BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

ĐỖ THỊ KIM THU

BIỂU DIỄN SỐ TỰ NHIÊN THÀNH TỔNG CÁC LŨY THỪA VÀ MỘT SỐ DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 60.46.01.13

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Đà Nẵng – Năm 2016

Công trình được hoàn thành tại
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

Người hướng dẫn khoa học: GS.TSKH. Nguyễn Văn Mậu

Phản biện 1: TS. Trương Công Quỳnh

Phản biện 2: GS. TS. Lê Văn Thuyết

Luận văn đã được bảo vệ tại Hội đồng chấm Luận văn tốt nghiệp thạc sĩ Khoa học họp tại Đại học Đà Nẵng vào ngày 13 tháng 8 năm 2016.

Có thể tìm hiểu Luận văn tại:

- Trung tâm Thông tin-Học liệu, Đại học Đà Nẵng
- Thư viện trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng

MỞ ĐẦU

1. Lí do chọn đề tài:

Chuyên đề về số học liên quan đến biểu diễn một số tự nhiên thành tổng các lũy thừa có vị trí rất đặc biệt trong các bài toán về chia hết (đồng dư và đồng dư bậc hai), về biểu diễn các số tự nhiên và các đa thức với hệ số nguyên.

Trong các kỳ thi học sinh giỏi toán quốc gia, Olympic toán quốc tế thì các bài toán liên quan đến số học, các dạng toán về đồng dư, về phương trình Diophant cũng hay được đề cập và được xem như là những dạng toán thuộc loại khó của bậc trung học cơ sở (THCS) và trung học phổ thông (THPT). Các bài toán thuộc dạng này thường ít được đề cập trong chương trình toán đại trà mà thường xuất hiện dưới dạng các bài toán chuyên đề áp dụng.

Để đáp ứng nhu cầu bồi dưỡng giáo viên và bồi dưỡng học sinh giỏi (HSG) về chuyên đề số học, luận văn "*Biểu diễn số tự nhiên thành tổng các lũy thừa và một số dạng toán liên quan*" nhằm cung cấp một số phương pháp có tính hệ thống để tiếp cận các dạng toán chuyên đề số học và các vấn đề liên quan.

2. Mục đích nghiên cứu:

Hệ thống hóa lý thuyết, ứng dụng các định lý Gauss, Lagrange, Euler và Fermat, giải phương trình nghiệm nguyên, phương trình vô định và cách biểu diễn các số nguyên thành tổng các lũy thừa đồng thời nắm được một số phương pháp, một số kỹ thuật tính toán liên quan.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu:

3.1. Đối tượng nghiên cứu:

Một số dạng toán về biểu diễn số tự nhiên thành tổng các lũy thừa; ứng dụng các định lý Gauss, Langrangue, Euler và

Fermat để giải các phương trình nghiệm nguyên, phương trình vô định.

3.2. Phạm vi nghiên cứu:

Các định lý Gauss, Lagrange, Euler và Fermat trong biểu diễn các số tự nhiên thành tổng các lũy thừa, giải phương trình nghiệm nguyên, phương trình vô định và một số kỹ thuật tính toán liên quan.

4. Phương pháp nghiên cứu:

Nghiên cứu tài liệu, phân tích, giải thích, tổng hợp.

5. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài:

Kết quả nghiên cứu của luận văn hướng tới việc bồi dưỡng học sinh giỏi bậc THCS, THPT và tạo được một đề tài phù hợp cho việc giảng dạy, bồi dưỡng học sinh THCS, THPT; đóng góp thiết thực cho việc học và dạy các chuyên đề toán trong trường THCS, THPT.

6. Cấu trúc của luận văn:

Ngoài phần Mở đầu và Kết luận, luận văn được chia thành ba chương đề cập đến các vấn đề sau đây:

Chương 1. Cơ sở lý thuyết.

Chương 2. Biểu diễn số tự nhiên thành tổng các lũy thừa.

Chương 3. Một số dạng toán liên quan.

CHƯƠNG 1
CƠ SỞ LÝ THUYẾT

1.1. SỐ LŨY THỪA VÀ SỐ CHÍNH PHƯƠNG

1.1.1. Định nghĩa

Định nghĩa 1.1 (Số lũy thừa).

Định nghĩa 1.2 (Số chính phương).

Định nghĩa 1.3 (Số phi chính phương).

Ví dụ 1.1. Các số chính phương, các số phi chính phương,các số không là số chính phương và cũng không là số phi chính phương.

Chú ý 1.1. Số 0, số 1 là các số chính phương và là số lũy thừa bậc tuỳ ý.

1.1.2. Một số tính chất của lũy thừa

Định lý 1.1.

a) Số phi chính phương hoặc là một số nguyên tố, hoặc là tích các số nguyên tố phân biệt có số mũ đều bằng 1.

b) Mọi số nguyên dương a đều biểu diễn duy nhất được trong dạng tích của một số chính phương và một số phi chính phương, tức là có dạng $a = b^2.c$, trong đó c là một số phi chính phương.

Định lý 1.2.

a) Nếu số lũy thừa bậc n chia hết cho số nguyên tố p thì số đó chia hết cho p^n.

b) Nếu số chính phương chia hết cho số nguyên tố p thì số đó chia hết cho p^2.

Định lý 1.3.

a) Nếu số lũy thừa bậc n là tích của hai số nguyên tố cùng nhau, tức là $c^n = a.b$ với $(a, b) = 1$, thì mỗi thừa số a, b là số lũy thừa bậc n.

b) Nếu số chính phương là tích của hai số nguyên tố cùng nhau, tức là $c^2 = a.b$ với $(a, b) = 1$, thì mỗi thừa số a, b là số chính phương.

Định lý 1.4. Căn bậc n của một số nguyên dương hoặc là số nguyên dương, hoặc là số vô tỉ. Nói cách khác, nếu $a^n = d$ với d là số nguyên dương mà a là số hữu tỉ thì a là số nguyên.

Định lý 1.5. Giả sử a, b, m, n là các số nguyên dương

a) Nếu a^n là ước của b^n thì a là ước của b.

b) Nếu $a^m = b^n$ và $(m, n) = 1$ thì tồn tại số nguyên dương c sao cho $a = c^n$ và $b = c^m$.

Định lý 1.6. Cho số nguyên $s \geq 2$ thì luôn tồn tại số nguyên n_s sao cho ứng với mỗi số nguyên $m \geq n_s$ luôn tồn tại số lũy thừa a^s thỏa mãn $m < a^s < 2m$.

Định lý 1.7. Giả sử a, b, n là các số nguyên dương.

a) Nếu số b thỏa mãn $a^n < b < (a + 1)^n$ thì số b không là số lũy thừa bậc n.

b) Nếu số b thỏa mãn $a^2 < b < (a + 1)^2$ thì số b không là số chính phương.

Định lý 1.8 (Định lí Liouville)**.** Với số nguyên dương a và $n \geq 2$ thì đẳng thức $(a - 1)! + 1 = a^n$ chỉ xảy ra khi $a = 5$.

Tính chất 1.1 (Số chính phương)**.**

a) Các số chính phương có chữ số tận cùng là một trong các chữ số 0, 1, 4, 5, 6, 9 và không có chữ số tận cùng là 2, 3, 7, 8.

b) Nếu số chính phương có chữ số tận cùng là 5 thì hai chữ số cuối cùng là 25.

c) Nếu số chính phương có chữ số tận cùng là 6 thì chữ số hàng chục là chữ số lẻ.

d) Nếu số chính phương có chữ số tận cùng là 4 hoặc là chữ số lẻ 1, 5, 9 thì chữ số hàng chục là chữ số chẵn.

Tính chất 1.2 (Số chính phương).

a) Số chính phương khi chia cho 3 có dạng $3n$ hoặc $3n+1$ và không có dạng $3n+2$.

b) Số chính phương khi chia cho 4 có dạng $4n$ hoặc $4n+1$ và không có dạng $4n+2, 4n+3$.

c) Số chính phương khi chia cho 5 có dạng $5n$, hoặc $5n+1$, hoặc $5n+4$ và không có dạng $5n+2, 5n+3$.

d) Số chính phương khi chia cho 6 có dạng $6n$, hoặc $6n+1$, hoặc $6n+3$ hoặc $6n+4$ và không có dạng $6n+2, 6n+5$.

e) Số chính phương khi chia cho 8 có dạng $8n$ hoặc $8n+1$ hoặc $8n+4$ và không có dạng $8n+r$ với r bằng 2, 3, 5, 6, 7.

g) Số chính phương khi chia cho 9 có dạng $9n$ hoặc $9n+1$ hoặc $9n+4$ hoặc $9n+7$ và không có dạng $9n+r$ với r bằng 2, 3, 5, 6, 8.

Tính chất 1.3 (Số chính phương).

a) Giữa hai số chính phương liên tiếp không có số chính phương nào.

b) Nếu hai số nguyên dương nguyên tố cùng nhau có tích là một số chính phương thì mỗi số đều là số chính phương.

Tính chất 1.4 (Số chính phương)**.** Nếu hai số nguyên liên tiếp có tích là một số chính phương thì một trong hai số đó bằng 0.

Tính chất 1.5 (Số lũy thừa bậc ba)**.**

a) Số lũy thừa bậc ba khi chia cho 4 không có dạng $4n + 2$.

b) Số lũy thừa bậc ba khi chia cho 8 không có dạng $8n + r$ với r bằng 2, 4, 6.

c) Số lũy thừa bậc ba khi chia cho 9 không có dạng $9n + r$ với r bằng 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Tính chất 1.6 (Số lũy thừa bậc cao)**.**

a) Số lũy thừa bậc $s \geq 3$ khi chia cho 4 không có dạng $4n + 2$.

b) Số lũy thừa bậc $s \geq 3$ khi chia cho 8 không có dạng $8n + r$ với r bằng 2, 4, 6.

c) Số lũy thừa bậc $s \geq 3$ khi chia cho 9 không có dạng $9n + r$ với r bằng 3, 6.

1.2. ĐỒNG DƯ THỨC

1.2.1.Định nghĩa đồng dư thức

Định nghĩa 1.4. Cho m là một số tự nhiên khác không. Ta nói rằng hai số nguyên a, b là đồng dư với nhau theo modulo m nếu trong phép chia a và b cho m ta được cùng một số dư.
Ký hiệu

$$a \equiv b \pmod{m} \quad \text{hoặc } a = b \pmod{m}. \tag{1.1}$$

Hệ thức (1.1) gọi là đồng dư thức.

1.2.2.Các tính chất của đồng dư thức

Tính chất 1.7.

a) Với mọi số nguyên ta có $a \equiv a \pmod{m}$.

b) Nếu $a \equiv b \pmod{m}$ thì $b \equiv a \pmod{m}$.

c) Nếu $a \equiv b \pmod{m}$ và $b \equiv c \pmod{m}$ thì $a \equiv c \pmod{m}$.

Tính chất 1.8. Nếu $a \equiv b \pmod{m}$ và c là một số nguyên tùy ý thì $a \pm c \equiv b \pm c \pmod{m}$.

Tính chất 1.9.

a) Nếu $a_1 \equiv a_2 \pmod{m}$; $b_1 \equiv b_2 \pmod{m}$ thì $(a_1 \pm b_1) \equiv (a_2 \pm b_2) \pmod{m}$.

b) Nếu $a_1 \equiv a_2 \pmod{m}$; $b_1 \equiv b_2 \pmod{m}$ thì $(a_1 \times b_1) \equiv (a_2 \times b_2 \pmod{m}$.

Tính chất 1.10.

a) Nếu $a + c \equiv b \pmod{m}$ thì $a \equiv b - c \pmod{m}$.

b) Nếu $a \equiv b \pmod{m}$ thì $a + km \equiv b \pmod{m}$.

c) Nếu $a \equiv b \pmod{m}$ thì $a^k \equiv b^k \pmod{m}$.

d) Giả sử $f(x) = a_n x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ là một đa thức với hệ số nguyên.

Nhận xét 1.1. Nếu ta có $\alpha \equiv \beta \pmod{m}$ thì ta cũng có $f(\alpha) \equiv f(\beta) \pmod{m}$.
Đặc biệt, nếu ta có $f(\alpha) \equiv 0 \pmod{m}$ thì ta cũng có $f(\alpha+km) \equiv 0 \pmod{m}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Tính chất 1.11. Nếu $ac \equiv bc \pmod{m}$ $(c, m) = 1$ thì $a \equiv b \pmod{m}$.

Tính chất 1.12. Nếu $a \equiv b \pmod{m}$ thì $ac \equiv bc \pmod{m}$.

Tính chất 1.13. Nếu $a \equiv b \pmod{m}$ và $d \mid (a, b, m)$ $(d > 0)$ thì ta có

$$\frac{a}{d} \equiv \frac{b}{d} \pmod{\frac{m}{d}}.$$

Tính chất 1.14. Nếu $a \equiv b \pmod{m_i}$, $i = 1, 2, 3, \ldots k$ thì $a \equiv b \pmod{m}; m = m_1 m_2 \ldots m_k$.

1.3. CÁC LỚP THẶNG DƯ

1.3.1. Hệ thặng dư đầy đủ

1.3.2. Tính chất

a) Mỗi hệ thặng dư đầy đủ modulo m đều gồm m thặng dư.

b) Mọi hệ gồm m số nguyên đôi một không đồng dư với nhau theo modulo m đều hợp thành một hệ thặng dư đầy đủ modulo m.

c) Cho a là một số nguyên, nguyên tố với m và b là một số nguyên tùy ý. Khi ấy nếu x chạy qua một hệ thặng dư đầy đủ modulo m thì $ax + b$ cũng chạy qua một hệ thặng dư đầy đủ modulo m.

1.3.3. Hệ thặng dư thu gọn

1.3.4. Thặng dư toàn phương

Định nghĩa 1.5 (Thặng dư toàn phương)**.**

Định lý 1.9.

1. a là một thặng dư toàn phương modulo p khi và chỉ khi $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$.

2. a là bất thặng dư toàn phương modulo p khi và chỉ khi $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$.

Hệ quả 1.1.

1. Tích của hai thặng dư toàn phương là thặng dư toàn phương.

2. Tích của thặng dư toàn phương và bất thặng dư toàn phương là bất thặng dư toàn phương.

3. Tích của hai bất thặng dư toàn phương là thặng dư toàn phương.

Định lý 1.10. Gọi n là các số chẵn nằm trong khoảng $(p/2, p)$. Khi đó $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p$ khi và chỉ khi $p = 8k+1; 8k+7$.
Tiếp theo, ta xét định lý tương hỗ của Gauss.
Ký hiệu Lagrange:
$$\Big(\frac{a}{p}\Big) = \begin{cases} 1 \text{ nếu } a \text{ là thặng dư toàn phương } \pmod p \\ -1 \text{ nếu } a \text{ không là thặng dư toàn phương } \pmod p \end{cases}$$

Mệnh đề 1.1.
1. $\Big(\frac{a}{p}\Big) = a^{\frac{p-1}{2}}$.
2. $\Big(\frac{a}{p}\Big)\Big(\frac{b}{p}\Big) = \Big(\frac{ab}{p}\Big)$.
3. $a \equiv b \pmod p$ thì $\Big(\frac{a}{p}\Big) = \Big(\frac{b}{p}\Big)$.
4. $\Big(\frac{a^2}{p}\Big) = 1; \Big(\frac{a^2 b}{p}\Big) = \Big(\frac{b}{p}\Big)$.
5. $\Big(\frac{1}{p}\Big) = 1; \Big(-\frac{1}{p}\Big) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$.

Bổ đề 1.1 (Gauss)**.** Cho p là số nguyên tố lẻ $(a, p) = 1$.
Xét dãy $(a, 2a, 3a, \dots, \frac{p-1}{2}a) = (ka)_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}$.
Giả sử $ka \equiv kt \pmod p$. Gọi n là số các số t_k mà $t_k > \dfrac{p}{2}$ khi đó $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^n \pmod p$ hay $\dfrac{a}{p} = (-1)^n$.

Định lý 1.11. Giả sử p là số nguyên tố lẻ. Khi đó $\Big(\frac{a}{p}\Big) = (-1)^{t_p}$với $t_p = \sum\limits_{j=1}^{n} [\dfrac{ja}{p}]$và a lẻ.

Định lý 1.12 (Định lý tương hỗ của Gauss)**.** Cho p, q là hai nguyên tố lẻ. Khi đó

a) $\left(\dfrac{p}{q}\right) = \left(\dfrac{q}{p}\right)$ nếu p và q có ít nhất một số dạng $4k+1$.

b) $\left(\dfrac{p}{q}\right) = -\left(\dfrac{q}{p}\right)$ nếu p và q đều có dạng $4k+3$.

Bài toán 1.1. Tìm tất cả các số nguyên tố p để $3^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p$.

Bài toán 1.2. Tìm tất cả các số nguyên tố p để $5^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p$.

Bài toán 1.3. Tìm các số nguyên tố p để $7^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p$.

Bài toán 1.4. Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên dương a thoả mãn các tính chất sau:

a) Tồn tại cặp số nguyên $(x, y), (x, y) = 1$ sao cho $a^2 = x^3 + y^3$.

b) Tồn tai số nguyên b sao cho $a^2(a^2+3)|b^2+3$.

1.4. ĐỊNH LÍ EULER VÀ ĐỊNH LÍ FERMAT

1.4.1. Định lí Euler

Định nghĩa 1.6 (Hàm Euler)**.** Cho số tự nhiên $n \geq 1$. Ta ký hiệu $\varphi(n)$ là số các số tự nhiên bé hơn n và nguyên tố cùng nhau với n. Quy ước $\varphi(1) = 1$.

Định lý 1.13 (Định lí Euler)**.** Cho a, m là các số nguyên, $(a, m) = 1$. Khi đó,

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m.$$

Định lý 1.14. Hàm $\varphi(n)$ có tính chất nhân tính theo nghĩa:

Nếu a, b là hai số nguyên tố cùng nhau thì

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b).$$

Định lý 1.15 (Euler)**.** Giả sử $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ là phân tích chính tắc của $n > 1$. Khi đó

$$\varphi(n) = n\Big(1 - \frac{1}{p_1}\Big)\Big(1 - \frac{1}{p_2}\Big) \dots \Big(1 - \frac{1}{p_k}\Big).$$

Định lý 1.16 (Định lý Euler mở rộng)**.** Cho a và m là hai số tự nhiên. Khi đó ta có:

$$a^m \equiv a^{m-\varphi(m)} \pmod{m}.$$

1.4.2. Định lý nhỏ Fermat

Định lý 1.17 (Định lý nhỏ Fermat)**.** Cho p là một số nguyên tố và a là một số nguyên không chia hết cho p khi ấy ta có:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Định lý 1.18 (Định lý Fermat dạng khác)**.** Cho p là một số nguyên tố và a là một số nguyên tùy ý khi ấy ta có

$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$

CHƯƠNG 2
BIỂU DIỄN SỐ TỰ NHIÊN THÀNH TỔNG CÁC LŨY THỪA

2.1. BIỂU DIỄN SỐ TỰ NHIÊN THÀNH TỔNG CÁC SỐ CHÍNH PHƯƠNG

2.1.1. Tổng hai bình phương

Định lý 2.19 (Fermat)**.** Giả sử n được biểu diễn dưới dạng phân tích chuẩn $n = 2^r \prod p_i^{s_i} q_j^{t_j}$, trong đó $p_i \equiv 1 \pmod 4$, $q_j \equiv 3 \pmod 4$. Điều kiện cần và đủ để n biểu diễn thành tổng của hai bình phương là các số t_j chẵn với mọi j.

Bổ đề 2.2. Giả sử số nguyên tố $q \mid a^2+b^2$. Nếu $q \equiv 3 \pmod 4$ thì $q \mid a, q \mid b$.

Bổ đề 2.3. Tích của hai số mà mỗi số là tổng của hai bình phương của hai số nguyên không âm cũng là tổng bình phương của hai số không âm.

Bổ đề 2.4. Mọi số nguyên tố p dạng $4k+1$ đều có thể biểu diễn thành tổng bình phương của hai số nguyên dương.

Ví dụ 2.2. Phương trình $x^2 + y^2 = 50$ có nghiệm vì $50^2 = 5^2 + 5^2 = 7^2 + 1^2$.

Định lý 2.20. Số tự nhiên n là tổng của hai bình phương các số tự nhiên khi và chỉ khi mọi ước số nguyên tố có dạng $4k+3$ của nó có luỹ thừa chẵn trong phân tích thành thừa số nguyên tố của n cũng như khi thừa số 2 có mũ lẻ trong phân tích đó hoặc là n có ít nhất một ước số nguyên tố có dạng $4k+1$.

Định lý 2.21. Phương trình $p = x^2 + y^2$ với p là số nguyên tố, $p = 4k + 1$ $k \in \mathbb{Z}$ có một và chỉ một nghiệm trên $\mathbb{N}$(không kể tính đảo vị của nó).

Định lý 2.22. Giả sử x, y, z, t là các số nguyên dương thoả $xy = z^2+t^2$,$(z, t) = 1$. Khi đó tồn tại các số nguyên dương a, b, c, d sao cho $x = a^2 + b^2$, $y = c^2 + d^2$ và $z = ac + bd$,$t = ad - bc$ hoặc $z = ac - bd$, $t = ad + bc$.

Định lý 2.23. Giả sử n là số nguyên dương cho trước $n = m^2l$, trong đó m^2 là ước chính phương lớn nhất của n . Khi đó n biểu diễn thành tổng của hai bình phương của hai số nguyên dương khi và chỉ khi

1. m có ước nguyên tố dạng $4k + 1$ với $l = 1$.
2. l không có ước nguyên tố dạng $4k + 3$ khi $l > 1$.

Bổ đề 2.5. Tích của hai số lẻ, mỗi số là tổng bình phương của hai số nguyên dương cũng sẽ là tổng bình phương của hai số nguyên dương.

Định lý 2.24. Nếu p là một số nguyên dương có thể biểu diễn thành tổng của hai bình phương ;
$p = (q_1^{2a_1}.q_2^{2a_2}.\dots.q_n^{2a_n}).(2^m.p_1.p_2.\dots.p_n)$ với $q_1, q_2, \dots, q_n$ là các số nguyên tố có dạng $4d + 3$, $p_1, p_2, \dots, p_n$ là các số nguyên tố có dạng $4d + 1$; $p_1, p_2, \dots, p_k$ khác 2; $\delta(p)$ là số cách để biểu diễn p thành tổng của hai bình phương thì $\delta(p) = 2^n$.

Bài toán 2.1 (Biểu diễn số tự nhiên thành tổng hai bình phương)**.** Các số tự nhiên có đặc điểm gì thì viết được dưới dạng tổng của hai số chính phương?

Ví dụ 2.3. Viết những số sau dưới dạng tổng của hai số chính phương (nếu có thể) : 8,48,53, 86,170,1105,2016, 2378, 4012.

Bài toán 2.2. Chứng minh rằng số tự nhiên n là tổng của hai bình phương các số tự nhiên nguyên tố cùng nhau khi và chỉ khi n không chia hết cho 4 và cũng không chia hết cho các số tự nhiên có dạng $4k+3$.

Bài toán 2.3. Chứng minh rằng tổng các số chính phương của hai số lẻ không phải là một số chính phương.

Bài toán 2.4. Chứng minh rằng mỗi cặp số nguyên dương (m, n) mà tổng và tích của chúng đều là số chính phương thì chúng có dạng $m = ka^2, n = kb^2$, trong đó $a^2 + b^2 = kc^2$ với k là số phi chính phương.

Bài toán 2.5 (Tam thức bậc hai chứa số chính phương)**.**

a) Tìm các số nguyên n sao cho $n^2+4n+25$ là số chính phương. Từ đó hãy chỉ ra cách tìm số chính phương $n^2 + 2kn + c$.

b) Tìm các số nguyên n sao cho $n^2+3n+11$ là số chính phương. Từ đó hãy chỉ ra cách tìm số chính phương $n^2 + (2k+1)n + c$.

Hệ quả 2.2. Các số sau không là số chính phương:

a) Tổng các số chính phương của hai số lẻ.

b) Tổng các lũy thừa bậc chẵn của hai số lẻ.

Bài toán 2.6. Chứng minh rằng tổng các số chính phương của k số nguyên dương liên tiếp không là số chính phương với mỗi số k bằng 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Nhận xét 2.2.

1. Với $k = 2$ thì phương trình $n^2+(n+1)^2 = m^2 \Leftrightarrow (2n+1)^2 - 2m^2 = -1 \Leftrightarrow t^2 - 2m^2 = -1$ (Phương trình Pell) với $t = 2n+1$,

có vô hạn nghiệm nguyên dương, chẳng hạn là $3^2 + 4^2 = 5^2$ và $20^2 + 21^2 = 29^2$.

2. Với $k = 11$ thì mệnh đề trên không đúng. Chẳng hạn:
$18^2+19^2+20^2+21^2+22^2+23^2+24^2+25^2+26^2+27^2+28^2 = 77^2$.

Bài toán 2.7. Chứng minh rằng không có số chính phương A nào có một trong hai dạng sau ($n \in \mathbb{Z}$).

a) $A = 4n + 2$.

b) $A = 4n + 3$.

Nhận xét 2.3. Khi a là một số lẻ thì $a^2 = 4b(b + 1) + 1$, do b và $b + 1$ là hai số nguyên liên tiếp nên trong hai số luôn có một số chẵn. Do đó a^2 không những chia 4 dư 1 mà còn chia 8 dư 1.

Ví dụ 2.4. Chứng minh rằng: không có số chính phương nào có một trong các dạng sau.

a) $A = 9n + 2$.

b) $B = 9n + 5$.

c) $C = 9n + 8$.

Nhận xét 2.4.

- Nếu một số chính phương mà chia hết cho một số nguyên tố p thì nó chia hết cho p^2.

- Nếu một số chính phương $A = a^2$ chia hết cho p thì a chia hết cho p.

Bài toán 2.8. Chứng minh rằng các số có dạng $n(n + 1)$ và $n(n+2)$ không thể là các số chính phương với mọi n nguyên dương.

2.1.2. Tổng của ba bình phương

Định lý 2.25. Các số có dạng $4^n(8k + 7)$ không thể biểu diễn thành tổng của ba bình phương.

Hệ quả 2.3. Số nguyên dương n biểu diễn được thành tổng của ba bình phương khi và chỉ khi $n \neq 4^m(8k+7)$ với $m, k \in \mathbb{N}$.

Định lý 2.26 (Định lý Hurwitz)**.** Tất cả các số tự nhiên n mà n^2 không phải tổng bình phương của ba số tự nhiên là các số $n = 2^h$ và $n = 2^h.5$ với $h = 0, 1, 2, \ldots$

Cách phân tích một số tự nhiên thành tổng ba bình phương (nếu có thể).

Bài toán 2.9. Giải phương trình sau: $x^2 + y^2 + z^2 = 515$.

Bài toán 2.10. Giải phương trình sau: $x^2 + y^2 + z^2 = 701$.

Bài toán 2.11. Giải phương trình sau: $x^2 + y^2 + z^2 = 2007$.

2.1.3. Tổng của ba bình phương với hai bình phương bằng nhau

Bổ đề 2.6. Nếu p là ước nguyên tố dạng $8k+5$ hoặc $8k+7$ và $p \mid x^2 + 2y^2$ thì p là ước của x và y.
Ký hiệu $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : \ |x^2 + y^2 = n$ có nghiệm nguyên$\}$.

Bổ đề 2.7. Nếu $n \in A$, $m \in A$ thì $nm \in A$.

Bổ đề 2.8. Giả sử $n = p$ là số nguyên tố. Khi đó $p \in A$ khi và chỉ khi $p = 2$ hoặc $p = 8k+1$ hoặc $p = 8k+3$.

Định lý 2.27. Giả sử n có phân tích chính tắc $n = 2^r \prod p_i^{s_i} \prod q_j^{t_j}$, trong đó $p_i = 8k+1$ hoặc $8k+3$,$q_j = 8k+5$ hoặc $8k+7$. Ta có $n \in A$ khi và chỉ khi t_j là số chẵn với mọi j.

Ví dụ 2.5. Phương trình $x^2 + 2y^2 = 21$ vô nghiệm vì $21 = 3.7$, $7 = 8k+7$ có số mũ lẻ.

Định lý 2.28. Điều kiện cần và đủ để n biểu diễn được dưới dạng $n = x^2 + 2y^2$ với x, y nguyên dương là

a) Nếu n là số chính phương thì n phải có ước nguyên tố dạng $8k + 1$ hoặc $8k + 3$.

b) Nếu n là số không chính phương thì trong phân tích chính tắc của n các ước nguyên tố $p = 2$ hoặc $p = 8k+5$ hoặc $p = 8k+7$ phải có số mũ chẵn.

Bài toán 2.12. Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên dương a, b, c sao cho: $a^2 + b^2 + c^2$ chia hết cho $3(ab + bc + ca)$

2.1.4. Tổng của bốn bình phương

Định lý 2.29 (Định lý Lagrange)**.** Một số nguyên dương bao giờ cũng biểu diễn thành tổng bốn bình phương của các số nguyên không âm.

Trước hết ta sử dụng các bổ đề sau:

Bổ đề 2.9. Tích của hai số nguyên dương mà mỗi số là tổng của bốn bình phương các số nguyên không âm cũng sẽ là tổng của bốn bình phương các số nguyên không âm.

Bổ đề 2.10. Nếu p là số nguyên tố lẻ thì tồn tại $k, 0 < k < p$ sao cho kp là tổng của bốn bình phương các số nguyên không âm.

Bổ đề 2.11. Nếu p là số nguyên tố thì p được biểu diễn thành tổng của bốn bình phương của các số nguyên không âm.

Định lý 2.30. Số nguyên dương dạng 2^n với $n > 2$ biểu diễn thành tổng của bốn bình phương các số nguyên dương khi và chỉ khi n chẵn.

Ví dụ 2.6. Tìm a, b, c, d nguyên dương sao cho $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2^{2000}$.

Ví dụ 2.7. Các số 15 và 540 biểu diễn thành tổng bốn bình phương.

Ví dụ 2.8. Biểu diễn 14, 55 thành tổng bốn bình phương.

2.1.5.Tổng của năm bình phương

Định lý 2.31. Mỗi số nguyên dương $n > 169$ luôn biểu diễn được thành tổng năm bình phương của các số nguyên dương.

2.1.6. Biểu diễn số tự nhiên thành tổng năm hoặc lớn hơn năm bình phương dương

Định lý 2.32 (Định lý Pall)**.** Nếu m là số tự nhiên ≥ 6 thì tất cả các số nguyên dương không phải là bình phương của m số tự nhiên là các số $1, 2, 3, \ldots, m-1, m+1, m+2, m+4, m+5, m+7, m+10, m+13$.
Tiếp theo, ta sẽ xét một số bài toán:

Bài toán tổng quát 2.1. Số nguyên dương n nào biểu diễn được đồng thời thành tổng của hai hoặc của bốn hoặc năm bình phương của các số nguyên dương.

Bài toán 2.13. Chứng minh mọi số tự nhiên chia hết cho 8 là tổng của 8 bình phương lẻ.

Bài toán 2.14. Chứng minh rằng:

a) Tổng các lũy thừa bậc chẵn của ba số nguyên liên tiếp không là số lũy thừa bậc chẵn.

b) Tổng các lũy thừa bậc chẵn bằng nhau của 9 số nguyên liên tiếp không là số lũy thừa.

Bài toán 2.15. Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất với $n > 1$ sao cho tổng các số chính phương của n số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến n là số chính phương.

Nhận xét 2.5.

1. Ta đã chứng minh được số $n = 24$ là số duy nhất thỏa mãn đề bài.

2. Cũng chứng minh được tổng $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$ không là số lũy thừa bậc ba.

2.2. BIỂU DIỄN SỐ TỰ NHIÊN THÀNH TỔNG CÁC LUỸ THỪA CÓ SỐ MŨ BẰNG BA HOẶC LỚN HƠN BA

2.2.1. Một số kết quả về biểu diễn số tự nhiên thành tổng các lũy thừa bậc cao

Định lý 2.33. Với mọi số tự nhiên m thì đều tồn tại số tự nhiên n có thể biểu diễn thành tổng của hai lập phương theo ít nhất là m cách phân biệt.

Bổ đề 2.12. Với mọi số tự nhiên $n > 2$ thì tồn tại số tự nhiên mà lập phương của nó là tổng của n lập phương dương phân biệt.

Định lý 2.34. Với mọi số tự nhiên $n > 3$ tồn tại lũy thừa bậc 4 là tổng của n lũy thừa bậc 4 dương.

2.2.2. Bài toán Waring

$$x^3 + y^3 = z^3. \tag{2.2}$$

Định lý 2.35. Phương trình (2.2) không có nghiệm nguyên $x, y, z \neq 0$.

Bổ đề 2.13. Tất cả các nghiệm nguyên a, b, s của phương trình $s^3 = a^2 + 3b^2$ mà $(a, b) = 1, sl$, được cho bởi công thức sau: $s = \alpha^2 + 3\beta^2, a = \alpha^3 - 9\alpha\beta^2, b = 3\alpha^2\beta - 3\beta^3$.

Định lý 2.36. Phương trình $x^4 + y^4 = z^4$ không có nghiệm nguyên dương x, y, z.

CHƯƠNG 3
MỘT SỐ DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

3.1. ỨNG DỤNG VÀO GIẢI CÁC DẠNG TOÁN VỀ ĐỒNG DƯ SỐ LŨY THỪA VÀ SỐ CHÍNH PHƯƠNG

3.1.1. Tìm dấu hiệu chia hết

a) Nguyên tắc chung.

b) Một số ví dụ.

Loại 1: Chuyển về xét nhóm chữ số cuối cùng.

Ví dụ 3.9. Tìm dấu hiệu chia hết cho 4; 25.

Ví dụ 3.10. Tìm dấu hiệu chia hết cho 8 và 125.

Loại 2: Chuyển về xét tổng các chữ số của một số.

Ví dụ 3.11. Tìm tiêu chuẩn chia hết cho 11.

Bài toán 3.16. Chứng minh rằng với n là một số tự nhiên, ta có: $2^{3^{4n+1}} + 3 \vdots 11$.

Loại 3: Các trường hợp khác: Tìm tiêu chuẩn chia hết cho m.

Ví dụ 3.12. Tìm dấu hiệu chia hết cho 17.

Bài toán 3.17. Chứng minh rằng với mọi số nguyên a ta có $a^2 + 1$ không chia hết cho 19.

3.1.2. Chứng minh sự chia hết

Ví dụ 3.13. Chứng minh rằng tổng lập phương của ba số tự nhiên liên tiếp luôn chia hết cho 9.

Ví dụ 3.14. Chứng minh rằng số 111...111 (mod 81).

Ví dụ 3.15. Chứng minh $A = 7.5^{2n} + 12.6^n \vdots 19, \forall n \in \mathbb{N}$.

Ví dụ 3.16. Chứng minh $A = 2^{2^{2n}} + 5 \vdots 7, \forall n \geq 1$.

Ví dụ 3.17. Chứng minh rằng $1924^{2003^{2004^n}} + 1920^{124} \vdots 124, (\forall n \in \mathbb{N}^*)$.

Bài toán 3.18. Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất có ba chữ số sao cho $n^3 + 1$ chia hết cho 11.

3.1.3. Xác định các chữ số tận cùng

Ví dụ 3.18. a) Tìm hai chữ số tận cùng của số $A = 2^{2004}$.
b) Tìm ba chữ số tận cùng của A.

Bài toán 3.19. Tìm số dư trong phép chia 109^{345} cho 14. btTìm hai chữ số tận cùng bên phải khi viết số 2^{1954} trong hệ thập phân.

3.2. ỨNG DỤNG VÀO GIẢI CÁC PHƯƠNG TRÌNH

3.2.1. Phương trình nghiệm nguyên

Bài toán 3.20. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, y) sao cho $\dfrac{x^2 + y^2}{x - y}$ là số nguyên dương và là ước của 1995.

Bài toán 3.21 (Mathlinks Contest)**.** Giả sử rằng $a_1, a_2, \ldots, a_{2014}$ là các số nguyên không âm thỏa mãn $a_1^n + a_2^n + \cdots + a_{2014}^n$ là số chính phương với mọi số nguyên dương n. Tìm số nhỏ nhất các số bằng 0 trong các số $a_1, a_2, \ldots, a_{2014}$.

Bài toán 3.22 (Taiwan TST 1999)**.** Tìm tất cả các số nguyên dương m, n sao cho $(m, n) = 1$ và $\varphi(5^m - 1) = 5^n - 1$.

Bài toán 3.23 (Serbia Mathematical Olympiad 2007)**.** Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, n) sao cho $x^3 + 2x + 1 = 2^n$.

Bài toán 3.24. Chứng minh rằng phương trình $x^2 + 5 = y^3$ không có nghiệm nguyên.

$$p \equiv 3 \pmod 4. \tag{3.3}$$

3.2.2. Phương trình vô định

Bài toán 3.25. Giải phương trình vô định $15x - 9y = 5m + 1$. Ở đó m là một số nguyên cho trước.

Bài toán 3.26. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $xy = z^2 \quad (1)$.

KẾT LUẬN

Luận văn **"Biểu diễn số tự nhiên thành tổng các lũy thừa và một số dạng toán liên quan"** nhằm:

1. Trình bày chi tiết một số dạng toán về đồng dư và đồng dư bậc hai, các số chính phương và số lũy thừa.

2. Trình bày các cách biểu diễn số nguyên dương dưới dạng tổng các số chính phương, lũy thừa bậc ba và bậc cao.

3. Trình bày một số ứng dụng liên quan như chữ số tận cùng, các dạng toán về chia hết, phương trình Diophant.

4. Cuối cùng, trong luận văn xét cũng trình bày một số đề toán chọn lọc từ các đề thi học sinh giỏi trong nước, Olympic khu vực và quốc tế liên quan.

Với những gì đã tìm hiểu được, tôi hy vọng luận văn sẽ là một tài liệu tham khảo hữu ích cho bản thân trong công tác giảng dạy sau này và cũng là nguồn tư liệu tốt cho học sinh phổ thông cũng như những ai quan tâm đến lớp các bài toán về biểu diễn số tự nhiên thành tổng các lũy thừa.

Mặc dù đã hết sức cố gắng, nhưng do thời gian và khả năng có hạn nên chắc chắn luận văn còn có những thiếu sót. Vì thế, tôi rất mong nhận được nhiều ý kiến đóng góp của quý thầy cô, bạn bè, đồng nghiệp để luận văn được hoàn thiện hơn. Xin chân thành cảm ơn!