BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

LÊ NGỌC THỨC

LÝ THUYẾT ANR VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành : PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 60.46.40

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Đà Nẵng - Năm 2011

Công trình được hoàn thành tại

ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

Người hướng dẫn khoa học: **TS. LÊ HOÀNG TRÍ**

Phản biện 1: TS. Nguyễn Ngọc Châu

Phản biện 2: PGS. TS. Nguyễn Gia Định

Luận văn được bảo vệ tại Hội đồng chấm luận văn tốt nghiệp Thạc sĩ khoa học họp tại Đại học Đà Nẵng vào ngày 22 tháng 10 năm 2011.

** Có thể tìm hiểu luận văn tại:*

- Trung tâm Thông tin - Học liệu, Đại học Đà Nẵng
- Thư viện trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Bổ đề Urysohn, định lý thác triển của Tietz-Urysohn là hai kết quả quan trọng trong Topo đại cương. Hai kết quả này được mở rộng bởi Dugundji vào năm 1951 và từ định lý này người ta đưa ra lý thuyết ANR, lý thuyết này đóng vai trò quan trọng trong Topo. Các lớp ANR rất rộng nó chứa lớp các đa tạp hữu hạn chiều cũng như các đa tạp vô hạn chiều, các đa diện, các tập lồi trong không gian Metric tuyến tính lồi địa phương (các không gian tuyến tính định chuẩn, không gian Banach, không gian tiền Hilbert đều là các không gian Metric tuyến tính lồi địa phương).

Tuy nhiên lớp này cũng có nhiều tính chất quan trọng liên quan đến tính chất điểm bất động, tính chất điểm bất động của các ánh xạ compact. Do đó tôi chọn đề tài là tìm hiểu lý thuyết ANR.

2. Mục đích nghiên cứu

Lý thuyết ANR và ứng dụng.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Các không gian topo, các đa tạp. Tính chất co rút tuyệt đối, tính chất co rút lân cận tuyệt đối của các không gian topo.

4. Phương pháp nghiên cứu

Dựa trên cơ sở giải tích hàm đã được học, để nghiên cứu lý thuyết ANR và những ứng dụng.

5. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài

Đề tài xây dựng lý thuyết co rút lân cận tuyệt đối của các không gian topo.

6. Cấu trúc luận văn

Phần mở đầu giới thiệu lý do chọn đề tài, đối tượng và phạm vi nghiên cứu. Luận văn gồm 3 chương.

Chương 1: Trình bày các kiến thức cơ bản của giải tích hàm để phục vụ cho việc nghiên cứu lý thuyết ANR.

Chương 2: Lý thuyết ANR và các tính chất của các ANR. Trong chương này trình bày các định lý liên quan đến các phép toán về ANR, tính chất ANR địa phương kéo theo tính chất ANR, Định lý Hanner.

Chương 3: Trình bày các ứng dụng của lý thuyết ANR. Trình bày chứng minh của các định lý: Định lý Dugundji, Định lý Borsuk về các AR, Định lý Brouwer và vận dụng để chứng minh một số hệ quả.

Chương 1

KIẾN THỨC MỞ ĐẦU

1.1. Không gian metric

1.1.1. Định nghĩa metric và không gian metric

Định nghĩa 1.1.1. *Ta gọi là không gian metric một tập hợp X cùng với một ánh xạ d từ tích Descartes $X \times X$ vào tập hợp số thực R thỏa mãn các tiên đề sau đây:*

1. $\forall\ x, y \in X, d(x, y) \geq 0, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, (tiên đề đồng nhất).

2. $\forall x, y \in X, d(x, y) = d(y, x)$, (tiên đề đối xứng);

3. $\forall x, y, z \in X, d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, (tiên đề tam giác)

Ánh xạ d gọi là metric trên X, số $d(x, y)$ gọi là khoảng cách giữa hai phần tử x và y. Các phần tử của X gọi là các điểm; các tiên đề 1), 2), 3) gọi là hệ tiên đề metric. Không gian metric được ký hiệu là (X, d) hay X.

Định nghĩa 1.1.2. *Cho không gian metric (X, d). Một tập con bất kỳ $X_0 \neq \varnothing$ của tập X cùng với metric d trên X lập thành một không gian metric. Không gian metric $(X_0, d_{X_0 \times X_0})$ gọi là không gian metric con của không gian metric đã cho.*

Định nghĩa 1.1.3. *Giả sử A, B là hai tập con trong không gian metric X. Ta nói tập A trù mật trong B, nếu $B \subset \overline{A}$.*

Nếu $A \subset X$ và $\overline{A} = X$ thì ta nói tập A trù mật khắp nơi .

Định nghĩa 1.1.4. *Không gian metric được gọi là khả ly nếu tồn tại một tập hữu hạn hay đếm được $A \subset X$ trù mật khắp nơi.*

1.1.2. Các tính chất đơn giản

Dựa vào định nghĩa, ta có các tính chất sau:

1. $\forall x_j \in X, j = 1, 2 \ldots n, n \in N^*, d(x_1, x_n) \leq \sum_{j=1}^{n-1} d(x_j, x_{j+1})$
2. $\forall x, y, u, v \in X, |d(x, y) - d(u, v)| \leq d(x, u) + d(y, v)$.
3. $\forall x, y, u \in X, |d(x, y) - d(y, u)| \leq d(x, u)$

1.1.3. Sự hội tụ trong không gian metric

Định nghĩa 1.1.5. *Cho không gian metric (X, d), dãy điểm $(x_n) \subset X$ điểm $x_0 \in X$. Dãy điểm (x_n) gọi là hội tụ tới điểm x_0 trong không gian M khi $n \to \infty$, nếu $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in N^* : \forall n \geq n_0, d(x_n, x_0) < \epsilon$.*

Ký hiệu: $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ *hay* $x_n \to x_0$ *khi* $n \to \infty$. *Điểm* x_0 *còn gọi là giới hạn của dãy* (x_n) *trong không gian* M.

1.1.4. Các không gian metric đẳng cự

Định nghĩa 1.1.6. *Cho hai không gian metric $(X, d_1), (Y, d_2)$. Ánh xạ A từ không gian metric X vào không gian metric Y gọi là đẳng cự, nếu $A : X \to Y$: $d_2(Ax, Ax') = d_1(x, x') \forall x, x' \in X$*

Định nghĩa 1.1.7. *Hai không gian metric $(X, d_1), (Y, d_2)$ gọi là đẳng cự, nếu tồn tại một ánh xạ đẳng cự từ X lên Y.*

1.1.5. Tôpô trong không gian metric

a. Hình cầu

Định nghĩa 1.1.8. *Cho không gian metric $(X, d), a \in X$ số $r > 0$. Ta gọi :*

Tập $S(a, r) = \{x \in X : d(x, a) < r\}$ là hình cầu mở tâm a, bán kính r

Tập $S'(a, r) = \{x \in X : d(x, a) \leq r\}$ là hình cầu đóng tâm a, bán kính r

b. Lân cận

Định nghĩa 1.1.9. *Cho không gian metric (X, d) ta gọi mỗi lân cận của điểm $x \in X$ trong không gian X một hình cầu mở tâm x bán kính $r > 0$ nào đấy.*

c. Tập mở và tập đóng

Định nghĩa 1.1.10. *Cho không gian metric (X, d) và tập $A \subset X$. Tập A gọi là tập mở trong không gian X, nếu mọi điểm thuộc A đều là diểm trong của A, hay nói cách khác, nếu điểm $x \in A$, thì tồn tại một lân cận của x bao hàm trong A.*

Nhận xét 1.1.1. *Trong không gian metric bất kỳ, mọi hình cầu mở là tập mở, mọi hình cầu đóng là tập đóng.*

d. Phần trong và bao đóng

Định nghĩa 1.1.11. *Cho không gian metric (X, d) và tập $A \subset X$. Hợp của tất cả các tập mở chứa trong A gọi là phần trong của A.*
Ký hiệu: *là $\overset{\circ}{A}$ hay $intA$.*
Giao của tất cả các tập đóng chứa A gọi là bao đóng của A.
ký hiệu: *$\overline{A}$ hay $\parallel A \parallel$.*

1.1.6. Ánh xạ liên tục

Định nghĩa 1.1.12. *Ánh xạ f gọi là liên tục tại điểm $x_0 \in X$, nếu $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X$ mà $d_1(x, x_0) < \delta$ thì $d_2(f(x), f(x_0)) < \epsilon$.*

Mệnh đề 1.1.1. *Ánh xạ f gọi là liên tục tại điểm $x_0 \in X$, nếu với mọi dãy điểm $(x_n) \subset X$ hội tụ tới điểm x_0 trong X, dãy điểm $(f(x_n))$ hội tụ tới $(f(x_0))$ trong Y.*

Định nghĩa 1.1.13. *Ánh xạ f gọi là liên tục đều trên tập $A \subset X$ nếu : $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ sao cho $\forall x, x' \in A$ mà $d_1(x, x') < \delta$ thì*
$d_2(f(x_0), f(x)) < \epsilon$.

1.1.7. Nguyên lý thác triển liên tục

Định nghĩa 1.1.14 (Ánh xạ hạn chế). *Cho X, Y là các tập hợp $f : X \to Y, A \subset X$. Ta đặt*

$$f_{|A} : A \to X \text{ xác định bởi}$$
$$f_{|A}(a) = f(a), \forall a \in A$$

Khi đó $f_{|A}$ được gọi là hạn chế của f trên A.

Định nghĩa 1.1.15. *Cho không gian metric (X, d) và hai tập con khác rỗng A, B của X. Tập A gọi là trù mật trong tập B, nếu với mỗi phần tử $x \in B, \forall \epsilon > 0$ thì $B(x, \epsilon) \cap A \neq \varnothing$. Hay nói cách khác $\forall x \in B, \forall \epsilon > 0), \exists y \in A$ sao cho $d(y, x) < \epsilon$.*

Khi tập $B = X$ thì tập A gọi là trù mật khắp nơi trong không gian X.

Định lý 1.1.1 (Nguyên lý thác triển liên tục.). *Cho không gian metric (X, d_1), không gian metric đầy đủ (Y, d_2), tập $A \subset X$ trù tập khắp nơi trong không gian X. Nếu ánh xạ f từ tập A vào không gian Y là liên tục đều trên tập A thì tồn tại duy nhất một ánh xạ liên tục đều F từ toàn bộ X vào Y sao cho $F(x) = f(x), \forall x \in A$. Ánh xạ F gọi là thác triển liên tục của ánh xạ f từ A lên toàn bộ X.*

1.2. Không gian tuyến tính định chuẩn

1.2.1. Khái niệm không gian vectơ

Định nghĩa 1.2.1. *Một không gian vectơ X trên một trường K là một tập hợp khác rỗng X, có trang bị hai phép toán cộng + và phép nhân ngoài nghiệm đúng các tiên đề sau:*

1. $(X, +)$ là một nhóm Abel, nghĩa là : với mỗi cặp phần tử $(x.y) \in X \times X$ cho ứng với một phần tử của X kí hiệu $x + y$, gọi là tổng của x và y, thỏa mãn:

a. $x + y = y + x$ với mọi $x, y \in X$

b. $(x + y) + z = x + (y + z)$ với mọi $x, y, z \in X$

c. Tồn tại phần tử $0 \in X$, gọi là phần tử không sao cho

$$\forall x \in X, x + 0 = 0 + x = x$$

d. Với mọi $\forall x \in X$ *tồn tại một phần tử kí hiệu* $-x \in X$, *gọi là phần tử đối của* x *sao cho* $x + (-x) = 0$.

2. X cùng phép nhân vectơ vô hướng trên X, tức là mỗi cặp $(\alpha, x) \in K \times X$ *ứng với một phần tử của X, kí hiệu* αx, *thỏa mãn:*

a. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ *với mọi* $\alpha \in K, x, y \in X$

b. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ *với mọi* $\alpha, \beta \in K, x \in X$

c. $\alpha(\beta x) = (\beta\alpha)x,$ *với mọi* $\alpha, \beta \in K, x \in X$

d. $\forall x \in X, 1.x = x$

Các phần tử của X gọi là các vectơ, $\alpha \in K$ *gọi là vô hướng*

1.2.2. Khái niệm không gian tuyến tính định chuẩn

Định nghĩa 1.2.2. *Ta gọi không gian định chuẩn (hay không gian tuyến tính định chuẩn hay không gian vectơ định chuẩn) là không gian tuyến tính X trên trường P (P = R hoặc P = C) cùng với một ánh xạ p từ X vào tập số thực R. thỏa mãn các tiên đề sau đây:*

1. $\forall x \in X, p(x) \geq 0, p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2. $\forall x \in X, \forall \alpha \in P, p(\alpha x) = \alpha p(x)$

3. $\forall x, y \in X, p(x + y) \leq p(x) + p(y)$

Số $p(x)$ *gọi là chuẩn của véctơ x và ta còn kí hiệu là* $\| x \|$.

Ta cũng kí hiệu không gian định chuẩn là X.

Các tiên đề 1), 2), 3) gọi là hệ tiên đề chuẩn.

1.2.3. Toán tử tuyến tính bị chặn

Định nghĩa 1.2.3. *Cho hai không gian tuyến tính X và Y trên trường P (P là trường số thực R hoặc trường số phức C). Ánh xạ A từ không gian X vào không gian Y gọi là tuyến tính, nếu ánh xạ A thỏa mãn các điều kiện:*

1. $\forall x, x' \in X, A(x + x') = Ax + Ax'$

2. $\forall x \in X, \forall \alpha \in P, A(\alpha x) = \alpha Ax$

Định nghĩa 1.2.4. *Cho không gian định chuẩn X và Y. Toán tử tuyến tính A từ không gian X vào không gian Y gọi là bị chặn, nếu tồn tại hằng số* $C > 0$ *sao cho:* $\| Ax \| \leq C \| x \|, \forall x \in X$ *(*)*

Định nghĩa 1.2.5. *Cho A là toán tử tuyến tính bị chặn từ không gian định chuẩn Y. Số* $C_0 = inf\{C > 0 | \| Ax \| \leq C \| x \|; \forall x \in X\}$ *gọi là chuẩn của toán tử A và kí hiệu là* $\| A \|$.

Từ định nghĩa dễ thấy chuẩn của toán tử có các tính chất:

1. $\forall x \in X), ||Ax|| \leq ||A||.||x||$

2. Nếu $K \geq 0$ *mà* $\| Ax \| \leq K \| x \|; \forall x \in X$ *thì* $\| Ax \| \leq K$.

1.2.4. Các nguyên lý cơ bản của giải tích hàm

Định nghĩa 1.2.6. *Ánh xạ A từ không gian metric* (X, d_1) *vào không gian metric* (Y, d_2)*. Ánh xạ A goị là ánh xạ mở, nếu ánh xạ A biến mỗi tập mở trong X thành tập mở trong Y.*

Định lý 1.2.1 (Nguyên lý ánh xạ mở Banach)**.** *Nếu A là toán tử tuyến tính liên tục ánh xạ không gian Banach X lên không gian Banach Y, thì A là ánh xạ mở.*

Định nghĩa 1.2.7. *Cho hai không gian định chuẩn* X, Y *và ánh xạ A từ không gian X vào không gian Y. Ta gọi đồ thị của toán tử A, ký hiệu* $G(A)$*, là tập: G(A)=*$\{(x, Ax) : x \in X\} \subset X \times Y$*. Nếu đồ thị* $G(A)$ *của toán tử A là tập đóng trong không gian định chuẩn tích* $X \times Y$ *thì toán tử A gọi là toán tử đóng.*

Định lý 1.2.2 (Nguyên lý đồ thị đóng Banach)**.** *Cho toán tử tuyến tính A từ không gian Banach X vào không gian Banach Y. Toán tử A liên tục khi và chỉ khi A là toán tử đóng*

Định nghĩa 1.2.8. *Cho họ* $(A_t)_{t \in T}$ *gồm các toán tử tuyến tính* A_t *từ không gian tuyến tính định chuẩn X vào Y. Họ* $(A_t)_{t \in T}$ *gọi là bị chặn từng điểm, nếu với mỗi* $x \in X$ *tập* $\{A_t x\}_{t \in T}$ *là tập bị chặn Y. Họ* $(A_t)_{t \in T}$ *gọi là bị chặn đều, nếu tập* $\{\| A_t \| | t \in T\}$ *bị chặn.*

Định lý 1.2.3 (Nguyên lý bị chặn Banach- Steinhaus)**.** *Nếu họ* $(A_t)_{t\in T}$ *các toán tử tuyến tính liên tục từ không gian Banach* X *vào không gian định chuẩn* Y *bị chặn từng điểm, thì họ đó bị chặn đều.*

Định lý 1.2.4 (Nguyên lý thác triển Hahn-Banach)**.** *Mọi phiếm hàm tuyến tính liên tục* f *xác định trên không gian tuyến tính con* X_0 *không tầm thường của không gian định chuẩn* X *đều có thể thác triển trên toàn không gian* X *với chuẩn không đổi, nghĩa là có thể xây dựng được phiếm hàm tuyến tính liên tục* F *xác định trên toàn không gian* X *sao cho:*

1. $F(x) = f(x) \forall x \in X_0$.

2. $\| F \| = \| f \|$

1.3. Không gian topo

1.3.1. Định nghĩa không gian topo

Định nghĩa 1.3.1. *Không gian topo là một cặp* (X, τ)*, trong đó* X *là một tập hợp,* τ *là một họ các tập con của* X *thỏa mãn*

1. $\varnothing \in \tau, X \in \tau$.

2. $U_1, U_2 \in \tau \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \tau$.

3. $\forall t \in T, U_t \in \tau \Rightarrow \bigcup\limits_{t\in T} U_t \in \tau$.

Mỗi phần tử của τ *được gọi là một tập mở của* X

Họ τ *được gọi là một topo trên* X.

Mỗi phần tử của τ được gọi là một tập mở của X.

Nhận xét 1.3.1. *Từ định nghĩa trên ta có:*

i. $\varnothing$ *và* X *là những tập mở.*

ii. Giao của hai tập mở là tập mở.

iii. Hợp của một họ tùy ý tập mở là tập mở.

1.3.2. Lân cận, tập đóng, tập mở

Nếu x là một điểm của không gian X và U là một tập hợp mở mà U chứa x thì U gọi là một lân cận mở của điểm x và với $x \in X, U$ gọi là lân cận của x nếu tồn tại tập mở V sao cho $x \in V \subset U$.
Giả sử A là một tập hợp con của không gian X và $x \in A$ gọi là một điểm trong của A nếu tồn tại một lân cận U của điểm x chứa trong A.
Giả sử B là một họ tập hợp mở của không gian topo (X, τ), tức là $B \subset \tau.B$ gọi là một cơ sở của không gian topo (X, τ) (hoặc cơ sở của topo τ) nếu mỗi tập hợp mở trong X là hợp của một họ nào đó những tập hợp thuộc B.

Định lý 1.3.1. *Mỗi cơ sở B của một không gian topo (X, τ) có các tính chất sau:*
a. $\forall U_1 \in B, \forall U_2 \in B, \forall x \in U_1 \cap U_2, \exists U \in B$ sao cho $x \in U \subset U_1 \cap U_2$.
b. $\forall x \in X, \exists U \in B$ sao cho $x \in U$.

Định nghĩa 1.3.2. *Giả sử x là một điểm của không gian X. Họ $B(x)$ những lân cận của x gọi là một cơ sở của không gian topo (X, τ) (hoặc của topo τ) tại điểm x nếu với mọi lân cận V của x, tồn tại một tập hợp $U \in B(x)$ sao cho $U \subset V$.*

1.3.3. Ánh xạ liên tục, không gian đồng phôi

Cho hai không gian topo (X, τ_X) và (X, τ_Y). Ánh xạ $f : X \to Y$ gọi là liên tục tại điểm x_0 nếu với mỗi lân cận V của điểm $f(x_0) \in Y$ tồn tại một lân cận U của x_0 sao cho $f(U) \subset V$.
f gọi là liên tục (trên X) nếu f liên tục tại mỗi điểm x của X.

Định lý 1.3.2. *Giả sử $f : X \to Y$ là một ánh xạ từ không gian topo X vào không gian topo $Y, \beta(x)$ là một cơ sở của không gian topo X tại điểm $x, \tau[f(x)]$ là một cơ sở của Y tại điểm $f(x)$. Khi đó f liên tục tại điểm x khi và chỉ khi với mỗi $V \in D[f(x)]$, tồn tại một $U \in \beta(x)$ sao cho $f(U) \subset V$.*

Định lý 1.3.3. *Ánh xạ $f : X \to Y$ liên tục khi và chỉ khi với mỗi $V \in \tau_Y$ ta đều có $f^{-1}(V) \in \tau_X$*

Định nghĩa 1.3.3. *Giả sử F là một ánh xạ từ không gian topo X vào không gian topo Y khi đó:*
F gọi là một ánh xạ mở nếu ảnh của mỗi tập hợp A mở trong X là một tập hợp mở trong Y.
F gọi là ánh xạ đóng nếu ảnh của mỗi tập hợp B đóng trong X là một tập hợp đóng trong Y.
Giả sử $f : X \to Y$ là một song ánh từ không gian topo X lên một không gian topo Y.
f gọi là phép đồng phôi nếu f và ánh xạ ngược f^{-1} của nó đều liên tục.

Định lý 1.3.4. *Nếu $f : X \to Y$ là một song ánh liên tục từ không gian topo X lên không gian topo Y thì các điều kiện sau là tương đương:*
a. f là một phép đồng phôi.
b. f là một ánh xạ mở.
c. f là một ánh xạ đóng.
Hai không gian topo X và Y gọi là đồng phôi với nhau nếu tồn tại một phép đồng phôi $f : X \to Y$ từ X lên Y.

Định nghĩa 1.3.4. *Cho (X, τ) là một không gian top, M là một tập hợp con của X. Đặt $\tau_M = \{V \subset M : V = M \cap U, U \in \tau\}$ Dễ dàng thấy rằng τ là một topo trên M. cặp (M, τ_M) gọi là không gian con của không gian topo (X, τ). τ_M được gọi là topo cảm sinh bởi topo τ.*

Định nghĩa 1.3.5. *Cho τ là topo sinh bởi metric d của X thì họ tất cả các quả cầu $B(y, \epsilon) = \{x \in A/d(x, y) < \epsilon\}$ với $y \in A$ và $\epsilon > 0$ là một cơ sở topo của τ. Ta cũng nói rằng metric d tương thích với τ.*
Một không gian topo X được gọi là khả metric nếu tồn tại một metric mà sinh ra topo của X.

Định lý 1.3.5 (Arens-Eells)**.** *Đối với mỗi không gian metric X đều tồn tại* *một phép nhúng đẳng cự vào một không gian tuyến tính định chuẩn E sao cho ảnh của X là một tập con đóng và độc lập tuyến tính của E. Hơn nữa, nếu X là không gian metric khả ly thì có thể chọn E là không gian metric khả ly.*

Bổ đề 1.3.1 (Dán)**.** *Cho X, Y là các không gian topo, $F_1, F_2, \cdots, F_n$ là một phủ đóng hữu hạn của X và $f : X \to Y$ là hàm mà*
$f_{|F_i} : F_i \to Y$ là liên tục; $\forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}$.Khi đó f liên tục.

1.3.4. Không gian con. Tích Đềcác (Descartes)

Định nghĩa 1.3.6. *Cho X là một tập hợp, $\{(Y_s, \tau_s)\}_{s\in S}$ là một họ không gian topo, $\{f_s : X \to Y_s\}_{s\in S}$ là một họ ánh xạ f_s từ X vào Y_s. Trong họ các topo trên X sao cho tất cả các ánh xạ f_s đều liên tục tồn tại một topo τ yếu nhất. Họ B tất cả các tập hợp dạng $\bigcap\limits_{i=1}^{k} f_{s_i}^{-1}(V_i)$, trong đó $s_1, s_2, \cdots, s_k \in S, V_i$ là tập hợp mở trong không gian Y_s với $i = 1, 2, \cdots, k$ là một cơ sở của không gian topo (X, τ). τ được gọi là topo đầu xác định bởi họ ánh xạ $\{f_s\}_{s\in S}$.*

Định nghĩa 1.3.7. *Tập hợp $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$, với topo đầu τ xác định bởi họ ánh xạ $\{p_s\}_{s\in S}$ gọi là tích Đề các của họ không gian topo $\{(X_s, \tau_s)\}_{s\in S}$. τ còn được gọi là topo Tykhonoff.*

1.3.5. Tổng trực tiếp

Định nghĩa 1.3.8. *Tập hợp $\bigcup\limits_{s\in S} X_s$ cùng với topo cuối τ xác định bởi họ ánh xạ $\{i_s\}_{s\in S}$ gọi là tổng trực tiếp của họ không gian topo $\{(X_s, \tau_s)\}_{s\in S}$. Tổng trực tiếp của họ không gian topo $\{(X_s, \tau_s)\}_{s\in S}$ được kí hiệu là $\oplus \underset{s\in S_s}{X}$.*

1.4. Thác triển liên tục

Bổ đề 1.4.1. *Cho A, B là hai tập mở trong $X, A \cup B = X, A \cap B = \varnothing$ và $f : A \to Y$ là ánh xạ liên tục và $g : B \to Y$ là ánh xạ liên tục.*
Khi đó ta có hàm số $f^* : A \cup B \to Y$ xác định bởi :

$$x \mapsto f^*(x) = \begin{cases} f(x) \text{ với } x \in A \\ g(x) \text{ với } x \in B \end{cases}$$

thì f^* là ánh xạ liên tục

Bổ đề 1.4.2. *Với hai tập đóng rời nhau A, B của không gian chuẩn tắc X, khi đó tồn tại hàm liên tục $f : X \to I$ sao cho: $f(x) = 0, \forall x \in A$ và $f(y) = 1, \forall y \in B$*

Định nghĩa 1.4.1 (Ánh xạ đồng luân)**.** *Cho $f, g : X \to Y$ là các ánh xạ liên tục, f được gọi là ánh xạ đồng luân với g nếu tồn tại ánh xạ $H : X \times I \to Y$ liên tục với $I = [0; 1]$ thỏa mãn $H(x; 0) = f(x)$ và $H(x; 1) = g(x)$, $\forall x \in X$*

Ký hiệu: $f \simeq g$

Tính chất 1.4.1. *Từ định nghĩa ta có:*

a. $f \simeq g \Rightarrow g \simeq f$

b. $f \simeq g, g \simeq h \Rightarrow f \simeq h$

Chương 2

LÝ THUYẾT ANR

2.1. Co rút lân cận tuyệt đối

Định nghĩa 2.1.1 (Định nghĩa ANR)**.** *Một không gian Y là một co rút lân cận tuyệt đối nếu:*
i. Y là một không gian khả metric.
ii. Với mỗi không gian khả metric X và mỗi tập đóng $A \subset X$ và mỗi ánh xạ liên tục $f : A \to Y$ tồn tại một lân cận U của A trong X và tồn tại ánh xạ $F : U \to Y$ liên tục sao cho $F_{|A} = f$.
Lớp của tất cả lân cận co rút tuyệt đối được định nghĩa là ANR.

Nhận xét 2.1.1. *Rõ ràng nếu Y là một ANR thì mỗi không gian X đồng phôi với X cũng là một ANR.*

Mệnh đề 2.1.1. *Cho Y là một ANR thì*
i. Mỗi tập mở trong Y cũng là một ANR
ii Bất kỳ co rút nào của Y cũng là một ANR

Mệnh đề 2.1.2. *Một tích $\prod\limits_{i=1}^{n} Y_i$ là một ANR nếu và chỉ nếu mỗi Y_i là một ANR (với Y_i là một không gian khả metric).*

Định lý 2.1.1. *Cho Y là một ANR khi và chỉ khi bất kỳ X là không gian khả metric và với ánh xạ $h : Y \to X$ là phép nhúng đồng phôi (nghĩa là $h' : Y \to h(Y)$là ánh xạ đồng phôi và xác định bởi*

$y \mapsto h'(y) = h(y)$, $h(Y)$ là đóng trong X) thì tồn tại một tập V là tập mở , $V \supset h(Y), \exists r : V \to h(Y)$ là một phép co rút.

Định nghĩa 2.1.2. *Một không gian X được gọi là một r- trội bởi không gian Y nếu tồn tại một cặp ánh xạ $s : X \to Y$ và $r : Y \to X$ thỏa mãn $r \circ s = 1_X$.*

2.2. Các AR

Khái niệm 2.2.1 (Khái niệm AR). *Một không gian khả metric Y được gọi là AR, nếu với mọi X là không gian khả metric, $\forall A \subset X, A$ là tập đóng trong X, $\forall f : A \to Y$ là ánh xạ liên tục thì tồn tại một ánh xạ $F : X \to Y$ liên tục mà $F_{|A} = f$.*

Nhận xét 2.2.1. *Lớp AR là con của lớp ANR.*

Định lý 2.2.1. *Cho Y là một AR nếu và chỉ nếu Y là một ANR và Y là không gian co rút được.*

2.3. Tính chất địa phương

Bổ đề 2.3.1 (Bổ đề ống). *Cho X là không gian metric $A \subset X$ (A không cần đóng) và V là một tập mở trong $X \times I$ sao cho $A \times I \subset V$ thì tồn tại một tập mở $U, U \supset A$ trong X sao cho $U \times I \subset V$.*

Định lý 2.3.1. *Cho Y là một ANR thì tồn tại một lân cận U của đường chéo $\triangle$ trong $Y \times Y$ và một ánh xạ liên tục $\lambda U \times I \to Y$ thỏa mãn.*

$$\begin{cases} \lambda(a,b,0) = a \\ \lambda(a,b,1) = b \qquad ,\forall (a,b) \in U, t \in I. \\ \lambda(a,a,t) = a \end{cases}$$

Hệ quả 2.3.1. *Cho Y là một ANR, (λ, U) là dữ liệu liên thông đều của Y thì $\forall a \in Y$, mọi W lân cận của a thì tồn tại một lân cận V của $a, V \subset W$ thỏa mãn $\lambda(V, V, I) \subset W$.*

Định nghĩa 2.3.1. *Không gian Y được gọi là một co rút địa phương nếu $\forall a \in Y$, mọi lân cận W của a, tồn tại lân cận V của a, $V \subset W$ và $\exists H : V \times I \to W$*

liên tục, $H(x,0) = a$ *và* $H(x,1) = x$ *với* $\forall x \in V$.

Định lý 2.3.2. *Mỗi ANR là một co rút địa phương.*

Định nghĩa 2.3.2. *Cho* $f, g : X \to Y$ *là hai ánh xạ từ không gian* X *vào không gian* Y *và cho* $\alpha = \{U_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ *là một phủ mở của* Y*. Chúng ta gọi f, g là các* $\alpha-$*đóng nếu mọi* $x \in X$*, tồn tại* $\lambda(x) \in \Lambda$*, tồn tại* $U_{\lambda(x)} \in \alpha$ *sao cho* $U_{\lambda(x)}$ *chứa cả* $f(x)$ *và* $g(x)$*.*
Chúng ta nói f, g *là* $\alpha-$*đồng luân nếu tồn tại một đồng luân*
$h : X \times I \to Y$ *liên tục sao cho* $h(x,0) = f(x)$ *và* $h(x,1) = g(x)$ *thỏa mãn* $h(x, I)$ *được chứa trong một vài* $U_{\lambda(x)}, x \in X$.
Các ánh xạ f, g *được gọi là đồng luân ổn định nếu:*
$\exists H : X \times I \to Y$ *là ánh xạ liên tục sao cho:*
$H(x,0) = f(x) v H(x,1) = g(x)$ *và nếu* $x \in X, f(x) = g(x)$ *thì*
$H(x,t) = f(x), \forall t \in [0,1]$.

Định lý 2.3.3. *Cho* Y *là một ANR thì mỗi phủ mở* $\alpha = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ *có một phủ mở* $\beta = \{V\}$ *làm mịn* α *với tính chất. Mọi không gian* $X.f, g$ *là* β*-đóng ánh xạ, thì* f, g *là* α*–đồng luân và là đồng luân–ổn định.*

2.4. Phép dán các ANR

Bổ đề 2.4.1 (Kuratowski)**.** *Cho* Y *là không gian khả metric*
$Y = Y_1 \cup Y_2$ *, ở đây* $Y_1, Y_2, Y_1 \cap Y_2$ *là ANR. Cho* X *là không gian khả metric,* $A \subset X, A$ *đóng trong* X *và ánh xạ* $f : A \to Y$ *là ánh xạ liên tục. Nếu* X *có thể biểu diễn dưới dạng* $X = B_1 \cup B_2, B_1, B_2$ *đóng trong* X *và* $f(A \cap B_1) \subset Y_1, f(A \cap B_2) \subset Y_2$ *thì tồn tại* U *mở chứa* A *trong* $X, F : U \to Y$ *liên tục và* $F_{|A} = f$.

Định lý 2.4.1 (Aronszajn- Borsuk cho tập đóng)**.** *Cho* Y *là không gian khả metric,* $Y = Y_1 \cup Y_2$ *với* Y_1, Y_2 *là đóng.*
a. Nếu $Y_1, Y_2, Y = Y_1 \cap Y_2$ *là ANR thì* Y *là một ANR.*
b. Nếu $Y_1, Y_2, Y = Y_1 \cap Y_2$ *là AR thì* Y *là một AR.*

Hệ quả 2.4.1. *Cho Y là một ANR, $B \subset Y, B$ đóng trong Y, B là ANR thì $Y \times \{0\} \cup B \times I$ là một ANR.*

Định lý 2.4.2 (Aronszajn- Borsuk cho tập mở)**.** *Cho Y là không gian khả metric, $Y = Y_1 \cup Y_2, Y_1, Y_2$ mở trong Y, nếu Y_1, Y_2 là ANR thì Y là ANR.(lưu ý: ở đây ta không cần điều kiện $Y_1 \cap Y_2$ là một ANR)*

Hệ quả 2.4.2. *Cho Y không gian khả metric, $Y = \bigcup_{i=1}^{n} U_i, U_i$ mở trong Y, U_i là ANR thì Y là ANR (đây là hệ quả suy ra trực tiếp từ định lý Aronszajn- Borsuk cho tập mở).*

Bổ đề 2.4.2. *Cho Y không gian khả metric, $Y = Y_1 \cup Y_2$ với Y_1, Y_2 đóng trong Y. Y_1, Y_2 là ANR, $Y_1 \cap Y_2 = \varnothing$ thì Y là một ANR.*

Hệ quả 2.4.3. *Hợp hữu hạn của các tập lồi, đóng khả metric trong không gian topo tuyến tính lồi địa phương là một ANR.*

Nhận xét 2.4.1. *Một tập lồi khả metric trong không gian topo tuyến tính lồi địa phương là một AR.*

2.5. Định lý Hanner

Định lý 2.5.1. *Cho Y không gian khả metric $Y = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha, U_\alpha$ mở trong Y là ANR, $U_\alpha \cap U_{\alpha'} = \varnothing$ với $\alpha \neq \alpha'$.*

Định lý 2.5.2. *Cho Y là một không gian khả metric, $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n, V_n$ mở ANR khi đó Y cũng là ANR.*

Định lý 2.5.3 (Định lý của Hanner)**.** *Cho Y là không gian khả metric thỏa mãn $\forall y \in Y$ tồn tại lân cận của y sao cho U_y là ANR thì Y là ANR.*

2.6. Tính chất đồng luân

Bổ đề 2.6.1 (Dowker)**.** *Cho X là một không gian metric $A \subset X, A$ đóng và giả thiết rằng $V \subset X \times I$ là một mở của $M = X \times \{0\} \cup A \times I$. Thì tồn tại một ánh* *xạ* $\psi : X \times I \to V$ *thỏa mãn*

$$(x,t) \mapsto \psi(x,t) = (x,t), \forall (x,t) \in M$$

Định lý 2.6.1 (Borsuk)**.** *Cho* Y *là một ANR,* X *là không gian metric đầy đủ và* $A \subset X, A$ *đóng. Cho* $f, g : A \to Y$ *là đồng luân. Nếu* f *được thác triển thành một* $F : X \to Y$ *thì* g *cũng được thác triển thành một* $G : X \to Y$ *. Hơn nữa* G *đồng luân với* F *và đồng luân này là thác triển đồng luân của* f, g*.*

Chương 3

MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA LÝ THUYẾT ANR

3.1. Một số không gian là ANR

Định nghĩa 3.1.1 (Phủ, phân hoạch, tính paracompact)**.** *Cho A là một các tập con của một không gian topo X.A được gọi là mở [đóng] nếu mỗi phần tử của A là tập mở [đóng]. A được gọi là hữu hạn địa phương [rời rạc] nếu mỗi điểm của X có một lân cận mà giao không quá hữu hạn [không quá một] các phần tử của A.A được gọi là $\varsigma-$ rời rạc nếu A có thể biểu diễn thành hợp không quá đếm được của các họ rời rạc.*

Cho Z là một tập con của X. Ta nói rằng họ A các tập con của X là một phủ của Z hay A phủ Z nếu $\underset{B\in A}{\cup} B \supset Z$. Họ A được gọi là một phủ của Z, phủ đóng, phủ hữu hạn địa phương, phủ rời rạc, phủ $\sigma-$rời rạc tương ứng nếu A phủ Z và họ A có những tính chất trên.

Cho A, B là các tập con của X (tương ứng phủ của tập $Z \supset X$). Ta nói rằng A làm mịn B nếu mỗi phần tử của A được chứa trong một phần tử của B.

Định lý 3.1.1 (Stone)**.** *Mỗi phủ mở của một không gian metric có một phủ mở hữu hạn địa phương, $\sigma-$rời rạc làm mịn nó.*

Định nghĩa 3.1.2. *Một không gian topo Hausdoff X được gọi là paracompact nếu mỗi phủ mở của X đều có một phủ mở làm mịn hữu hạn địa phương.*

Định lý 3.1.2. *Mỗi không gian metric là không gian paracompact.*

Định lý 3.1.3. *Mỗi không gian topo compact là không gian paracompact.*

Định nghĩa 3.1.3 (Phân hoạch đơn vị)**.** *Một họ B các hàm liên tục không âm trên một không gian topo X được gọi là một phân hoạch đơn vị hữu hạn địa phương nếu mỗi $x \in X$ thì có một lân cận $U(x)$ và một tập con hữu hạn $B(x)$ của B mà :*

(i) $\sum\limits_{b\in B(x)} b(y) = 1; \forall y \in U(x)$.

(ii) $b(y) = 0; \forall b \in B\backslash B(x), \forall x \in U(x)$.

Định lý 3.1.4. *Mỗi không gian topo Hausdoff X là paracompact nếu và chỉ nếu mỗi phủ mở U của X đều có một phân hoạch đơn vị hữu hạn địa phương nội tiếp trong U.*

Bổ đề 3.1.1. *Cho A, B là các tập đóng rời nhau của một không gian topo paracompact X và mỗi $x \in B$, tồn tại các tập mở U_x và V_x mà $A \subset U_x, x \in V_x, U_x \cap V_x = \varnothing$.*

Khi đó tồn tại các tập mở U, V mà $A \subset U, B \subset V$ và $U \cap V = \varnothing$.

Bổ đề 3.1.2. *Nếu W là họ các tập mở hữu hạn địa phương thì* $\underset{W^*\in W}{\cup} \overline{W^*} = \overline{\underset{W^*\in W}{\cup} W^*}$.

Bổ đề 3.1.3. *Mỗi không gian topo paracompact là chuẩn tắc.*

Bổ đề 3.1.4. *Mỗi phủ mở U của một không gian topo paracompact X có một phủ mở hữu hạn địa phương W của X mà $\{\underset{W^*\in W}{\overline{W}}\}$ làm mịn U và một phủ mở $\{V'_U\}_{U'\in U}$ của X mà $\overline{V}_{U'} \subset U'; \forall U' \in U$.*

Bổ đề 3.1.5. *Mỗi phủ mở U của một không gian topo paracompact X, đều tồn tại một phân hoạch đơn vị hữu hạn địa phương nội tiếp phủ U.*

Định lý 3.1.5 (Dugundji)**.** *Cho A là một tập con đóng khác rỗng của một không gian metric X và E là một không gian topo tuyến tính lồi địa phương. Khi đó mỗi ánh xạ liên tục $f : A \to E$ đều có một thác triển liên tục $L(f) : X \to E$ mà $L(f)(X) \subset conv f(A)$.*

Bổ đề 3.1.6. *Cho A là một tập con đóng thực sự của một không gian metric X (có nghĩa là $\varnothing \neq A \subset X$), d là một metric trên X. Khi đó tồn tại một họ $\{U_s, a_s\}_{s\in S}$ mà*

(1) $U_s \subset X \backslash A; \forall s \in S$.

(2) $\{U_s\}_{s\in S}$ *là một phủ mở hữu hạn địa phương của* $X\backslash A$.

(3) Nếu $x \in U_s$ *thì* $d(x, a_s) \leq 2d(x, A); \forall s \in S$.

Định nghĩa 3.1.4. *Nếu* A *là một tập con đóng thực sự của một không gian metric* $X(\varnothing \neq A \neq X)$. *Khi đó mỗi họ bất kỳ* $\{U_s, a_s\}_{s\in S}$ *thỏa mãn các điều kiện (1), (2) và (3) của Bổ đề 3.1.1, được gọi là một hệ thống Dugundji cho* $X\backslash A$.

Hệ quả 3.1.1. *Mỗi tập lồi trong một không gian metric tuyến tính lồi địa phương đều là một AR.*

Hệ quả 3.1.2. *Mỗi tập lồi trong một không gian metric tuyến tính lồi địa phương đều là một ANR.*

Mệnh đề 3.1.1. *Một đa tạp không biên hữu hạn chiều đều là một ANR.*

Mệnh đề 3.1.2. *Mỗi đa tạp có biên hữu hạn chiều đều là một ANR.*

Mệnh đề 3.1.3. *Các đa tạp vô hạn chiều mô hình trên các không gian tuyến tính định chuẩn, không gian Frechet đều là các ANR.*

3.2. Định lý Borsuk về các ANR

Định lý 3.2.1. *Cho* X *là một không gian topo có tính chất điểm bất động và* Y *là một không gian topo đồng phôi với* X. *Khi đó* Y *cũng có tính chất điểm bất động.*

Bổ đề 3.2.1 (Borsuk)**.** *Cho* X *là một không gian topo có tính chất điểm bất động và* A *là một co rút của* X. *Khi đó* A *cũng có tính chất điểm bất động.*

Định lý 3.2.2 (Brouwer)**.** *Mỗi quả cầu đơn vị đóng trong không gian* R^n *đều có tính chất điểm bất động.*

Bổ đề 3.2.2. *Không thể tồn tại một hàm liên tục* f *từ quả cầu đơn vị* $B^n = \{x \in R^n / \parallel x \parallel \leq 1\}$ *của không gian Euclide* $n-$ *chiều lên mặt cầu đơn vị* $S^{n-1} = \{x \in R^n / \parallel x \parallel = 1$ *và thỏa mãn điều kiện* $f(x) = x; \forall x \in S^{n-1}$.

Bổ đề 3.2.3. *Nếu tồn tại một hàm liên tục từ B^n lên S^{n-1} mà giữ cố định mỗi điểm của S^{n-1} thì sẽ tồn tại ánh xạ khả vi liên tục với tính chất này.*

Bổ đề 3.2.4. *Không thể tồn tại một hàm khả vi liên tục f từ B^n lên S^{n-1} mà thỏa mãn điều kiện $f(x) = x; \forall x \in S^{n-1}$.*

Hệ quả 3.2.1. *Cho $Q = [0,1]\times$ [0, 1] $\times \cdots \times$ [0, 1] $\times$ ... (Q được gọi là hộp Hilbert) với topo tích, khi đó Q có tính chất điểm bất động.*

Định lý 3.2.3 (Borsuk về các AR)**.** *Mỗi không gian topo thuộc lớp AR, compact đều có tính chất điểm bất động.*

3.3. Các định lý về điểm bất động cho các đa tạp

Định lý 3.3.1. *Mỗi đa tạp compact hữu hạn chiều không biên co rút được đều có tính chất điểm bất động.*

Định lý 3.3.2. *Mỗi đa tạp compact hữu hạn chiều có biên co rút được đều có tính chất điểm bất động.*

Định lý 3.3.3. *Mỗi AR đều có tính chất điểm bất động đối với các ánh xạ compact.*

Hệ quả 3.3.1. *Mỗi đa tạp hữu hạn chiều không biên co rút được đều có tính chất điểm bất động đối với các ánh xạ compact.*

Hệ quả 3.3.2. *Mỗi đa tạp hữu hạn chiều có biên co rút được đều có tính chất điểm bất động đối với các ánh xạ compact.*

Hệ quả 3.3.3. *Mỗi đa tạp vô hạn chiều co rút được đều có tính chất điểm bất động đối với các ánh xạ compact.*

KẾT LUẬN

Luận văn đã đạt được một số kết quả như sau

Trình bày lý thuyết ANR bao gồm chứng minh Định lý thác triển Dugundji, trình bày Định lý Hanner và chứng minh lớp ANR mà co rút được thì đồng nhất với lớp các AR.

Trình bày chứng minh Định lý điểm bất động của Brouwer, Định lý Borsuk.

Ứng dụng của Định lý Hanner chứng minh một số đa tạp là một ANR và ứng dụng của Định lý Borsuk để chứng minh một số đa tạp có tính chất điểm bất động.

Các ứng dụng cụ thể như vận dụng lý thuyết đã nghiên cứu ta chứng minh được các Hệ quả (3.3.1; 3.3.2; 3.3.3) nội dung như sau:

Hệ quả 3.3.1 *Mỗi đa tạp hữu hạn chiều không biên co rút được đều có tính chất điểm bất động đối với các ánh xạ compact.*

Hệ quả 3.3.2 *Mỗi đa tạp hữu hạn chiều có biên co rút được đều có tính chất điểm bất động đối với các ánh xạ compact.*

Hệ quả 3.3.3 *Mỗi đa tạp vô hạn chiều co rút được đều có tính chất điểm bất động đối với các ánh xạ compact.*