không thay đổi.

- Nhận xét 2: Với mỗi bộ $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ đều chỉ có $n-k+1$ nhóm khác nhau, mà mỗi nhóm gồm đúng k số nằm liên tiếp trong bộ.

Từ các nhận xét trên suy ra, mỗi phương án thực hiện liên tiếp một số hữu hạn lần f đối với bộ số $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ sẽ cho ta một bộ có thứ tự các số $(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n-k+1})$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

i) $a_i \in \{0;\ 1\}$, $\forall i = \overline{1, n-k+1}$;

ii) a_i bằng số lần đã thực hiện f cho nhóm k số:

$$x_i,\ x_{i+1},\ \ldots,\ x_{i+k-1}.$$

Hơn nữa, sau khi thực hiện phương án $(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n-k+1})$ đối với bộ

$$(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n),$$

ta sẽ được bộ:

$$\big(x_1.(-1)^{a_1},\ x_2.(-1)^{a_1+a_2},\ \ldots,\ x_k.(-1)^{a_1+a_2+\cdots+a_k},$$
$$x_{k+1}.(-1)^{a_2+a_3+\cdots+a_{k+1}},\ \ldots,\ x_{n-k+1}.(-1)^{a_{n-2k+2}+\cdots+a_{n-k+1}},\ \ldots,$$
$$x_{n-1}.(-1)^{a_{n-k}+a_{n-k+1}},\ x_n.(-1)^{a_{n-k+1}}\big).$$

Từ các lập luận trên nhận thấy: nếu đặt tương ứng mỗi bộ $(t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n) \in T$ với bộ có thứ tự $(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n-k+1})$ thỏa i), ii) và sao cho sau khi thực hiện phương án $(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n-k+1})$ đối với $(t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n)$, ta sẽ được bộ $(1,\ 1,\ \ldots,\ 1)$, thì tương ứng đó sẽ xác lập một song ánh từ tập T đến tập A gồm tất cả các bộ có thứ tự $(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n-k+1})$ thỏa mãn $a_i \in \{0;\ 1\}$, $\forall i = \overline{1, n-k+1}$.

Do đó: $|T| = |A| = 2^{n-k+1}$.

Bài toán 3.2.10 ([7])**.** *Hỏi từ các số* 1, 2, 3, 4, 5 *có thể lập được bao nhiêu số có* 10 *chữ số thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:*

1) Trong mỗi số, mỗi chữ số có mặt đúng hai lần;

2) Trong mỗi số, hai chữ số giống nhau không đứng cạnh nhau.

Giải. Gọi s là số các số cần tìm và A là tập gồm tất cả các số có 10 chữ số lập được từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 thỏa mãn điều kiện 1) của đề bài. Với mỗi $i = \overline{1, 5}$, ký hiệu A_i là tập gồm tất cả các số thuộc A, mà trong mỗi số đều có hai chữ số i đứng cạnh nhau. Khi đó, theo Nguyên lý bù trừ, ta có:

$$s = \left|A \setminus \bigcup_{i=1}^{5} A_i\right| = |A| - \left|\bigcup_{i=1}^{5} A_i\right| = |A| - \sum_{i=1}^{5}|A_i| + \sum_{1\le i_1<i_2\le 5}|A_{i_1}\cap A_{i_2}| -$$
$$- \sum_{1\le i_1<i_2<i_3\le 5}|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3}| + \sum_{1\le i_1<i_2<i_3<i_4\le 5}|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3}\cap A_{i_4}| -$$
$$- \left|\bigcap_{i=1}^{5} A_i\right|. \tag{3.1}$$

Ta có:

$$|A| = \frac{10!}{2^5}. \tag{3.2}$$

Xét k bất kì thuộc tập $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ và xét bộ $(i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_k)$ bất kì thỏa mãn $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le 5$. Gọi T là tập gồm tất cả các số có $(10-k)$ chữ số, lập được từ các chữ số $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ mà trong mỗi số: mỗi chữ số $i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_k$ đều có mặt đúng một lần, còn các chữ số khác, mỗi chữ số có mặt đúng hai lần. Đặt tương ứng mỗi số $a \in A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}$, với số nhận được từ a bằng cách bỏ đồng thời ở a một chữ số i_1, một chữ số i_2, ..., một chữ số i_k.

Tiếp theo, ta chứng minh được tương ứng nói trên xác lập một song ánh từ $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}$ đến T. Khi đó:

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = |T| = \frac{(10-k)!}{2^{5-k}}. \tag{3.3}$$

Từ (3.1), (3.2) và (3.3), suy ra:

$$s = \frac{10!}{2^5} - C_5^1.\frac{9!}{2^4} + C_5^2.\frac{8!}{2^3} - C_5^3.\frac{7!}{2^2} + C_5^4.\frac{6!}{2^1} - \frac{5!}{2^0} = 39480.$$

Từ nội dung Bài toán 3.2.10, nếu thay các số $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ bởi 5 màu khác nhau và "số có 10 chữ số" bởi "đa giác đều 10 đỉnh", ta được bài toán "tô màu các đỉnh của đa giác" như sau:

Bài toán 3.2.11. *Người ta tô tất cả các đỉnh của một đa giác đều* 10 *đỉnh bởi* 5 *màu khác nhau sao cho các điều kiện sau được đồng thời thỏa mãn:*

1) Mỗi đỉnh được tô bởi một màu;

2) Mỗi màu được dùng để tô cho đúng hai đỉnh không kề nhau.

Hai cách tô màu thỏa mãn các điều kiện trên được gọi là tương đương nếu cách tô màu này có thể nhận được từ cách tô màu kia nhờ một phép quay quanh tâm của đa giác đều đã cho.

Hỏi có tất cả bao nhiêu cách tô màu đôi một không tương đương?

Giải. Tương tự Bài toán 3.2.10, ta có số cách tô màu đôi một không tương đương là 39480.

Tổng quát hóa Bài toán 3.2.11, ta được Bài toán 3.2.12:

Bài toán 3.2.12 ([7])**.** *Cho số nguyên $n \geq 2$ và cho một đa giác đều $2n$ đỉnh. Người ta tô tất cả các đỉnh của đa giác đều đó bởi n màu sao cho các điều kiện sau được đồng thời thỏa mãn:*

1) Mỗi đỉnh được tô bởi một màu;

2) Mỗi màu được dùng để tô cho đúng hai đỉnh không kề nhau.

Hai cách tô màu thỏa mãn các điều kiện trên được gọi là tương đương nếu cách tô màu này có thể nhận được từ cách tô màu kia nhờ một phép quay quanh tâm của đa giác đều đã cho.

Hỏi có tất cả bao nhiêu cách tô màu đôi một không tương đương?

Giải. Xuất phát từ một đỉnh nào đó, lần lượt theo chiều kim đồng hồ, ký hiệu các đỉnh của đa giác bởi $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_{2n}$. Ký hiệu các màu dùng để tô là $m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_n$ và gọi M là tập gồm tất cả n màu ấy.

Gọi $f(n)$ là số cách tô màu thỏa mãn các điều kiện 1), 2) của bài toán. Ta có: $f(n) = |A|$, với $A = \{(m_{i_1},\ m_{i_2},\ \ldots,\ m_{i_{2n}})$ có thứ tự | mỗi $m_i,\ i = \overline{1,n}$ có mặt đúng hai lần trong bộ; $m_{i_j} \neq m_{i_{j+1}},\ \forall j = \overline{1, 2n-1}\}$.

(Quy ước: $m_{i_{2n+1}} = m_{i_1}$).

Xét tập $B(n) = \{(m_{i_1},\ m_{i_2},\ \ldots,\ m_{i_{2n}})$ có thứ tự | $m_{i_j} \neq m_{i_{j+1}},\ \forall j = \overline{1, 2n-1}\}$.

Đặt $g(n) = |B(n)|$. Nhận thấy:

$$f(n) = g(n) - n.g(n-1). \tag{3.4}$$

- Tính $g(n)$: Xét các tập

$T = \{(m_{i_1},\ m_{i_2},\ \ldots,\ m_{i_{2n}})$ có thứ tự | mỗi $m_i,\ i = \overline{1,n}$ có mặt đúng hai lần trong bộ$\}$;

$T_i = \{t \in T \mid$ trong đó t có m_i chiếm hai vị trí liên tiếp$\},\ i = \overline{1,n}$.

Nhận thấy $B(n) \subset T$ và $T_i \subset T,\ \forall i = \overline{1,n}$.

Ta có $B(n) = T \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n} T_i$. Suy ra:

$$g(n) = |B(n)| = |T| - \left|\bigcup_{i=1}^{n} T_i\right| = |T| - \sum_{i=1}^{n} |T_i| + \sum_{1\le i_1<i_2\le n} |T_{i_1} \cap T_{i_2}| - \cdots$$

$$\cdots + (-1)^k. \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} \left|\bigcap_{j=1}^{k} T_{i_j}\right| + \cdots + (-1)^n \left|\bigcap_{i=1}^{n} T_i\right|.$$

Ta có $|T| = \dfrac{(2n)!}{2^n}$.

Xét k bất kì thuộc tập $\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ và xét bộ $(i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_k)$ bất kì thỏa mãn $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$.

Đặt tương ứng mỗi $b \in \bigcap\limits_{j=1}^{k} T_{i_j}$ với bộ nhận được từ b bằng cách bỏ đồng thời khỏi b một phần tử m_{i_1}, một phần tử m_{i_2}, ..., một phần tử m_{i_k}.

Ta chứng minh được rằng tương ứng nói trên xác lập một song ánh từ tập $\bigcap\limits_{j=1}^{k} T_{i_j}$ đến tập V gồm tất cả các bộ có thứ tự $(m_{i_1},\ m_{i_2},\ \ldots,\ m_{i_{2n-k}})$ mà trong mỗi bộ thì:

+ mỗi m_{i_j}, $j = \overline{1,k}$, có mặt đúng một lần;

+ mỗi $m_i \in M \setminus \{m_{i_1},\ m_{i_2},\ \ldots,\ m_{i_k}\}$ có mặt đúng hai lần.

Từ đó suy ra: $\left| \bigcap\limits_{j=1}^{k} T_{i_j} \right| = |V| = \dfrac{(2n-k)!}{2^{n-k}}$.

Do đó:

$$g(n) = \frac{(2n)!}{2^n} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k . \frac{(2n-k)!}{2^{n-k}} . C_n^k. \tag{3.5}$$

Suy ra:

$$\begin{aligned} g(n-1) &= \frac{(2n-2)!}{2^{n-1}} + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k . \frac{(2n-2-k)!}{2^{n-1-k}} . C_{n-1}^k \\ &= -\sum_{k=1}^{n} (-1)^k . \frac{(2n-1-k)!}{2^{n-k}} . C_{n-1}^{k-1}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

- Tính $f(n)$: Thay (3.5), (3.6) vào (3.4), ta được:

$$f(n) = 2n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k . \frac{(2n-1-k)!}{2^{n-k}} . C_n^k.$$

Nhận xét rằng: mỗi cách tô màu mà tồn tại $k \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ sao cho A_k và A_{k+n} khác màu, đều có đúng $2n$ cách tô màu tương đương với nó; còn mỗi cách tô màu mà A_k và A_{k+n} cùng màu, $\forall k = \overline{1,n}$, đều có đúng n cách tô màu tương đương với nó. Hơn nữa, nhận thấy, có tất cả $n!$ cách tô màu mà trong mỗi cách đều có A_k và A_{k+n} cùng màu, $\forall k = \overline{1, n}$.

Từ đó suy ra, nếu ký hiệu $\varphi(n)$ là số cách tô màu đôi một không tương đương thì:

$$\varphi(n) = \frac{f(n) - n!}{2n} + \frac{n!}{n} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k . \frac{(2n-1-k)!}{2^{n-k}} . C_n^k + \frac{1}{2}(n-1)!.$$

Bài toán 3.2.13 ([6]). *Một hoán vị* $\{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{2n}\}$ *của tập hợp* $\{1,\ 2,\ \ldots,\ 2n\}$, $(n \in \mathbb{Z}^+)$ *được gọi là có tính chất* $\mathcal{P}$ *nếu* $|x_i - x_{i+1}| = n$, *với ít nhất một* $i \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ 2n-1\}$.

Chứng minh rằng, với mỗi số n, số hoán vị có tính chất $\mathcal{P}$ *lớn hơn số hoán vị không có tính chất* $\mathcal{P}$.

Giải. Đặt $M = \{1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ n+1,\ n+2,\ \ldots,\ 2n\}$.

Lưu ý rằng $|1 - (n+1)| = n,\ |2 - (n+2)| = n,\ \ldots,\ |k - (n+k)| = n,\ k = \overline{1, n}$.

Gọi A_k là tập tất cả các hoán vị của M sao cho trong các hoán vị đó, hai phần tử k và $k+n$ đứng kề nhau ($k = \overline{1, n}$).

Gọi A là tập tất cả các hoán vị có tính chất $\mathcal{P}$.

Ta có: $A = \bigcup\limits_{1 \le k \le n} A_k$.

Khi đó, theo Nguyên lý bù trừ, ta có:

$$\begin{aligned} |A| &= \left| \bigcup_{1 \le k \le n} A_k \right| \\ &= \sum_{1 \le k \le n} |A_k| - \sum_{1 \le k < h \le n} |A_k \cap A_h| + \sum_{1 \le k < h < m \le n} |A_k \cap A_h \cap A_m| - \cdots \end{aligned}$$

Vì tổng trên là dãy số hạng đơn điệu giảm và đan dấu nhau nên suy ra:

$$|A| \ge \sum_{1 \le k \le n} |A_k| - \sum_{1 \le k < h \le n} |A_k \cap A_h|. \tag{3.7}$$

+ Tính $|A_k|,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$: Nhận thấy, $|A_k|$ là số các hoán vị của M sao cho trong các hoán vị đó, hai phần tử k và $k+n$ đứng kề nhau.

Giả sử ta "trói" hai phần tử k và $k+n$ lại và xem như một phần tử. Khi đó, tập M' còn lại $2n-1$ phần tử. Do đó, số các hoán vị của M' là $(2n-1)!$. Vì có hai vị trí giữa k và $k+n$ (k đứng trước hoặc sau $k+n$) nên:

$$|A_k| = 2[(2n-1)!]. \tag{3.8}$$

+ Tính $|A_k \cap A_h|$, $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$; $h = 2,\ 3,\ \ldots,\ n$: Nhận thấy $|A_k \cap A_h|$ là số các hoán vị của M sao cho trong các hoán vị đó, hai phần tử $k,\ k+n$ và $h,\ h+n$ đứng kề nhau.

Giả sử ta cũng "trói" hai phần tử $k,\ k+n$ lại và "trói" hai phần tử $h,\ h+n$ lại, xem những cặp này là một phần tử. Khi đó, tập M'' có $2n-2$ phần tử. Do đó, có $(2n-2)!$ hoán vị. Vì mỗi cặp $k,\ k+n$ và $h,\ h+n$ có hai vị trí (trước, sau). Khi đó:

$$|A_k \cap A_h| = 4[(2n-2)!]. \tag{3.9}$$

Thay (3.8), (3.9) vào (3.7), ta có:

$$|A| \geq \sum_{1 \leq k \leq n} \{2[(2n-1)!]\} - \sum_{1 \leq k < h \leq n} \{4[(2n-2)!]\}. \tag{3.10}$$

Các số trong ngoặc { } không chứa k, nên là hằng số trong các tổng này. Hơn nữa:

+ Từ 1 đến n có n số hạng theo chỉ số k;

+ Với $1 \leq k < h \leq n$, có $(n-1)+(n-2)+\cdots+1 = \dfrac{n(n-1)}{2}$ cặp số hạng $(k,\ h)$ theo chỉ số k và h, $k < h$.

Vậy thay vào (3.10), ta được:

$$|A| \geq n2[(2n-1)!] - \frac{n(n-1)}{2}.4[(2n-2)!] = 2n^2[(2n-2)!] > \frac{(2n)!}{2},$$

với $\dfrac{(2n)!}{2}$ là nửa số hoán vị toàn phần cả có tính chất $\mathcal{P}$ và không có tính chất $\mathcal{P}$.

Thật vậy,

$$\begin{aligned} &2n^2[(2n-2)!] > \frac{(2n)!}{2} \\ \Leftrightarrow\ &4n^2[(2n-2)!] > (2n-2)!(2n-1)(2n) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 4n^2 > (2n-1)(2n)$$
$$\Leftrightarrow 4n^2 > 4n^2 - 2n$$
$$\Leftrightarrow 2n > 0 \text{ (hiển nhiên)}.$$

Ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 3.2.14 ([8] *Bài toán chia kẹo của Euler*)**.** *Cho k, n là các số nguyên dương. Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình*

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k. \tag{3.11}$$

Giải. Ta xây dựng một ánh xạ từ tập hợp A các nghiệm nguyên không âm của (3.11) với tập hợp B các xâu nhị phân độ dài $n+k-1$ với k bit 1 và $n-1$ bit 0 như sau

$$(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) \longmapsto 1\ldots101\ldots101\ldots1\ldots01\ldots1,$$

trong đó có x_1 số 1 liên tiếp, sau đó đến một số 0, sau đó đến x_2 số 1 liên tiếp, lại đến một số 0, ..., cuối cùng là x_n số 1 liên tiếp.

Ta chứng minh được ánh xạ này là một song ánh. Từ đó, ta có

$$|A| = |B| = C_{n+k-1}^{n-1}.$$

Bài toán 3.2.15 ([8])**.** *Có n người xếp thành một hàng dọc. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra k người sao cho không có hai người liên tiếp được chọn?*

Giải. Ta đánh số n người bằng các số thứ tự $1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Một cách chọn thích hợp chính là một bộ số $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k \in \mathbb{N}$, sao cho $1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_k \leq n$ thỏa mãn điều kiện $a_{i+1} - a_i > 1,\ \forall i = \overline{1, k-1}$, tức là $a_{i+1} - a_i \geq 2,\ \forall i = \overline{1, k-1}$.

Vậy ta cần tìm số phần tử của tập hợp

$$A = \{(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k) \mid 1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_k \leq n,\ a_{i+1} - a_i \geq 2,$$

với $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k-1\}$.

Xét ánh xạ

$$f((a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k)) = (b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_k),$$

với $b_i = a_i - i + 1,\ \forall i = \overline{1, k}$.

Ta có

1) $b_1 = a_1 \geq 1$;

2) $b_{i+1} - b_i = (a_{i+1} - (i+1) + 1) - (a_i - i + 1) = a_{i+1} - a_i - 1 > 0,\ \forall i = \overline{1, k-1}$;

3) $b_k = a_k - k + 1 \leq n - k + 1$.

Suy ra $(b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_k)$ là phần tử của tập hợp B, với tập hợp B được xác định như sau

$$B = \{(b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_k) \mid 1 \leq b_1 < b_2 < \cdots < b_k \leq n - k + 1\}.$$

Nhận thấy f là một đơn ánh. Ngoài ra, ánh xạ $g((b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_k)) = (a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k)$, với $a_i = b_i + i - 1,\ \forall i = \overline{1, k}$ cho chúng ta một đơn ánh từ B vào A.

Vậy

$$|A| = |B| = C_{n-k+1}^{k}.$$

KẾT LUẬN

Luận văn đã đạt được một số kết quả sau đây:

1. Tóm tắt lý thuyết về Nguyên lý bù trừ và việc áp dụng nguyên lý để giải một số dạng toán khó, trong đó có những bài toán mà việc quy chúng về lý thuyết tập hợp để áp dụng nguyên lý này là một trong những cách giải mang tính sáng tạo. Luận văn đưa ra khá nhiều bài toán minh họa, trong đó có một số đề thi chọn học sinh giỏi quốc gia và quốc tế.

2. Giới thiệu tóm tắt về lý thuyết của phương pháp phân hoạch tập hợp. Việc áp dụng phương pháp này một cách phù hợp sẽ giúp cho việc tìm ra lời giải đúng và độc đáo cho một bài toán khó. Luận văn đưa ra khá nhiều bài toán minh họa, trong đó có một số đề thi chọn học sinh giỏi quốc gia và quốc tế. Đây cũng là phần đóng góp của luận văn.

3. Đề cập đến một phương pháp đếm gần gũi nhất với chương trình Toán phổ thông: phương pháp sử dụng ánh xạ. Điều quan trọng của phương pháp này là kỹ năng thiết lập một song ánh giữa hai tập hợp sao cho phù hợp với từng bài toán. Luận văn đưa ra khá nhiều bài toán minh họa, trong đó có một số đề thi chọn học sinh giỏi quốc gia và quốc tế. Đây cũng là phần đóng góp của luận văn.

4. Ngoài ra, quá trình giải bài toán theo phương pháp này cũng thường lồng ghép với nhiều nguyên lý đếm và phương pháp đếm khác, chẳng hạn Nguyên lý bù trừ, phương pháp thiết lập hệ thức truy hồi, ... và được coi như là một phương pháp tổng hợp của việc áp dụng các nguyên lý và phương pháp đếm nêu trên.

Tác giả hy vọng rằng, trong thời gian đến bản thân sẽ tiếp tục nghiên cứu nhằm hoàn thiện hơn nữa việc ứng dụng các nguyên lý đếm và phương pháp đếm trong việc giải các bài toán đếm ở phổ thông.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng Việt

[1] Bộ Giáo dục và Đào tạo (2011), "Giải bài kỳ trước", *Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ*, (số 404), tr.23.

[2] Trịnh Đào Chiến, Lê Văn Tám (2010), "Sử dụng nguyên lý bù trừ của tập hợp để giải một số dạng toán số học", *Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ*, (số 392), tr.11-13.

[3] Nguyễn Quý Dy, Nguyễn Văn Nho, Vũ Dương Thụy (2005), *Tuyển tập 200 bài thi vô địch toán - Tập 7, Tổ hợp,* NXB Giáo dục, Hà Nội.

[4] Nguyễn Văn Mậu, Trần Nam Dũng, Vũ Đình Hòa, Đặng Huy Ruận, Đặng Hùng Thắng (2008), *Chuyên đề chọn lọc Tổ hợp và Toán rời rạc,* NXB Giáo dục, Hà Nội.

[5] Một số tạp chí Toán học và Tuổi trẻ.

[6] Vũ Dương Thụy, Nguyễn Văn Nho (2003), *40 năm Olympic Toán học quốc tế,* NXB Giáo Dục, Hà Nội.

[7] Tủ sách Toán học và Tuổi trẻ (2007), *Các bài thi Olympic Toán trung học phổ thông Việt Nam (1990 - 2006),* NXB Giáo Dục, Hà Nội.

[8] Trang web www.vnmath.com.

[9] Trang web http://tailieu.vn.