BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
**ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG**

**LÊ THÚY AN**

# PHƯƠNG PHÁP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH VÀ ỨNG DỤNG

**Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp**

**Mã số: 60.46.01.13**

**TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC**

**Đà Nẵng – Năm 2016**

Công trình được hoàn thành tại

**ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG**

**Người hướng dẫn khoa học: TS. PHẠM QUÝ MƯỜI**

Phản biện 1: TS. Phan Đức Tuấn

Phản biện 2: PGS. TS. Trần Đạo Dõng

Luận văn đã được bảo vệ tại Hội đồng chấm Luận văn tốt nghiệp thạc sĩ Khoa học chuyên ngành Phương pháp Toán sơ cấp tại Đại học Đà Nẵng vào ngày 13 tháng 8 năm 2016.

Tìm hiểu luận văn tại:

- Trung tâm Thông tin-Học liệu, Đại học Đà Nẵng
- Thư viện trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng

# MỞ ĐẦU

**1. Tính cấp thiết của đề tài**

Hệ phương trình tuyến tính là một phần quan trọng trong hệ thống toán học. Khi mô hình hóa các bài toán thực tế, nhiều bài toán dẫn đến hệ phương trình tuyến tính. Mặt khác, khi giải các bài toán tối ưu phi tuyến, hệ phương trình tuyến tính xuất hiện như là một bài toán con trong mỗi bước lặp giải bài toán phi tuyến. Hơn nữa, khi rời rạc hóa các phương trình vi phân, phương trình đạo hàm riêng tuyến tính cũng dẫn đến việc giải các hệ phương trình tuyến tính có kích thước lớn.

Ở phổ thông lớp 8, 9, 10, mặc dù các hệ phương trình xuất hiện khá đơn giản, nhưng đã cho học sinh thấy được ứng dụng của toán học vào đời sống thông qua các bài toán.

Hiện nay, chương trình giảng dạy môn Toán cao cấp A1 ở hệ cao đẳng, đại học trong phạm vi 45-60 tiết nên chỉ có thể cung cấp cho sinh viên hai cách giải hệ phương trình tuyến tính đó là phương pháp Cramer và phương pháp Gauss, từ đó giúp cho sinh viên củng cố các kỹ năng về định thức, về hạng ma trận. Ứng dụng hệ phương trình tuyến tính trong môn học này thể hiện rõ nhất thông qua các bài toán trong không gian vec tơ và ánh xạ tuyến tính.

Lý thuyết hệ phương trình tuyến tính có nhiều ứng dụng không những trong nhiều ngành toán học mà còn trong nhiều lĩnh vực khoa học khác và cả trong kinh tế.

Là một giảng viên trường cao đẳng, tôi mong muốn tìm hiểu sâu hơn các vấn đề liên quan đến hệ phương trình tuyến tính (bao gồm cơ sở lý thuyết, phương pháp giải và ứng dụng) nhằm nâng cao trình độ chuyên môn và được sự định hướng của thầy giáo hướng dẫn, tôi đã chọn đề tài "**Phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính và ứng dụng**" cho luận văn Thạc sĩ của mình.

### 2. Mục tiêu và nhiệm vụ nghiên cứu của đề tài

Nắm được điều kiện tồn tại nghiệm của hệ phương trình tuyến tính và bốn phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính.

Đưa ra một số ứng dụng của hệ phương trình tuyến tính như việc giải các bài toán về không gian vectơ và ánh xạ tuyến tính trong môn học Toán cao cấp; tìm điểm cân bằng thị trường trong lĩnh vực kinh tế; tìm cực tiểu toàn cục của bài toán tối ưu bậc hai.

### 3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu của đề tài là các phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính và tìm hiểu một số ứng dụng của hệ phương trình tuyến tính.

Phạm vi nghiên cứu của đề tài là lý thuyết, nghiệm số và một số ứng dụng hệ phương trình tuyến tính.

## 4. Phương pháp nghiên cứu

Thu thập, tổng hợp, phân tích, nghiên cứu các tài liệu liên quan đến nội dung đề tài luận văn. Tham gia các buổi seminar của thầy hướng dẫn để trao đổi các kết quả đang nghiên cứu.

## 5. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài

Xây dựng một tài liệu tham khảo cho việc nghiên cứu các bài toán về hệ phương trình tuyến tính và ứng dụng của hệ phương trình tuyến tính.

Góp phần làm rõ ý nghĩa và vai trò của hệ phương trình tuyến tính trong chương trình toán cao cấp ở bậc cao đẳng.

## 6. Cấu trúc của luận văn

Ngoài phần Mở đầu, Kết luận và Tài liệu tham khảo, luận văn được chia làm 3 chương:

Chương 1 Trình bày một số khái niệm cơ bản.

Chương 2 Trình bày một số phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính.

Chương 3 Trình bày một số ứng dụng của hệ phương trình tuyến tính.

Trong mỗi chương sẽ đưa vào các ví dụ minh họa và phương pháp giải một số bài toán tiêu biểu.

# CHƯƠNG 1
# MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN

Trong chương này, ta nhắc lại một số kiến thức cơ bản như định nghĩa hệ phương trình tuyến tính; các khái niệm liên quan đến số nghiệm của hệ phương trình tuyến tính; các khái niệm liên quan đến cực trị của hàm nhiều biến; các khái niệm liên quan đến ma trận đối xứng, xác định dương; các khái niệm liên quan đến cầu, cung và trạng thái cân bằng thị trường.

## 1.1. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

**Định nghĩa 1.1.1.** Một **hệ phương trình tuyến tính** (PTTT) là một hệ gồm $m$ phương trình bậc nhất với $n$ ẩn và có dạng tổng quát như sau:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1.1}$$

trong đó $a_{ij} \in \mathbb{R}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$ gọi là hệ số của ẩn, $b_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1,m}$ gọi là hệ số tự do, $x_i, i = \overline{1,n}$ là các ẩn.

Nếu $b_1 = b_2 = ... = b_m = 0$ thì hệ (1.1) là **hệ phương trình tuyến tính thuần nhất.**

**Định nghĩa 1.1.2.** Ta nói một bộ $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ là một nghiệm của hệ (1.1) nếu ta thay $x_1 = \alpha_1, ..., x_n = \alpha_n$ vào hệ (1.1) thì tất cả các phương trình trong hệ (1.1) đều thỏa.

**Nhận xét 1.1.1.** (Nghiệm tầm thường)

## 1.2. DẠNG MA TRẬN VÀ DẠNG VECTƠ CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Xét hệ PTTT (1.1). Ta đặt

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

$$\overline{A} = [A\,|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Ma trận $A, X, B, \overline{A}$ lần lượt gọi là ma trận hệ số, ma trận ẩn, ma trận hệ số tự do, ma trận mở rộng của hệ PTTT (1.1).

Hệ PTTT (1.1) có thể được viết lại như sau:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

hay

$$A.X = B. \tag{1.3}$$

Dạng (1.2) hay (1.3) được gọi là **dạng ma trận** của hệ PTTT.

Một cách khác để biểu diễn hệ PTTT là viết hệ dưới dạng vectơ. Từ hệ (1.1) ta có: $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$, $i = 1, .., m$.

Nếu coi mỗi cột của ma trận $\overline{A}$ như một vectơ trong không gian $\mathbb{R}^m$ chẳng hạn:

$$\alpha_j = (a_{1j}, a_{2j}, .., a_{mj})^T, \ j = \overline{1, n}, \ \beta = (b_1, b_2, .., b_m)^T$$

thì ta cũng có thể viết hệ (1.1) dưới dạng :

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

hay $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = \beta$ và gọi là **dạng vectơ** của hệ (1.1).

## 1.3. CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG VÀ MỐI LIÊN HỆ VỚI CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI SƠ CẤP VỀ HÀNG CỦA MA TRẬN

**Định nghĩa 1.3.1.** Hai hệ PTTT được gọi là tương đương nếu chúng có cùng tập hợp nghiệm.

**Định nghĩa 1.3.2.** Một phép biến đổi tương đương đối với hệ PTTT nếu nó không làm thay đổi tập nghiệm của hệ đã cho.

**Các phép biến đổi tương đương đối với hệ PTTT:**

(1) Đổi chỗ hai phương trình của hệ.

(2) Nhân một phương trình của hệ với một số thực khác không.

(3) Cộng vào một phương trình một tổ hợp tuyến tính của các phương trình khác trong hệ.

**Nhận xét 1.3.1.** Tương ứng với các phép biến đổi tương đương trên hệ PTTT là các phép biến đổi sơ cấp về hàng của ma trận mở rộng:

(1) Đổi chỗ hai hàng của ma trận.

(2) Nhân một hàng của ma trận với một số thực khác không.

(3) Cộng vào một hàng một tổ hợp tuyến tính của các hàng khác.

## 1.4. SỰ TỒN TẠI (DUY NHẤT) NGHIỆM CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

**Định lý 1.4.1.** *(Định lý Kronecker - Capelli) Hệ phương trình tuyến tính (1.1) có nghiệm khi và chỉ khi* $r\left(A\right) = r\left(\overline{A}\right)$*, trong đó*

$$\overline{A} = [A\,|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

**Chú ý 1.4.1.** Từ Định lý (1.4.1) ta suy ra:

- Nếu $r\left(A\right) < r\left(\overline{A}\right)$ thì hệ vô nghiệm.
- Nếu $r\left(A\right) = r\left(\overline{A}\right) = r = n$ thì hệ có duy nhất nghiệm.
- Nếu $r\left(A\right) = r\left(\overline{A}\right) = r < n$ thì hệ PTTT vô số nghiệm.

**Chú ý 1.4.2.** (Định thức con cơ sở, ẩn cơ bản, ẩn không cơ bản)

**Các loại nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất**

## 1.5. MA TRẬN ĐỐI XỨNG, XÁC ĐỊNH DƯƠNG

**Định nghĩa 1.5.1.** (Ma trận đối xứng)

**Định nghĩa 1.5.2.** (Ma trận xác định dương)

**Định nghĩa 1.5.3.** (Ma trận nửa xác định dương)

**Mệnh đề 1.5.1.** *Một ma trận $A = (a_{ij})_n$ đối xứng là xác định dương khi và chỉ khi các giá trị riêng của $A$ đều dương.*

**Chú ý 1.5.1.** Nếu $A$ là ma trận đối xứng xác định dương thì $A^{-1}$ cũng là một ma trận đối xứng xác định dương.

**Chú ý 1.5.2.** Nếu $C$ là một ma trận đối xứng xác định dương cấp $m \times m$ và $A$ là một ma trận cấp $m \times n$ có hạng $n$ $(m \geq n)$ thì $A^T CA$ là một ma trận đối xứng xác định dương.

## 1.6. CỰC TRỊ CỦA HÀM NHIỀU BIẾN

### 1.6.1. Cực trị tự do

**Định nghĩa 1.6.1.** (Cực trị địa phương không điều kiện)

Giả sử hàm $f(x) = f(x_1, .., x_n)$ xác định trên tập $D \subset \mathbb{R}^n$ và điểm $x^o = (x_1^o, .., x_n^o) \in D$. Ta nói rằng hàm $f(x)$ có **cực đại địa phương (cực tiểu địa phương)** tại điểm $x^o$ nếu tồn tại lân cận $U(x^o, \delta) = \{x : 0 < \rho(x, x^o) < \delta\}$ của điểm $x^o$ sao cho $\forall x \in U(x^o, \delta) \cap D$ thỏa mãn bất đẳng thức

$$f(x^o) \geq f(x) \qquad (f(x^o) \leq f(x))$$

Cực đại địa phương và cực tiểu địa phương được gọi chung là cực trị địa phương, còn những điểm mà tại đó hàm đạt được cực trị địa phương được gọi là điểm cực trị địa phương.

**Định nghĩa 1.6.2.** (Cực trị toàn cục không điều kiện)

**Mệnh đề 1.6.1.** *(Điều kiện cần của cực trị địa phương không điều kiện)*

**Định nghĩa 1.6.3.** (Dạng toàn phương xác định dấu)

**Mệnh đề 1.6.2.** *(Điều kiện đủ của cực trị địa phương không điều kiện) Giả sử tại lân cận nào đấy của điểm dừng* $x^o$ *hàm* $f(x)$ *khả vi hai lần và tất cả các đạo hàm riêng cấp hai* $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}$ $(i, j = 1, .., n)$ *liên tục tại* $x^o$. *Nếu tại điểm này vi phân cấp hai* $d^2 f(x^o) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}.dx_i dx_j$ *là dạng toàn phương xác định dấu của các biến* $dx_1, .., dx_n$ *thì tại điểm* $x^o$ *hàm* $f(x)$ *đạt được cực trị địa phương. Khi đó, nếu* $d^2 f(x^o) < 0$ *thì tại điểm* $x^o$ *hàm* $f(x)$ *đạt cực đại địa phương, còn nếu* $d^2 f(x^o) > 0$ *thì tại điểm* $x^o$ *hàm* $f(x)$ *đạt cực tiểu địa phương.*

### 1.6.2. Cực trị có điều kiện

**Định nghĩa 1.6.4.** (Cực trị địa phương có điều kiện)

**Định nghĩa 1.6.5.** (Cực trị toàn cục có điều kiện)

### 1.6.3. Cực tiểu địa phương của hàm lồi trên tập lồi

**Định nghĩa 1.6.6.** (Đường thẳng, đoạn thẳng)

**Định nghĩa 1.6.7.** (Tập lồi)

**Định nghĩa 1.6.8.** (Hàm lồi)

**Mệnh đề 1.6.3.** *Cho $f \in C^2$. Khi đó $f$ là lồi trên tập lồi $\Omega$ chứa ít nhất một điểm trong nếu và chỉ nếu ma trận Hessian $F$ (ma trận của đạo hàm riêng cấp hai) là nửa xác định dương trong $\Omega$.*

**Mệnh đề 1.6.4.** *Cho hàm lồi $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ và tập lồi khác rỗng $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Khi đó: Nếu $x^* \in D$ là cực tiểu địa phương của hàm $f$ thì $x^*$ cũng là cực tiểu toàn cục của hàm $f$. Hơn nữa, tập hợp các điểm cực tiểu của $f$ là một tập lồi.*

## 1.7. Cầu, cung và cân bằng thị trường

### 1.7.1. Lý thuyết về cầu

**Định nghĩa 1.7.1.** (Cầu hàng hóa)

**Định nghĩa 1.7.2.** (Lượng cầu)

**Định nghĩa 1.7.3.** (Đường cầu)

**Qui luật cầu:** Khi giá một mặt hàng thông thường hạ xuống (trong điều kiện các yếu tố khác không đổi) thì lượng cầu mặt hàng đó sẽ tăng lên và ngược lại.

### 1.7.2. Lý thuyết về cung

**Định nghĩa 1.7.4.** (Cung hàng hóa)

**Định nghĩa 1.7.5.** (Lượng cung)

**Định nghĩa 1.7.6.** (Đường cung)

**Qui luật cung:** Khi giá một mặt hàng thông thường tăng lên (trong điều kiện các yếu tố khác không đổi) thì lượng cung mặt hàng đó sẽ tăng lên và ngược lại.

### 1.7.3. Trạng thái cân bằng thị trường

**Định nghĩa 1.7.7. Điểm cân bằng thị trường** là điểm lý tưởng mà ở đó cả giá cả và lượng hàng hóa, dịch vụ đều cân bằng.

Có 2 nhân tố để đạt đến điểm cân bằng của thị trường:

**Giá cân bằng:** Mức giá tại đó lượng cầu đúng bằng lượng cung.

**Lượng cân bằng:** Lượng hàng hóa hoặc dịch vụ mà người tiêu dùng sẵn sàng mua và người bán sẵn sàng bán tại điểm giá cân bằng.

**Xác định trạng thái cân bằng bằng đồ thị**

**Sự điều chỉnh của thị trường**

# CHƯƠNG 2
# MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Chương này trình bày một số phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính bao gồm phương pháp Cramer, phương pháp Gauss, phương pháp nhân tử LU, phương pháp Cholesky. Với mỗi phương pháp, giới thiệu cơ sở lý thuyết của phương pháp, các bước giải hệ phương trình tuyến tính, ví dụ minh họa.

## 2.1. PHƯƠNG PHÁP CRAMER

### 2.1.1. Cơ sở lý thuyết của phương pháp Cramer

**Định lý 2.1.1.** *(Định lý Cramer)*

*Cho hệ Cramer $AX = B$, trong đó*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

*Hệ Cramer luôn có nghiệm duy nhất được, được tính bằng công thức $x_j = \frac{\det A_j}{\det A}$, $(1 \le j \le n)$, trong đó $A_j$ chính là ma trận suy ra từ $A$ bằng cách thay cột thứ $j$ bởi cột tự do $B$.*

### 2.1.2. Các bước giải hệ phương trình bằng phương pháp Cramer

## 2.2. PHƯƠNG PHÁP GAUSS

Phương pháp Cramer chỉ áp dụng được cho các hệ PTTT không suy biến. Thế nhưng rất nhiều hệ PTTT mà người ta gặp lại suy biến. Phương pháp Gauss mà ta sẽ trình bày dưới đây có ưu điểm là có thể áp dụng cho hệ PTTT tùy ý. Nhược điểm của phương pháp này là không đưa ra được thông tin nào về nghiệm của hệ phương trình trước khi giải xong hệ đó.

### 2.2.1. Cơ sở lý thuyết của phương pháp Gauss

Sử dụng các phép biến đổi tương đương trên hệ PTTT để chuyển về một hệ phương trình mới tương đương với hệ phương trình cũ mà ma trận mở rộng là ma trận bậc thang.

Xét hệ PTTT tổng quát:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & ... & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & ... & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & ... & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{cases}$$

Giả sử có một hệ số $a_{ij} \neq 0$. Nếu cần có thể đổi chỗ các phương trình và đánh số lại các ẩn, nên không giảm tính tổng quát ta có thể coi $a_{11} \neq 0$. Khi đó, nhân hai vế của phương trình đầu với $\left(-\frac{a_{i1}}{a_{11}}\right)$ rồi cộng vào phương trình thứ $i$, lần lượt với $i = 2, \ldots, m$ ta nhận được hệ phương trình tương đương có dạng:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & a'_{22}x_2 & + & \ldots & + & a'_{2n}x_n & = & b'_2 \\ & & \ldots\ldots.. & .. & \ldots & .. & \ldots\ldots.. & .. & \ldots \\ & & a'_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a'_{mn}x_n & = & b'_m. \end{cases}$$

Lặp lại lập luận trên đối với hệ con gồm $(m-1)$ phương trình cuối với các ẩn $x_2, ..., x_n$.

Sau một số hữu hạn bước, hệ PTTT $AX = B$ được đưa về một hệ tương đương, với ma trận mở rộng có dạng:

$$\left[\begin{array}{cccccccc|c} \overline{a}_{11} & * & \cdots & \cdots & * & * & \cdots & * & \overline{b}_1 \\ 0 & \overline{a}_{22} & \cdots & \cdots & * & * & \cdots & * & \overline{b}_2 \\ 0 & 0 & \overline{a}_{33} & \cdots & * & * & \cdots & * & \overline{b}_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * & * & \cdots & * & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \overline{a}_{rr} & * & \cdots & * & \overline{b}_r \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \overline{b}_{r+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ldots & \cdots & \cdots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \overline{b}_m \end{array}\right],$$

trong đó $\overline{a}_{ii} \neq 0\,(i = 1, .., r)$, các dấu $*$ có thể là các số thực khác 0.

Nếu một trong các số $\overline{b}_{r+1}, ..., \overline{b}_m$ khác 0 thì hệ PTTT vô nghiệm.

Nếu $\overline{b}_{r+1} = ... = \overline{b}_m = 0$, thì hệ PTTT có nghiệm. Mỗi nghiệm của hệ phương trình nhận được bằng cách gán cho $x_{r+1}, ..., x_n$ những giá trị tùy ý thuộc $\mathbb{R}$ (nếu $n > r$) rồi giải duy nhất $x_1, ..., x_r$

theo những giá trị đã gán cho $x_{r+1},...,x_n$. Cụ thể $x_r$ được tìm từ phương trình thứ $r$, $x_{r-1}$ được tìm từ phương trình thứ $r-1$,..., $x_1$ được tìm từ phương trình tứ nhất.

**Nhận xét 2.2.1.** Tương ứng với các phép biến đổi tương đương trên hệ PTTT là các phép biến đổi sơ cấp về hàng trên ma trận nên để cho gọn trong quá trình giải hệ PTTT, ta chỉ cần ghi nhận sự biến đổi của ma trận hệ số mở rộng.

**Nhận xét 2.2.2.** Nếu $A$ là ma trận vuông cấp $n$ có định thức khác không thì hệ PTTT được đưa về hệ tam giác trên với ma trận mở rộng có dạng:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \cdots & \bar{a}_{1n} & \bar{b}_1 \\ 0 & \bar{a}_{22} & \cdots & \bar{a}_{2n} & \bar{b}_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & ... \\ 0 & 0 & 0 & \bar{a}_{nn} & \bar{b}_n \end{array}\right].$$

Khi đó nghiệm của hệ được cho bởi công thức

$$\begin{cases} x_n = \frac{\bar{b}_n}{\bar{a}_{nn}} \\ x_k = \frac{1}{\bar{a}_{kk}}\left(\bar{b}_k - \sum\limits_{j=k+1}^{n} \bar{a}_{kj}.x_j\right), \quad k = n-1,..,1. \end{cases}$$

### 2.2.2. Các bước giải hệ phương trình bằng phương pháp Gauss

## 2.3. PHƯƠNG PHÁP NHÂN TỬ LU

### 2.3.1. Cơ sở lý thuyết của phương pháp nhân tử LU

Cho hệ PTTT $AX = B$, trong đó $A = (a_{ij})_n$. Nội dung của phương pháp nhân tử $LU$ là phân tích ma trận hệ số $A$ thành tích của hai ma trận có dạng $A = L.U$, $L$ là ma trận tam giác dưới, $U$ là ma trận tam giác trên cùng cấp với $A$.

Việc giải hệ phương trình $AX = B$ sẽ đưa về việc giải hai hệ phương trình mà các ma trận hệ số là ma trận tam giác:

$$\begin{cases} LY = B \\ UX = Y. \end{cases}$$

**Định lý 2.3.1.** *Một ma trận khả nghịch cấp n thỏa phép phân tích LU nếu và chỉ nếu tất cả các ma trận con chính cấp* $k, k = 1, ..., n-1$ *của nó đều khả nghịch. Phép phân tích là duy nhất nếu ta yêu cầu các phần tử đường chéo của L (hoặc U) đều bằng 1.*

### 2.3.2. Phân rã ma trận A bằng phương pháp Crout

Với phương pháp Crout ta cho $u_{ii} = 1, i = \overline{1,n}$, từ đó tìm các phần tử còn lại của $L, U$. Sử dụng công thức nhân hai ma trận ta có thể xác định được $l_{ij}\left(i \geq j\right),\ u_{ij}\left(i < j\right)$ như sau:

$$\begin{cases} l_{i1} & = & a_{i1}, & \forall i = \overline{1,n} \\ u_{1j} & = & \frac{a_{1j}}{l_{11}}, & \forall j = \overline{2,n} \\ l_{ij} & = & a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{j-1} l_{ik}.u_{kj}, & 1 < j \leq i \leq n \\ u_{ij} & = & \frac{1}{l_{ii}}\left(a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} l_{ik}.u_{kj}\right), & 1 < i < j \leq n. \end{cases} \tag{2.2}$$

### 2.3.3. Các bước giải hệ phương trình bằng phương pháp Crout

### 2.3.4. Phân rã ma trận A bằng phương pháp Doolittle

Với phương pháp Doolittle ta cho $l_{ii} = 1, i = \overline{1,n}$, từ đó tìm các phần tử còn lại của $L, U$. Sử dụng công thức nhân hai ma trận ta có thể xác định $l_{ij}\left(i > j\right),\ u_{ij}\left(i \leq j\right)$ như sau:

$$\begin{cases} u_{1j} & = & a_{1j}, & \forall j = \overline{1,n} \\ l_{i1} & = & \frac{a_{i1}}{u_{11}}, & \forall i = \overline{2,n} \\ u_{ij} & = & a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} l_{ik}.u_{kj}, & 1 < i \leq j \leq n \\ l_{ij} & = & \frac{1}{u_{jj}}\left(a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{j-1} l_{ik}.u_{kj}\right), & 1 < j < i \leq n. \end{cases} \tag{2.3}$$

### 2.3.5. Các bước giải hệ phương trình bằng phương pháp Doolittle

## 2.4. PHƯƠNG PHÁP CHOLESKY

### 2.4.1. Cơ sở lý thuyết của phương pháp Cholesky

**Định lý 2.4.1.** *(Định lý Cholesky) Nếu $A$ là ma trận đối xứng và xác định dương thì tồn tại một ma trận tam giác dưới khả đảo $D$ sao cho: $A = D.D^T$.*

Ma trận $D = (d_{ij})_n$ được tìm theo công thức sau:

$$\begin{cases} d_{11} &= \sqrt{a_{11}} & \\ d_{i1} &= \frac{a_{i1}}{d_{11}}, & \forall i = \overline{2,n} \\ d_{ii} &= \sqrt{a_{ii} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} d_{ik}^2}, & \forall i = \overline{2,n} \\ d_{ij} &= \frac{1}{d_{jj}}.\left(a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{j-1} d_{ik}.d_{jk}\right), & 2 \le j < i \le n. \end{cases} \tag{2.4}$$

### 2.4.2. Các bước giải hệ phương trình bằng phương pháp Cholesky

# CHƯƠNG 3
# ỨNG DỤNG CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Chương này sẽ trình bày một số ứng dụng của hệ phương trình tuyến tính.

## 3.1. MỘT SỐ BÀI TOÁN TRONG KHÔNG GIAN VECTƠ VÀ ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

### 3.1.1. Biểu thị tuyến tính, tổ hợp tuyến tính

### 3.1.2. Độc lập tuyến tính - Phụ thuộc tuyến tính

### 3.1.3. Tọa độ của vectơ, ma trận đổi cơ sở

### 3.1.4. Công thức xác định ánh xạ tuyến tính

### 3.1.5. Ma trận và biểu thức tọa độ của ánh xạ tuyến tính

## 3.2. MÔ HÌNH CÂN BẰNG THỊ TRƯỜNG

Phần này trình bày ứng dụng của hệ phương trình vào tìm điểm cân bằng thị trường thuộc bộ môn Kinh tế vi mô.

### 3.2.1. Thị trường lưu hành một loại hàng hóa

### 3.2.2. Thị trường lưu hành nhiều loại hàng hóa

## 3.3. BÀI TOÁN TỐI ƯU

### 3.3.1. Phát biểu bài toán

**Bài toán 1:** Tìm cực tiểu của hàm số

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - x^T b, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

trong đó ma trận $A$ cấp $n$ là ma trận đối xứng xác định dương, $b \in \mathbb{R}^n$ được xem như vectơ cột .

Đây là bài toán tối ưu bậc hai tự do.

**Bài toán 2:** Tìm cực tiểu của hàm số

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - x^T b, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

với $x$ thỏa mãn $Cx = d$, trong đó $C$ là ma trận cấp $m \times n$ và có hạng là $m \leq n$, còn $A$ là ma trận cấp $n$ đối xứng xác định dương, $b \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}^m$ được xem như các vectơ cột.

Đây là bài toán tối ưu bậc hai có điều kiện.

Trong cả 2 bài toán, chúng ta chỉ cần tìm điều kiện cần và đủ để $f$ có cực tiểu toàn cục.

### 3.3.2. Điều kiện có nghiệm

Điều kiện có nghiệm của Bài toán (1) đưa ra ở mệnh đề sau

**Mệnh đề 3.3.1.** *Cho một hàm bậc hai*

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - x^T b.$$

*Nếu* $A$ *là một ma trận đối xứng xác định dương thì* $f(x)$ *có duy nhất cực tiểu toàn cục thỏa mãn hệ phương trình tuyến tính* $Ax = b$. *Giá trị nhỏ nhất của* $f(x)$ *là*

$$f\left(A^{-1}b\right) = -\frac{1}{2}b^T A^{-1}b.$$

**Chú ý 3.3.1.** Nếu $f(x)$ có chứa một số hạng là hằng số $c \in \mathbb{R}$ để

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - x^T b + c,$$

thì việc chứng minh Mệnh đề (3.3.1) vẫn cho thấy rằng $f(x)$ có duy nhất cực tiểu toàn cục $x = A^{-1}b$, nhưng giá trị nhỏ nhất là

$$f\left(A^{-1}b\right) = -\frac{1}{2}b^T A^{-1}b + c.$$

Bây giờ ta chuyển qua xét Bài toán (2) tức là

$$\min_{Cx=d} f(x)$$

trong đó $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - x^T b$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ và $A$ là ma trận cấp $n$ đối xứng xác định dương, $C$ là ma trận cấp $m \times n$ và có hạng là $m \leq n$, $b \in \mathbb{R}^n, d \in \mathbb{R}^m$ (được xem như các vectơ cột).

**Chứng minh bài toán (2) đã nêu luôn có duy nhất điểm cực tiểu toàn cục.**

# KẾT LUẬN

Luận văn "*Phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính và ứng dụng*" đã thực hiện được các vấn đề sau:

1. Hệ thống lại một số kiến thức liên quan đến hệ phương trình tuyến tính, điều kiện có nghiệm của hệ phương trình tuyến tính; một số kiến thức liên quan đến cực trị hàm nhiều biến, điều kiện để tồn tại cực trị.

2. Trình bày bốn phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính, trong đó

⋆ Phương pháp Cramer được dùng cho hệ Cramer.

⋆ Phương pháp Gauss được dùng cho hệ phương trình tuyến tính tùy ý.

⋆ Phương pháp nhân tử LU được dùng cho hệ phương trình tuyến tính có ma trận hệ số mà tất cả các định thức con chính đều khác không.

⋆ Phương pháp Cholesky được dùng cho hệ phương trình tuyến tính có ma trận hệ số là ma trận đối xứng và xác định dương.

3. Trình bày ba ứng dụng của hệ phương trình tuyến tính:

⋆ Giải một số bài toán về không gian vectơ và ánh xạ tuyến tính thuộc bộ môn Toán cao cấp.

⋆ Tìm điểm cân bằng thị trường trong kinh tế vi mô.

⋆ Tìm cực tiểu toàn cục của bài toán tối ưu bậc hai không có điều kiện và bài toán tối ưu bậc hai có điều kiện.

Mặc dù đã rất cố gắng, nhưng luận văn có thể sẽ còn một số thiếu sót. Bản thân hy vọng trong thời gian đến, nội dung của luận văn được bổ sung và hoàn thiện hơn nhằm chứng tỏ sự ứng dụng đa dạng và hiệu quả các các phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính.