BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

NGÔ QUANG TRƯỜNG

ÁNH XẠ ĐÓNG TRONG KHÔNG GIAN MÊTRIC SUY RỘNG

Chuyên ngành: Phương pháp toán sơ cấp
Mã số: 60.46.40

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Đà Nẵng – Năm 2015

Công trình đã được hoàn thành tại

ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

Người hướng dẫn khoa học: **TS. LƯƠNG QUỐC TUYỂN**

Phản biện 1: GS.TSKH. Nguyễn Văn Mậu

Phản biện 2: PGS. TSKH. Trần Quốc Chiến

Luận văn đã được bảo vệ trước Hội đồng chấm Luận văn tốt nghiệp thạc sĩ khoa học họp tại Đại học Đà Nẵng vào ngày 11 tháng 01 năm 2015.

Có thể tìm luận văn tại:

- Trung tâm Thông tin - Học liệu, Đại học Đà Nẵng
- Thư viện trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Ánh xạ đóng trong không gian mêtric suy rộng là một trong những bài toán trọng tâm của tôpô đại cương. Năm 1985, L.Foged đã chứng minh rằng X là ảnh đóng của không gian meetric khi và chỉ khi nó là không gian Fréchet-Urysohn với k- mạng, σ- bảo tồn đóng di truyền. Sau đó, Z.Gao và Y. Hattori đã chứng minh rằng X là ảnh đóng Lindel$\ddot{o}$f của không gian meetric khi và chỉ khi nó là không gian Fréchet-Urysohn và $\aleph$ - không gian vào năm 1986. Gần đây nhiều tác giả trên thế giới quan tâm đến các tính chất của các ánh xạ đóng biên-compact, ánh xạ đóng phủ- dãy cũng như sự bảo tồn của không gian mêtric suy rộng qua các ánh xạ đóng. Năm 2007, C.Liu đã chứng minh rằng nếu $f : X \longrightarrow Y$ là ánh xạ đóng và X là không gian có cơ sở yếu đếm được theo điểm thì f là ánh xạ biên-compact khi và chỉ khi Y không chứa bản sao của S_ω. Từ đó, tác giả chứng minh được rằng không gian g- khả mêtric bảo tồn qua ánh xạ đóng phủ - dãy và cho rằng không gian với cơ sở yếu σ- đếm được địa phương bảo tồn qua ánh xạ đóng phủ-dãy và cho rằng không gian với cơ sở yếu σ- đếm được địa phương cũng đươc bảo tồn qua ánh xạ đóng phủ-dãy. Ngoài ra, C.Liu chứng minh rằng nếu $f : X \longrightarrow Y$ là ánh xạ đóng và X là không gian dãy chuẩn tắc, thì f là ánh xạ biên-compact đếm được khi và chỉ khi Y không chứa bản sao của S_ω. Hơn nữa, tác giả cũng thu được các kết quả và sự bảo tồn của không gian với cơ sở đếm được theo điểm, $\aleph$ - không gian, không gian sn-

khả mêtric qua ánh xạ đóng phủ-dãy.

Với các lý do như trên, chúng tôi chọn: "Ánh xạ đóng trong không gian mêtric suy rộng" làm đề tài luận văn thạc sĩ.

2. **Mục đích nghiên cứu**
Luận văn nhằm tìm hiểu và làm rõ các vấn đề sau:

(1) Hệ thống lại một số kiến thức về tôpô đại cương, một số kiến thức về không gian mêtric suy rộng.

(2) Tìm hiểu một số kết quả về các ánh xạ đóng trong không gian mêtric suy rộng.

3. **Đối tượng và phạm vi nghiên cứu**
Đối tượng nghiên cứu: ánh xạ đóng, ánh xạ đóng phủ-dãy, ánh xạ phủ-compact.

4. **Phương pháp nghiên cứu**

(1) Tham khảo tài liệu và hệ thống hóa các kiến thức.

(2) Thu thập các bài báo khoa học của các tác giả nghiên cứu liên quan đến "ánh xạ đóng trong không gian mêtric suy rộng".

(3) Thể hiện tường minh các kết quả nghiên cứu trong đề tài.

(4) Phân tích, đánh giá, tổng hợp và trao đổi với thầy hướng dẫn kết quả đang nghiên cứu để hoàn chỉnh luận văn.

5. **Ý nghĩa khoa học và thực tiễn**
Đề tài có ý nghĩa về mặt lý thuyết, có thể sử dụng như tài

liệu tham khảo dành cho những ai đang nghiên cứu về ánh xạ đóng trong không gian mêtric suy rộng.

6. **Bố cục đề tài**

Luận văn được chia thành hai chương:

Chương 1. Cơ sở lý thuyết. Trong chương này, chúng tôi trình bày một số khái niệm và tính chất của không gian tôpô nhằm để phục vụ cho việc chứng minh trong chương 2 của luận văn.

Chương 2. Ánh xạ đóng trong không gian mêtric suy rộng. Trong chương này, chúng tôi chứng minh về mối quan hệ giữa ánh xạ đóng với một số ánh xạ có tính chất phủ, chứng minh các tính chất của ánh xạ đóng cũng như chứng minh các điều kiện để ánh xạ đóng có biên-compact trong không gian mêtric suy rộng.

Mặc dù đã rất cố gắng song luận văn không thể tránh những hạn chế và thiếu sót. Tác giả rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của quý thầy cô và các bạn để luận văn được hoàn chỉnh hơn. Tôi xin trân trọng cảm ơn.

CHƯƠNG 1

CƠ SỞ LÝ THUYẾT

Trong chương này chúng tôi trình bày một số khái niệm và tính chất của không gian tôpô nhằm để phục vụ cho việc chứng minh chương 2 của luận văn.

1.1. KHÔNG GIAN MÊTRIC

1.1.1 Định nghĩa. *Giả sử X là một tập tùy ý khác rỗng và $d : X \times X \to \mathbb{R}$ là một hàm $X \times X$ thỏa mãn các điều kiện sau:*

(1) $d(x, y) \geq 0$ *với mọi* $x, y \in X$*;*
$d(x, y) = 0$ *khi và chỉ khi* $x = y$*;*

(2) $d(x.y) = d(y, x)$ *với mọi* $x, y \in X$.

(3) $d(x.z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Khi đó,

(1) d *được gọi là một mêtric trên* X.

(2) Cặp (X, d) *được gọi là một không gian mêtric.*

1.1.2 Định nghĩa. *Giả sử $\{x_n\}$ là một dãy không gian mêtric X. Ta nói rằng dãy $\{x_n\}$ hội tụ đến $x \in X$ nếu với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho*

$$d(x_n, x) < \epsilon \text{ với mọi } n \geq n_0.$$

Lúc đó, x_0 được gọi là điểm tới hạn của dãy $\{x_n\}$.

1.1.3 Nhận xét.

(1) Nếu dãy $\{x_n\}$ hội tụ đến $x \in X$, thì mỗi dãy con $\{x_{n_k}\}$ của dãy $\{x_n\}$ cũng hội tụ đến x.

(2) Giới hạn của một dãy hội tụ là duy nhất.

1.1.4 Định nghĩa. *Giả sử (X, ρ) là một không gian mêtric, $x_0 \in X$ và $r > 0$. Khi đó*

(1) Tập hợp

$$S(x_0, r) = \{x \in X : \rho(x, x_0) < r\}$$

được gọi là hình cầu mở tâm x_0 bán kính r.

(2) Tập hợp

$$S[x_0, r] = \{x \in X : \rho(x, x_0) \leq r\}$$

được gọi là hình cầu đóng tâm x_0 bán kính r.

1.1.5 Định nghĩa. *Cho A là một tập hợp con của không gian mêtric X. Khi đó,*

(1) U được gọi là lân cận của x nếu tồn tại $r > 0$ sao cho

$$x \in B(x, r) \subset U$$

(2) A được gọi là một tập mở trong X nếu với mọi $x \in A$, tồn tại một lân cận U của x sao cho

$$x \in U \subset A.$$

1.1.6 Định nghĩa Tập con A của không gian mêtric X được gọi là một tập hợp đóng nếu $X \setminus A$ là một tập mở trong X.

1.1.8 Định lí. *Tập con A của không gian mêtric X là đóng trong X khi và chỉ khi với mọi dãy $\{x_n\} \subset A$, $\{x_n\}$ hội tụ đến x ta đều có $x \in A$.*
Như vậy, tập A là đóng trong X khi và chỉ khi A chứa tất cả các điểm giới hạn của nó.

1.1.9 Định lí. *Đối với không gian mêtric X, các kết quả sau là đúng.*

(1) $\emptyset, X$ là các tập hợp mở.

(2) Hợp tùy ý các tập con mở là tập con mở.

(3) Giao hữu hạn tập con mở là tập con mở.

1.1.10 Định lí. *Các khẳng định sau là đúng đối với không gian mêtric X*

(1) $\emptyset, X$ là các tập con đóng.

(2) Giao tùy ý các tập con đóng là tập con đóng.

(3) Hợp hữu hạn các tập con đóng là tập con đóng.

1.2. KHÔNG GIAN TÔPÔ

1.2.1. Định nghĩa. Cho X là một tập hợp và τ là họ gồm các tập con nào đó của X thỏa mãn các điều kiện sau.

(a) $\emptyset$, $X \in \tau$.

(b) Nếu U, $V \in \tau$, thì $U \cap V \in \tau$.

(c) Nếu $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subset \tau$, thì $\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha \in \tau$.

Khi đó,

(1) τ được gọi là một *tôpô* trên X.

(2) Cặp (X, τ) được gọi là một *không gian tôpô*.

(3) Mỗi phần tử của τ được gọi là một *tập hợp mở*.

(4) Mỗi phần tử của X được gọi là một *điểm* của nó.

1.2.3 Định nghĩa. *Tập con A của không gian tập tôpô (X, τ) được gọi là tập hợp đóng trong X nếu $X\backslash A \in \tau$.*

1.2.5 Định lí. *Giả sử $\mathbb{D}$ là họ gồm tất cả các tập hợp đóng trong không gian tôpô (X, τ). Khi đó,*

(1) $\emptyset \in \mathbb{D}, X \in \mathbb{D}$.

(2) Nếu $F_1 \in \mathbb{D}$ và $F_2 \in \mathbb{D}$, thì $F_1 \cup F_2 \in \mathbb{D}$.

(3) Nếu $\{F_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subset \mathbb{D}$, thì $\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} F_\alpha \in \mathbb{D}$.

1.2.7 Định nghĩa. Giả sủ A là tập con của không gian tôpô (X, τ) và $x \in X$. Khi đó,

(1) x được gọi là *điểm trong* của A nếu tồn tại $U \in \tau$ sao cho

$$x \in U \subset A.$$

(2) x được gọi là *điểm ngoài* của A nếu tồn tại $U \in \tau$ sao cho

$$x \in U \subset X\backslash A.$$

(3) x được gọi là *điểm biên* của A nếu x đồng thời không là điểm trong và không là điểm ngoài của A, nghĩa là với mỗi $U \in \tau$ ta có

$$U \cap A \neq \emptyset,\ U \cap X \setminus A = \emptyset.$$

(4) x được gọi là *điểm tụ* của A nếu với mỗi lân cận của x ta đều có

$$U \cap \Big(A \setminus \{x\}\Big) \neq \emptyset.$$

(5) x được gọi là *điểm cô lập* của X nếu nó không là điểm tụ của X.

1.2.9 Định nghĩa. Giả sử A là tập con của không gian tôpô (X, τ). Khi đó, tập con U của X được gọi là *lân cận* của tập A nếu tồn tại $V \in \tau$ sao cho

$$A \subset V \subset U.$$

1.2.11 Định nghĩa. Giả sử A là tập con của không gian tôpô (X, τ) .Khi đó, tập tất cả các điểm trong của A được gọi là *phần trong* của A và kí hiệu là $\mathtt{Int}A$.

1.2.12 Định lí. Giả sử A, B là tập con của không gian tôpô (X, τ). Khi đó, các khẳng định sau là đúng.

(1) $\mathtt{Int}A$ là tập con mở.

(2) $\mathtt{Int}A$ là tập mở lớn nhất trong A.

(3) $\mathtt{Int}(\mathtt{Int}A) = \mathtt{Int}A$.

(4) A là mở khi và chỉ khi $A = \mathtt{Int}A$. Như vậy,

$$\mathtt{Int}\emptyset = \emptyset, \mathtt{Int}A = A$$

(5) Nếu $A \subset B$, thì $\mathtt{Int}A \subset \mathtt{Int}B$.

(6) $\mathtt{Int}A \cap \mathtt{Int}B = \mathtt{Int}(A \cap B)$.

(7) $\mathtt{Int}A \cup \mathtt{Int}B \subset \mathtt{Int}(A \cup B)$.

1.2.13 Định nghĩa. Giả sử A là tập hợp con của không gian tôpô (X, τ). Khi đó, tập tất cả các điểm biên của A được gọi là *biên* của A và kí hiệu là ∂A.

1.2.14 Định lí. Giả sử A là tập hợp con của không gian tôpô (X, τ). Khi đó, các khẳng định sau là đúng.

(1) $A \subset \overline{A}$.

(2) A là đóng khi và chỉ khi $A = \overline{A}$.

(3) Nếu $A \subset B$, thì $\overline{A} \subset \overline{B}$.

(4) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

(5) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

(6) $\overline{A} = A \cup \partial A$.

1.2.15 Định lí. Giả sử A là tập hợp con của không gian tôpô (X, τ) Khi đó, $x \in \overline{A}$ khi và chỉ khi với mọi lân cận U của x ta đều có $U \cap A \neq \emptyset$.

1.3. CƠ SỞ VÀ LÂN CẬN CỦA KHÔNG GIAN TÔPÔ

1.3.1 Định nghĩa. Giả sử (X, τ) là một không gian tôpô và $\mathcal{B} \subset \tau$. Ta nói rằng $\mathcal{B}$ là *cơ sở* của (X, τ) (hay là *cơ sở* của τ) nếu mỗi phần tử của τ là hợp nào đó các phần tử của $\mathcal{B}$.

1.3.3 Định lí. Giả sử $\mathcal{B} \subset \tau$. Khi đó, $\mathcal{B}$ là một cơ sở của không gian tôpô (X, τ) khi và chỉ khi mỗi tập mở trong X là hợp của một họ nào đó các tập mở thuộc $\mathcal{B}$.

1.3.4 Định lí. Giả sử $\mathcal{B}$ là một cơ sở của không gian tôpô (X, τ). Khi đó, các khẳng định sau là đúng.

(1) Nếu U, $V \in \mathcal{B}$ sao cho $x \in U \cap V$, thì tồn tại $W \in \mathcal{B}$ sao cho

$$x \in W \subset U \cap V.$$

(2) Với mỗi $x \in X$, tồn tại $U \in \mathcal{B}$ sao cho $x \in U$.

1.3.5 Định nghĩa. Giả ssử $\mathcal{U}_x$ là họ gồm tất cả các lân cận của x. Ta nói rằng họ $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{U}_x$ là *một cơ sở lân cận tại* x nếu với mỗi $U \in \mathcal{U}_x$, tồn tại $V \in \mathcal{B}_x$ sao cho

$$x \in V \subset U.$$

1.3.6 Định lí. Giả sử $x \in X$ và $\mathcal{B}_x$ là cơ sở lân cận tại x. Khi đó,

(1) $x \in U$ với mỗi $U \in \mathcal{B}_x$ và $\mathcal{B}_x \neq \emptyset$ với mỗi $x \in X$.

(2) Nếu U, $V \in \mathcal{B}_x$, thì tồn tại $W \in \mathcal{B}_x$ sao cho

$$x \in W \subset U \cap V.$$

1.3.7 Định nghĩa. Giả sử X là một không gian tôpô. Khi đó,

(1) X được gọi là *không gian thỏa mãn tiên đề đếm được* thứ nhất nếu mỗi điểm của X có một cơ sở lân cận đếm được.

(2) X được gọi là *không gian thỏa mãn tiên đề đếm được* thứ hai nếu τ có một cơ sở lân cận đếm được.

1.3.8 Định lí. Nếu X là không gian thỏa mãn tiên đề đếm được thứ hai, thì nó là không gian thỏa mãn tiên đề đếm được thứ nhất.

1.3.9 Định lí. Nếu không gian tôpô (X, τ) thỏa mãn tiên đề đếm đượcc thứ nhất, thì tại mỗi điểm của X, tồn tại một cơ sở lân cận giảm và đếm được.

1.4. CÁC TIÊN ĐỀ TÁCH

1.4.1 Định nghĩa. Giả sử X là một không gian tôpô. Khi đó, X được gọi là T_1-*không gian* nếu với mọi x, $y \in X$ mà $x \neq y$, tồn tại các lân cận mở U của x và V của y sao cho

$$x \notin V \text{ và } y \notin U.$$

1.4.2 Định lí. X là T_1-không gian khi và chỉ khi tập một điểm $\{x\}$ là đóng trong X với mọi $x \in X$.

1.4.3 Định nghĩa. Giả sử X là một không gian tôpô. Khi đó, X được gọi là T_2-*không gian* hay không gian *Hausdorff* nếu với mọi x, $y \in X$ mà $x \neq y$, tồn tại các lân cận mở U của x và V của y sao cho

$$U \cap V = \emptyset.$$

1.4.4 Định nghĩa. Giả sử X là một không gian tôpô. Khi đó, X được gọi là *không gian chính quy* nếu với mọi tập hợp đóng $F \subset X$ và với mọi $x \notin F$, tồn tại các lân cận mở U của x và V của F sao cho

$$U \cap V = \emptyset.$$

1.4.5 Định lí. X là không gian chính quy khi và chỉ khi với mọi $x \in X$ và với mọi lân cận U của x, tồn tại lân cận V của x sao cho

$$x \in V \subset \overline{V} \subset U.$$

1.4.6 Định nghĩa. X được gọi là T_3-*không gian* nếu nó là T_1-không gian và chính quy.

1.4.7 Định lí. X là không gian chuẩn tắc khi và chỉ khi với mọi tập con đóng F trong X và với mọi lân cận U của F, tồn tại lân cận V của F sao cho

$$F \subset V \subset \overline{V} \subset U.$$

1.4.8 Định nghĩa. X được gọi là *không gian chuẩn tắc* nếu với E, F là các tập con đóng trong X sao cho $E \cap F = \emptyset$, tồn tại các lân cận U củaa E và V của F sao cho

$$U \cap V = \emptyset.$$

1.4.9 Định nghĩa. X được gọi là T_4-*không gian* nếu nó là T_1-không gian và chuẩn tắc.

1.4.10 Nhận xét. T_4-không gian $\Longrightarrow$ T_3-không gian $\Longrightarrow$ T_2-không gian $\Longrightarrow$ T_1-không gian.

1.5. KHÔNG GIAN CON

1.5.1 Định nghĩa. Giả sử (X, τ) là không gian tôpô và M là một tập con của X. Khi đó, họ

$$\tau_M = \{U \cap M : U \in \tau\}$$

cũng là một tôpô trên M, và ta nói rằng (M, τ_M) là *không gian tôpô con* hay đơn giản là *không gian con* của M.

1.5.2 Định lý. Giả sử M là không gian con của không gian tôpô X và $E \subset M$. Khi đó,

(1) Tập hợp E là đóng trong không gian con M khi và chỉ khi tồn tại tập con F đóng trong X sao cho

$$E = M \cap F$$

.

(2) Bao đóng $\overline{E}^M$ của E trong không gian con M và bao đóng $\overline{E}$ của E trong X liên hệ nhau bởi hệ thức

$$\overline{E}^M = \overline{E} \cap M.$$

1.6. KHÔNG GIAN COMPACT, KHÔNG GIAN LINDELÖF

1.6.1 Định nghĩa. Giả sử A là tập con của không gian tôpô X và $\mathcal{U}$ là họ gồm các tập con nào đo của X. Khi đó,

(1) $\mathcal{U}$ được gọi là một *phủ* của A nếu $A \subset \bigcup \mathcal{U}$.

(2) $\mathcal{V}$ được gọi là một *phủ con* của $\mathcal{U}$ phủ A nếu $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ và $\mathcal{V}$ phủ A.

(3) Một phủ $\mathcal{U}$ của A được gọi là một *phủ mở* (tương ứng, *phủ đóng*) của A nếu mỗi phần tử của $\mathcal{U}$ là mở (tương ứng, đóng) trong X.

1.6.2 Định nghĩa. Giả sử $\mathcal{U}$ và $\mathcal{V}$ là các phủ của không gian tôpô X. Ta nói rằng phủ $\mathcal{U}$ là *mịn* của phủ $\mathcal{V}$ nếu với mỗi $V \in \mathcal{V}$, tồn tại $U \in \mathcal{U}$ sao cho $U \subset V$.

1.6.3 Định nghĩa. Giả sử K là tập con của không gian X. Khi đó,

(1) K được gọi là tập con *compact* trong X nếu mỗi phủ mở của K, tồn tại phủ con hữu hạn. Nếu $K = X$, thì ta nói rằng X là *không gian compact*.

(2) K được gọi là tập con *compact theo dãy* trong X nếu mỗi dãy trong K có thể trích ra được một dãy con hội tụ trong K. Nếu $K = X$, thì ta nói rằng X là *không gian compact theo dãy*.

(3) K được gọi là tập con *compact Lindelöf* của X nếu mỗi phủ mở của K, tồn tại phủ con đếm được. Hơn nữa, nếu $K = X$, thì ta nói rằng X là không gian *Lindelöf*.

1.6.5 Bổ đề. Mỗi T_2-không gian compact là không gian chuẩn tắc. Do đó, nó là không gian chính quy.

1.6.6 Bổ đề. Mọi tập con đóng của tập compact là tập compact.

1.7. ÁNH XẠ LIÊN TỤC

1.7.1 Định nghĩa. Giả sử $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \sigma)$ là ánh xạ từ không gian tôpô (X, τ) vào không gian tôpô (Y, σ). Khi đó,

(1) f được gọi là ánh xạ *liên tục tại điểm* $x_0 \in X$ nếu với mọi lân cận V của $f(x_0)$ trong Y, tồn tại lân cận U của x_0 trong X sao cho

$$f(x_0 \in f(U) \subset V.$$

(2) f được gọi là *liên tục trên* X (hay liên tục) nếu f liên tục tại mọi điểm của X.

1.7.2 Định lí. Giả sử $(X, \tau), (Y, \sigma)$ là hai không gian tôpô và ánh xạ $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \sigma)$. Khi đó, f liên tục tại điểm $x_0 \in X$ khi và chỉ khi với mọi lân cận W của $f(x_0)$ trong Y, ta đều có $f^{-1}(W)$ là lân cận của x_0.

1.7.3 Định lí. Giả sử $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \sigma)$ là ánh xạ từ không gian tôpô (X, τ) vào không gian tôpô (Y, σ). Khi đó, các khẳng định sau là tương đương.

(1) f liên tục;

(2) Tạo ảnh của mỗi tập hợp mở trong Y là một tập hợp mở trong X;

(3) Tạo ảnh của mỗi tập hợp đóng trong Y là một tập hợp đóng trong X;

1.7.4 Định lí. Giả sử $(X, \tau), (Y, \sigma)$ là hai không gian tôpô, $a \in Y$. Khi đó, ánh xạ $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \sigma)$ cho bởi $f(x) = a$ với mọi $x \in X$ là liên tục.

1.7.5 Định lí. Giả sử X, Y, Z là các không gian tôpô,

$$f : X \longrightarrow Y \text{ và } g : Y \longrightarrow Z \text{ là các ánh xạ liên tục.}$$

Khi đó,

$$h = g \circ f : X \longrightarrow Z \text{ cũng là một ánh xạ liên tục.}$$

1.7.6 Định lí. Giả sử $f : X \longrightarrow Y$ là ánh xạ liên tục từ không gian tôpô X vào không gian tôpô Y và K là tập con compact của X. Khi đó, $f(K)$ là tập con compact trong Y.

1.7.7 Định lí. Giả sử $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \sigma)$ là ánh xạ từ không gian tôpô (X, τ) vào không gian tôpô (Y, σ). Khi đó, các khẳng định sau là tương đương.

(1) f liên tục;

(2) $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$ với mọi $A \subset X$;

(3) $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$ với mọi $B \subset Y$;

(4) $f^{-1}(\boldsymbol{Int}B) \subset \boldsymbol{Int}f^{-1}(B)$ với mọi $B \subset Y$.

CHƯƠNG 2

ÁNH XẠ ĐÓNG TRONG KHÔNG GIAN MÊTRIC SUY RỘNG

Trong chương này, chúng tôi chứng minh về mối quan hệ giữa ánh xạ đóng với một số ánh xạ có tính chất phủ, chứng minh các tính chất của ánh xạ đóng cũng như chứng minh các điều kiện để ánh xạ đóng có biên-compact trong không gian mêtric suy rộng.

2.1. ÁNH XẠ ĐÓNG

2.1.1 Định nghĩa. Giả sử $f : X \longrightarrow Y$ là ánh xạ từ không gian tôpô X vào không gian tôpô Y. Khi đó,

(1) f được gọi là *ánh xạ đóng* nếu $f(F)$ là tập con đóng trong Y với mọi tập con đóng F trong X.

(2) f được gọi là *ánh xạ mở* nếu $f(F)$ là tập con mở trong Y với mọi tập con mở F trong X.

2.1.2 Bổ đề. Giả sử $f : X \longrightarrow Y$ là song ánh liên tục từ không gian tôpô X lên không gian tôpô Y. Khi đó, các khẳng định sau là tương đương.

(1) f là ánh xạ đóng;

(2) f là ánh xạ mở;

(3) f là phép đồng phối.

2.1.3 Mệnh đề. Giả sử $f : X \longrightarrow Y$ là ánh xạ liên tục từ không gian tôpô X vào không gian tôpôY. Khi đó, f là ánh xạ đóng khi và chỉ khi

$$\o f(A) = f(\o A) \text{ với mọi } A \subset X.$$

2.1.4 Bổ đề. Giả sử $f : X \longrightarrow Y$ là ánh xạ đóng từ không gian tôpô X vào không gian tôpô Y và $g : Y \longrightarrow Z$ là ánh xạ đóng từ không gian tôpô Y vào không gian tôpô Z. Khi đó,

$$gf : X \longrightarrow Z$$

cũng là ánh xạ đóng từ không gian tôpô X vào không gian tôpô Z.

2.1.5 Mệnh đề. Giả sử $f : X \longrightarrow Y$ là ánh xạ đóng và liên tục từ không gian tôpô X vào không gian tôpô Y và $g : Y \longrightarrow Z$ là ánh xạ đóng từ không gian tôpô Y vào không gian tôpô Z. Khi đó,

$$g|_{f(X)} : f(X) \longrightarrow Z$$

cũng là ánh xạ đóng.

2.1.7 Định lí. Giả sử $f : X \to Y$ là một ánh xạ từ không gian tôpô X vào không gian tôpô Y. Khiđó, f là ánh xạ đóng khi và chỉ khi với mọi $B \in Y$ và với mọi lân cận A của $f^{-1}(B)$, tồn tại lân cận C của B sao cho

$$f^{-1}(B) \subset f^{-1}(C) \subset A.$$

2.1.8 Định lí. Giả sử $f : X \to Y$ là một ánh xạ từ không gian tôpô X vào không gian tôpô Y. Khiđó, f là ánh xạ đóng khi và chỉ khi với mọi $y \in Y$ và với mọi lân cận U của $f^{-1}(y)$, tồn tại lân cận V của y sao cho

$$f^{-1}(y) \subset f^{-1}(V) \subset U.$$

2.2. MỐI QUAN HỆ GIỮA ÁNH XẠ ĐÓNG VÀ MỘT SỐ ÁNH XẠ CÓ TÍNH CHẤT PHỦ

2.2.1 Định nghĩa. Giả sử P là một tập con nào đó của X. Khi đó,

(1) P được gọi là *lân cận dãy* của x, nếu với mọi dãy $\{x\}$ hội tụ đến $x \in X$, tồn tại $m \in N$ sao cho

$$\{x\} \bigcup \{x_n : n \geq m\} \subset P.$$

(2) P được gọi là *mở theo dãy*, nếu P là lân cận dãy của x với mọi $x \in P$.

2.2.2 Định nghĩa. Giả sử $\{x_n\}$ là dãy nằm trong không gian tôpô X, $x_0 \in X$ và A là tập con nào đó của X. Khi đó,

(1) Dãy $\{x_n\}$ được gọi là *hội tụ đến* x_0 trong X nếu với mọi lân cận mở U của x_0, tồn tại $m \in \mathbb{N}$ sao cho

$$x_n \in U \text{ với mọi } n \geq m.$$

(2) X được gọi là *không gian dãy* nếu với mọi tập con $A \subset X$, A là tập đóng trong X nếu không có dãy nào trong A hội tụ đến điểm nằm ngoài A.

2.2.3 Nhận xét. Mỗi không gian mêtric là không gian dãy.

2.2.5 Định nghĩa. Giả sử $f : X \longrightarrow Y$ là một ánh xạ từ không gian tôpô X vào không gian tôpô Y. Khi đó,

(1) f được gọi là ánh xạ *giả mở* nếu với mọi $y \in Y$, tồn tại lân cận U của $f^{-1}(y)$ sao cho $f(U)$ là lân cận của y trong Y.

(2) f được gọi là ánh xạ *phủ-compact* nếu với mọi tập con compact K của Y, tồn tại tập con compact L trong X sao cho $f(L) = K$.

(3) f được gọi là ánh xạ *phủ-dãy* nếu với mọi dãy $\{y_n\}$ hội tụ đến y trong Y, tồn tại dãy $\{x_n\}$ hội tụ đến x trong X sao cho

$$x_n \in f^{-1}(y_n) \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}.$$

(4) f được gọi là ánh xạ *giả-phủ-dãy* nếu với mọi dãy $\{y_n\}$ hội tụ đến y trong Y, tồn tại tập con compact K trong X sao cho

$$\{y\} \bigcup \{y_n : n \in \mathbb{N}\} = f(K).$$

2.2.6 Nhận xét. Mỗi ánh xạ phủ-dãy hoặc phủ-compact là ánh xạ giả-phủ-dãy.

2.2.7 Định lí. Giả sử $f : X \longrightarrow Y$ là ánh xạ đóng từ không gian tôpô X vào không gian tôpô Y. Khi đó, các khẳng định sau là đúng.

(1) f là ánh xạ giả mở.

(2) Nếu $\partial f^{-1}(y)$ là tập con compact trong X với mọi $y \in Y$, thì f là ánh xạ giả-phủ-dãy.

2.3. TÍNH CHẤT CỦA ÁNH XẠ ĐÓNG TRONG KHÔNG GIAN MÊTRIC SUY RỘNG

2.3.1 Định lí. Giả sử $f : X \longrightarrow Y$ là ánh xạ đóng và liên tục từ không gian dãy X vào không gian tôpô Y. Khi đó, với mỗi

$y \in Y$, nếu ta đặt

$$A = \Big\{ x \in \partial f^{-1}(y) : \text{ tồn tại dãy } L \subset X \setminus f^{-1}(y) \text{ hội tụ đến } x \Big\},$$

thì ta có $\overline{A} = \partial f^{-1}(y)$.

2.3.2 Hệ quả. Giả sử $f : X \longrightarrow Y$ là ánh xạ đóng và liên tục từ không gian mêtric X vào không gian tôpô Y. Khi đó, với mỗi $y \in Y$, nếu ta đặt

$$A = \Big\{ x \in \partial f^{-1}(y) : \text{ tồn tại dãy } L \subset X \setminus f^{-1}(y) \text{ hội tụ đến } x \Big\},$$

thì ta có $\overline{A} = \partial f^{-1}(y)$.

2.3.3 Định nghĩa. Giả sử $\mathcal{P}$ là họ gồm các tập con nào đó của không gian tôpô X. Khi đó,

(1) $\mathcal{P}$ được gọi là họ *đếm được theo điểm* (*point-countable*), nếu tập hợp sau là đếm được với mọi $x \in X$.

$$\{P \in \mathcal{P} : x \in P\}.$$

(2) $\mathcal{P}$ được gọi là *mạng tại x* (*network at x*) trong X, nếu $x \in P$ với mọi $P \in \mathcal{P}$ với mọi lân cận U của x, tồn tại $P \in \mathcal{P}$ sao cho

$$x \in P \subset U.$$

(3) $\mathcal{P}$ được gọi là *mạng* (*network*) của X, nếu $\{P \in \mathcal{P} : x \in P\}$ là mạng tại x với mọi $x \in X$.

2.3.4 Định nghĩa. Giả sử $\mathcal{P} = \bigcup \{\mathcal{P}_x : x \in X\}$ là một phủ của không gian tôpô X thỏa mãn các điều kiện (a) và (b) sau đây với mọi $x \in X$.

(1) $\mathcal{P}_x$ là mạng tại x.

(2) Nếu $P_1, P_2 \in \mathcal{P}_x$, thì tồn tại $P \in \mathcal{P}_x$ sao cho $x \in P \subset P_1 \cap P_2$.

Khi đó, $\mathcal{P}$ được gọi là *cơ sở yếu* (*weak base*) của X, nếu với tập con $G \subset X$, G là mở trong X khi và chỉ khi với mọi $x \in G$, tồn tại $P \in \mathcal{P}_x$ sao cho

$$x \in P \subset G.$$

2.3.5 Bổ đề. Giả sử $\mathcal{P} = \bigcup\{\mathcal{P}_x : x \in X\}$ là cơ sở yếu của không gian tôpô X. Khi đó, với mọi $x \in X$, $\{x_n\}$ là dãy hội tụ đến x trong X và $P \in \mathcal{P}_x$, tồn tại $m \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\{x\} \bigcup \{x_n : n \geq m\} \subset P.$$

2.3.6 Định nghĩa. Không gian tôpô (X, τ) được gọi là *khả mêtric* nếu tồn tại một mêtric d trên X sao cho tôpô sinh bởi mêtric d trùng với tôpô τ.

2.3.7 Bổ đề.

Giả sử X là không gian tôpô với cơ sở yếu đếm được theo điểm. Khi đó, X là không gian dãy và mọi tập con compact của X đều khả mêtric.

2.3.8 Bổ đề. Nếu X là không gian tôpô có mạng đếm được, thì nó là không gian chuẩn tắc.

2.3.9 Bổ đề. Giả sử X là không gian dãy. Khi đó, với mọi $A \subset X$ và với mọi $x \in \emptyset A$, tồn tại tập con đếm được $C \subset A$ sao cho $x \in \emptyset C$.

2.3.10 Định nghĩa. Tập hợp F trong không gian tôpô được gọi là tập *rời rạc* nếu với mọi $x \in F$, tồn tại lân cận U của x sao cho

$$U \cap F = \{x\}.$$

2.3.11 Bổ đề. Giả sử F là tập con vô hạn của không gian tôpô X. Khi đó, nếu mọi tập con vô hạn của F đều đóng, thì F đóng và rời rạc.

2.3.13 Định nghĩa. Giả sử x là một điểm trong không gian tôpô X. Khi đó, với mọi $n \in \mathbb{N}$, ta đặt

$$S = \{x\} \bigcup \{x_{mn} : n \in \mathbb{N}\},$$

trong đó S_m là dãy hội tụ đến x trong X, và đặt

$$S_\omega = \bigcup \{S_m : m \in \mathbb{N}\}.$$

Khi đó,

(1) S được gọi là *cái quạt dãy* S_ω nếu mọii dãy L hội tụ đến x trong S, L chỉ giao với hữu hạn S_m, nghĩa là tập hợp sau là hũu hạn.

$$\{m \in \mathbb{N} : S_m \cap L \neq \emptyset\}.$$

(2) X được gọi là *chứa bản sao* (hoặc *chứa bản sao đóng*) của S_ω nếu trong X có tập con (tập con đóng) đồng phôi với S_ω.

Giả sử B là tập con của không gian X. Ta đặt

$$S(B) = \Big\{x \in X : x \text{ là điểm giới hạn của dãy nào đó trong } B\Big\}.$$

2.3.14 Định lí. Giả sử $f : X \longrightarrow Y$ là ánh xạ đóng từ không gian tôpô X vào không gian tôpô Y và X là không gian có cơ sở yếu đếm được theo điểm. Khi đó, với mọi $y \in Y$, $\partial f^{-1}(y)$ là tập con compact trong X nếu Y không chứa bản sao của S_ω.

2.3.15 Hệ quả. Giả sử $f : X \longrightarrow Y$ là ánh xạ đóng từ không gian mêtric X vào không gian tôpô Y. Khi đó, với mọi $y \in Y$, $\partial f^{-1}(y)$ là tập con compact trong X nếu Y không chứa bản sao của S_ω.

KẾT LUẬN

Trong luận văn này, chúng tôi nghiên cứu về ánh xạ đóng trong không gian mêtric suy rộng và đạt được những vấn đề như sau.

(1) Hệ thống lại một số kiến thức về không gian mêtric, không gian tôpô.

(2) Trình bày một số khái niệm và tính chất cơ bản của ánh xạ liên tục.

(3) Trình bày khái niệm và chứng minh chi tiết một số định lí của ánh xạ đóng trong không gian tôpô.

(4) Trình bày mối quan hệ giữa ánh xạ đóng với một số ánh xạ có tính chất phủ.

(5) Trình bày và chứng minh chi tiết một số tính chất của ánh xạ đóng trong không gian mêtric suy rộng.

(6) Chứng minh chi tiết kết quả về điều kiện để ánh xạ đóng có biên compact.