BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

BÙI QUỐC THỊNH

PHƯƠNG PHÁP TÌM NGHIỆM CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH GẦN SUY BIẾN

Chuyên ngành: Phương pháp toán sơ cấp
Mã số: 60. 46. 01.13

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Đà Nẵng – Năm 2016

Công trình được hoàn thành tại

ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

Người hướng dẫn khoa học: TS. PHAN ĐỨC TUẤN

Phản biện 1: TS. Lê Hải Trung

Phản biện 2: GS.TSKH. Nguyễn Văn Mậu

Luận văn đã được bảo vệ trước Hội đồng chấm Luận văn tốt nghiệp thạc sĩ Khoa học họp tại Đại học Đà Nẵng vào ngày 13 tháng 8 năm 2016.

Có thể tìm hiểu luận văn tại:

- Trung tâm Thông tin – Học liệu, Đại học Đà Nẵng.
- Thư viện trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Nhiều bài toán trong khoa học kỹ thuật, kinh tế, sinh thái đều quy về việc giải hệ phương trình đại số tuyến tính.Ngay trong lĩnh vực giải tích số, khi giải nhiều bài toán phải đưa về giải một hoặc nhiều hệ phương trình tuyến tính.

Xét hệ phương trình tuyến tính tổng quát sau :

$$\begin{cases} a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + ... + a_{1n}.x_n = b_1 \\ a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ..... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}, \quad (0.1)$$

hoặc ở dạng ma trận :

$$Ax = b. \quad (0.2)$$

Nếu hệ (0.1) là hệ Cramer thì nó có nghiệm duy nhất khi $\det(A) \neq 0$.Nghiệm của hệ được biễu diễn dưới dạng tổng quát gọi là công thức Cramer :

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}, \quad (0.3)$$

trong đó A_i là ma trận nhận được hệ ma trận A bằng cách thay cột thứ i bằng cột vế phải b.

Tuy nhiên ý nghĩa sử dụng thực tế của công thức này chỉ đối với n đủ nhỏ $(n = 2;3)$. Vì với n đủ lớn điều này gần như không thể. Như với $n = 30$ đã mất gần 400 ngàn tỷ năm để tính nghiệm theo công thức trên bằng máy tính có tốc độ tính khoảng 20 tỷ phép tính/giây. Nhưng quan trọng hơn sau 400 ngàn tỷ năm ta nhận được lời giải chẳng phải nghiệm của hệ đó nữa, đơn giản vì số phép toán quá lớn nên chỉ riêng sai số làm tròn số thôi đã cho ta một kết quả chẳng liên quan đến hệ phương trình tuyến tính đã cho.

Nếu ta lấy đại lượng

$$cond(A) \equiv \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} / \inf_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, \qquad (0.4)$$

làm đặc trưng thì hệ phương trình tuyến tính với cond(A) lớn được gọi là hệ có thể trạng yếu (hoặc điều kiện xấu) sẽ rất nhạy cảm với những thay đổi của vế phải, dù rất nhỏ,nghĩa là thay đổi về nghiệm sẽ rất lớn, dù rằng thay đổi vế phải rất nhỏ (như làm tròn số chẳng hạn). Như vậy, giải hệ phương trình tuyến tính với thể trạng yếu sẽ không có độ tin cậy về nghiệm nhận được. Một khó khăn nữa liên quan đến số ẩn cần tìm. Nếu số đó lớn thì số phép toán cần làm trong thuật toán giải bất kỳ cũng sẽ lớn và khi đó sai số thực hiện các phép toán cũng dẫn đến nghiệm không còn là nghiệm cần tìm nữa.

Vì những lý do đó, tôi chọn đề tài "***Phương pháp tìm nghiệm của hệ phương trình tuyến tính gần suy biến***".

2. Mục tiêu và nội dung nghiên cứu của đề tài

Mục tiêu của đề tài là giúp người đọc đánh giá được hệ phương trình tuyến tính điều kiện tốt và điều kiện xấu, qua đó lựa chọn phương pháp giải phù hợp cũng như đánh giá được sai số ở kết quả thu được.

Một số điểm cố gắng đưa vào trong luận văn là:

- Trình bày một số định nghĩa, định lý liên quan đến đại số ma trận, hệ phương trình tuyến tính.

- Đưa vào một số ví dụ giúp người đọc dễ nhận ra các phương pháp giải

Trình bày trong đề tài.

- Đưa ứng dụng Maple để giúp tính toán nhanh hơn.

Nội dung của đề tài chia làm 2 chương

Chương 1 : Hệ phương trình tuyến tính thể trạng tốt

Chương 2 : Hệ phương trình tuyến tính gần suy biến.

Trong mỗi phần sẽ có ví dụ cụ thể

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu là hệ phương trình tuyến tính, hệ phương trình tuyến tính gần suy biến.

Phạm vi nghiên cứu của luận văn một số phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính, đặc biệt là hệ phương trình tuyến tính gần suy biến, và ứng dụng maple để giải hệ phương trình tuyến tính.

4. Phương pháp nghiên cứu

Thu thập các bài báo, tài liệu của các tác giả liên quan đến hệ phương trình tuyến tính.

Phân tích, nghiên cứu các tài liệu để thực hiện đề tài.

Trao đổi, thảo luận, tham khảo ý kiến của giảng viên hướng dẫn.

5. Cấu trúc của luận văn :

Ngoài phần mở đầu, kết luận, và danh mục tài liệu tham khảo, luận văn chia làm hai chương.

Chương 1.Hệ phương trình tuyến tính có thể trạng tốt. Trong chương 1, luận văn trình bày các khái niệm chung về ma trận, hệ phương trình tuyến tính, điều kiện có nghiệm, định lý tồn tại nghiệm, các giá trị riêng, vectơ riêng, và ma trận chéo hóa được, các phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính điều kiện tốt.

Chương 2: Hệ phương trình tuyến tính gần suy biến. Trong chương 2, luận văn trình bày hướng khắc phục, các ví dụ minh họa khi giải hệ phương trình tuyến tính gần suy biến bằng phương pháp giải hệ tốt và phương pháp phân rã suy biến, chương trình maple dùng để giải hệ phương trình tuyến tính.

CHƯƠNG 1
HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH CÓ THỂ TRẠNG TỐT

1.1. MA TRẬN VÀ ĐỊNH THỨC

1.1.1. Ma trận đơn vị

1.1.2. Ma trận tam giác

1.1.3. Ma trận khả nghịch

1.1.4. Ma trận chuyển vị

1.1.5. Ma trận đối xứng

Ma trận $A, B \in Mn[K]$, ma trận A được gọi là đồng dạng với ma trận B nếu tồn tại ma trận khả nghịch T sao cho:

$$B = T^{-1}AT.$$

Tính chất:

- Mọi ma trận đều đồng dạng với chính nó.
- Nếu A đồng dạng với B thì B đồng dạng với A.
- Nếu A đồng dạng với B, còn B đồng dạng với C thì A đồng dạng với C.

1.1.6. Ma trận trực giao

1.1.7. Ma trận đồng dạng

1.1.8. Vectơ hàng, vectơ cột

1.1.9. Định thức

Tính chất 1.1. $$|A| = |A^T|. \quad (1.5)$$

Tính chất 1.2. Nếu đổi chỗ hai hàng (hoặc hai cột) thì định thức đổi dấu.

Tính chất 1.3. Nếu nhân các phần tử của một hàng (hoặc một cột) với cùng một số k thì định thức được nhân với k.

Tính chất 1.4. Nếu định thức có một hàng (hoặc một cột) các phần tử đều bằng 0 thì định thức bằng 0.

Tính chất 1.5. Nếu định thức có hai hàng (hoặc hai cột) giống nhau thì định thức bằng 0.

Tính chất 1.6. Ta có:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+a'_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+a'_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+a'_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \quad (1.6)$$

Ta cũng có đẳng thức tương tự đối với các hàng, các cột khác.

Tính chất 1.7. Giá trị của định thức không thay đổi khi ta thêm vào các phần tử của một hàng (hoặc một cột) các phần tử tương ứng của một hàng khác (hoặc cột khác) nhân cùng với một số k. Chẳng hạn:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+ka_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+ka_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+ka_{31} \end{vmatrix}. \quad (1.7)$$

1.2. HẠNG MA TRẬN

1.2.1. Định lý về hạng của ma trận

1.2.2. Chuẩn ma trận

1.2.3. Số điều kiện

Định nghĩa 1.5

Đại lượng

$$cond\left(A\right)=\left\|A\right\|.\left\|A^{-1}\right\|=\frac{\sup\limits_{x\neq 0}\frac{\left\|Ax\right\|}{\left\|x\right\|}}{\inf\limits_{x\neq 0}\frac{\left\|Ax\right\|}{\left\|x\right\|}}, \qquad (1.12)$$

gọi là số điều kiện của ma trận.

Tính chất của số điều kiện ma trận:

i. $cond\left(A\right)\geq 1$;

ii. Nếu A là ma trận trực giao (tức là $A^T=A^{-1}$) thì $cond\left(A\right)=1$;

iii. Với mọi $c\neq 0; c\in\mathbb{R}$ đều có $cond\left(cA\right)=cond\left(A\right)$;

Nếu $D=diag\left(d_i\right)_1^n$ thì $cond\left(D\right)=\frac{\max\left|di\right|}{\min\left|di\right|}$,($D$ là ma trận đường chéo cấp n và các phần tử trên đường chéo là d_i).

1.3. GIÁ TRỊ RIÊNG, VECTƠ RIÊNG, MA TRẬN CHÉO HÓA ĐƯỢC

1.3.1. Giá trị riêng và vectơ riêng

1.3.2. Đa thức đặc trưng

1.3.3. Ma trận chéo hóa được

Định nghĩa 1.7 Mỗi ma trận đồng dạng với ma trận đường chéo gọi là ma trận chéo hóa được. Vậy, ma trận $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ là chéo hóa được nếu tồn tại ma trận khả nghịch $T=\left(t_{ij}\right)_{n\times n}$ sao cho:

$$T^{-1}.AT=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{pmatrix}. \qquad (1.18)$$

Mệnh đề 1.2. Ma trận cấp n có n giá trị riêng khác nhau thì chéo hóa được.

Ma trận cấp n chéo hóa được khi và chỉ khi có n vectơ riêng độc lập tuyến tính.

1.4. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1.4.1. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát

Hệ phương trình tuyến tính n ẩn $x_1,...,x_n$ là hệ có dạng:

$$\begin{cases} a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + ... + a_{1n}.x_n = b_1 \\ a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ..... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}. \qquad (1.19)$$

Hay có thể viết gọn hơn:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = b_i; i = 1,...,\text{m}. \qquad (1.20)$$

Định lý 1.2 (Định lý Crônecke-Capelli): *Hệ phương trình tuyến tính có nghiệm khi và chỉ khi hạng ma trận A bằng hạng ma trận mở rộng* $\overline{A}$.

1.4.2. Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

1.4.3. Các hệ phương trình tuyến tính tương đương

1.4.4 Hệ Cramer

Định nghĩa 1.8 Một hệ phương trình tuyến tính có số phương trình bằng số ẩn và ma trận A của hệ có định thức $|A \neq 0$ gọi là hệ Cramer.

Định lý 1.4. *Hệ* n *phương trình tuyến tính thuần nhất* n *ẩn số:*

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = 0; i = 1,...,n, \qquad (1.27)$$

chỉ có nghiệm tầm thường $\theta = (0,0,...,0)$ *khi và chỉ kh định thức* $|A| \neq 0.$

1.5. PHƯƠNG PHÁP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH THỂ TRẠNG TỐT

1.5.1. Phương pháp Gauss

Nội dung: dùng các phép biến đổi sơ cấp để đưa ma trận rộng về *dạng tam giác trên, từ đó ta có thể kết luận hệ có nghiệm hay không có nghiệm, và nếu có thì viết được công thức tính tất cả các nghiệm theo kiểu công thức truy hồi cụ thể như sau.*

Ở bước khử đầu tiên ta lấy dòng thứ nhất của ma trận suy rộng nhân với $-a_{21}/a_{11}$ *(giả thiết* $a_{11} \neq 0$ *) rồi cộng vào dòng thứ 2, ta sẽ khử được* x_1 *ở phương trình thứ 2. Bằng cách tương tự, ở bước* $n-1$ *ta nhân dòng thứ nhất với* $-a_{n1}/a_{11}$ *rồi cộng vào dòng thứ* n *để loại bỏ* x_1 *trong phương trình đó. Tương tự ở bước khử thứ 2 ta đưa các phần tử ở cột thứ 2 từ vị trí thứ 3 trở xuống về 0. Quy trình đó về nguyên tắc sẽ dừng ở bước khử biến thứ* $n-1$ *trong phương trình thứ n (cột thứ* $n-1$*) để nhận được hệ phương trình tuyến tính có ma trận hệ số là ma trận tam giác trên. Trong khi biến đổi ma trận hệ số* A *thì ta cũng biến đổi cùng lúc về phía phải của hệ (ma trận* b*) như là ma trận duy nhất. Để hoàn tất việc giải hệ phương trình tuyến tính đã cho ta tính* $x_n = b'_n / a'_{nn}$ *từ phương trình thứ n rồi tính* x_{n-1} *từ phương trình thứ* $n-1$. .

Nói chung ta có công thức truy hồi:

$$x_k = \frac{b'_k - \sum_{j=k+1}^{n} a'_{kj} x_j}{a'_{kk}}; k = n-1, ..., 1.$$

Ví dụ 1.4*: Giải hệ phương trình tuyến tính*

$$\begin{cases} x_1 + 0.3x_2 - x_3 + x_4 &= 6 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= -2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 1.5 \\ 3x_1 - 0.5x_2 - x_3 - 2x_4 &= 1 \end{cases}. \tag{1.29}$$

<u>Giải:</u>

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0,3 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 1,5 \\ 3 & -0,5 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[-3d_1+d_4]{\substack{-d_1+d_2 \\ -2d_1+d_3}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0,3 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & -2,3 & 2 & -2 & -8 \\ 0 & 0,4 & 3 & -3 & -10,5 \\ 0 & -1,4 & 2 & -5 & -17 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-\frac{14}{3}d_2+d_4]{\frac{4}{23}d_2+d_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0,3 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & -2,3 & 2 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & \frac{77}{23} & \frac{-77}{23} & \frac{273,5}{23} \\ 0 & 0 & \frac{18}{23} & \frac{-87}{23} & \frac{-279}{23} \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{23}{10}d_4]{-\frac{23}{10}d_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0,3 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & -2,3 & 2 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & -7,7 & 7,7 & 27,35 \\ 0 & 0 & 1,8 & -8,7 & -27,9 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\left(\frac{18}{77}d_3+d_4\right).7,7} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0,3 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & -2,3 & 2 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & -7,7 & 7,7 & 27,35 \\ 0 & 0 & 0 & -53,13 & -165,6 \end{array}\right]$$

Dùng công thức truy hồi ta tính được nghiệm của hệ là

$$\begin{cases} x_1 \approx 2,3321 \\ x_2 \approx 0,3896 \\ x_3 \approx -0,435 \\ x_4 \approx 3,116 \end{cases}.$$

Phép chọn bán phần.

Nội dung: *ngay từ bước thứ nhất ta chọn phần tử có trị tuyệt đối lớn nhất trên cột 1. Nếu phần tử đó nằm trên dòng thứ k* $(k \neq 1)$ *thì ta đổi vị trí dòng đó cho dòng thứ nhất và thực hiện các bước khử* *đầu tiên giống phương pháp Gauss. Đến bước 2 ta chọn phần tử lớn nhất ở cột 2 từ dòng thứ 2 trở xuống, đổi vị trí rồi khử đối với các phần tử ở cột 2. Ta tiến hành như vậy cho đến khi được ma trận tam giác trên. Nếu đến bước khử thứ* $k, (1 \le k \le n-1)$, *nào đó ta có* $a'_k = 0;$ *thì phép chọn ở trên không thực hiện được thì hệ phương trình tuyến tính đã cho là hệ suy biến.*

Phép chọn bán phần không làm thay đổi thứ tự các biến.

Ví dụ 1.5*: giải hệ phương trình tuyến tính (1.30).*

Ta được nghiệm của hệ phương trình (1.30) là $\begin{cases} x_1 \approx 2,145 \\ x_2 \approx 0,4515 \\ x_3 \approx -0,425 \\ x_4 \approx 2,817 \end{cases}.$

Phép chọn toàn phần (hay phương pháp chọn toàn phần)

Nội dung*: ngay từ bước khử đầu tiên ta không chọn phần tử lớn nhất trên cột 1 mà chọn phần tử có giá trị tuyệt đối lớn nhất trong số các phần tử của toàn ma trận* $a_{ij} (1 \le i; j \le n)$. *Giả sử đó là phần tử* a_{pq} *nằm ở dòng thứ* p *và cột thứ* q. *Ta gọi dòng* p *là dòng trội. Lần lượt ta nhân dòng này với thừa số* $m_l = -a_{lp} / a_{pq} (l \ne p)$ *rồi cộng vào dòng thứ l.*

Bằng cách này ta loại bỏ được ẩn x_q *ra khỏi các phương trình của hệ, trừ phương trình thứ* p. *Loại hàng trội và cột* q *ra khỏi hệ phương trình tuyến tính vừa bị biến đổi, ta thu được hệ gồm* $n-1$ *phương trình. Tiếp tục như vậy ta sẽ nhận được phương trình 1 ẩn sau* $n-1$ *phép khử. Giai đoạn tiếp theo ta tính giá trị các nghiệm lần lượt từ phương trình một ẩn cuối rồi đến 2 ẩn cho đến khi đủ n ẩn.*

Chú ý *không phải theo thứ tự từ* x_n *đến* x_1 *mà thứ tự thay đổi* *tùy vào* các bước chọn phần tử trội.

Ví dụ 1.6: Giải hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} x_1 + 10x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 14 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 5 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 15 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 = -9 \end{cases}. \qquad (1.31)$$

1.5.2. Phương pháp Gauss – Jordan

Nội dung:

Bước 1: Lập ma trận mở rộng $A^{(0)} = \left[A|b\right]$ của hệ (1.20).Chọn phần tử trội a_{pq} của ma trận A giống như ở phương pháp chọn toàn phần; p gọi là hàng giải, q gọi là cột giải.

Loại ẩn x_q ra khỏi phương trình thứ $i \neq p$ bằng cách lấy hàng p nhân với $-a_{iq} / a_{pq}\left(i = \overline{1,n}; \mathrm{i} \neq \mathrm{p}\right)$ rồi cộng với hàng *i.*

Bước 2: Tiếp tục thực hiện tương tự bước 1, sau n bước ta sẽ thu được ma trận $A^{(n)}$ mà mỗi hạng chỉ còn 1 phần tử ứng với x_k và cột vế phải. từ đó ta có nghiệm của hệ.

Ví dụ 1.7: Giải hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 20 \\ 4x_1 + 11x_2 - x_3 = 33 \\ 6x_1 + 2x_2 + 12x_3 = 36 \end{cases}. \qquad (1.32)$$

1.5.3. Phương pháp phân rã LU

Cơ sở của phương pháp này là kết quả sau của đại số ma trận. Nếu ma trận vuông A cấp n có các định thức con từ cấp 1 đến cấp n trên đường chéo chính đều khác 0 thì nó có thể phân tích 1 cách duy nhất thành tích 2 ma trận tam giác cụ thể $A = L.U$. (1.33)

với

$$L=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ \alpha_{21} & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{nn-1} & 1\end{pmatrix};U=\begin{pmatrix}\beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n}\\ 0 & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \beta_{nn}\end{pmatrix}. \quad (1.34)$$

Ta có công thức tính như sau:

$$\forall j=1\div n;\beta_{\text{ij}}=a_{\text{ij}}-\sum_{k=1}^{i-1}\alpha_{ik}\beta_{kj}\left(1\le i\le j\right) \quad (1.35)$$

$$\alpha_{\text{ij}}=\frac{1}{\beta_{\text{jj}}}\left(a_{\text{ij}}-\sum_{k=1}^{j-1}\alpha_{ik}\beta_{kj}\right)\left(j+1\le i\le n\right) \quad (1.36)$$

Cách tính: để cho các giá trị của j từ 1 đến n, trước tiên ta tính β_{ij} cho tất cả các i từ 1 đến j theo (1.35) sau đó ta tính α_{ij} cho các i từ $j+1$ đến n theo (1.36).

Bây giờ ta xem xét việc tính nghiệm của hệ (1.20) từ (1.33) ta có

$$Ax=b\Rightarrow L.Ux=b. \quad (1.37)$$

Đặt $$Ux=y \quad (1.38)$$

Ta được $$Ly=b. \quad (1.39)$$

Ta thấy việc tìm nghiệm của (1.20) tương đương với việc tìm nghiệm của (1.39) trước rồi tìm nghiệm (1.38) sau.

$$y_1=\frac{b_1}{\alpha_{11}};y_i=\frac{1}{\alpha_{ii}}\left[b_i-\sum_{k=1}^{i-1}\alpha_{ik}y_k\right] \quad (1.40)$$

$$x_n=\frac{y_n}{\beta_{nn}};x_i=\frac{1}{\beta_{ii}}\left[y_i-\sum_{k=1}^{i-1}\beta_{ik}x_k\right] \quad (1.41)$$

1.5.4. Phương pháp Cholesky (phương pháp căn bậc 2)

Xét hệ (1.20) với A là ma trận đối xứng $\left(a_{\text{ij}}=a_{ji}\right)$ Biểu diễn ma trận A dưới dạng $A=S^T.S$ trong đó S là ma trận tam giác trên, S^T là ma trận chuyển vị của S.

Cách tìm S tương tự như phương pháp LU nhưng số phép tính giảm đi 2 lần, cụ thể các công thức (1.35); (1.36); (1.40); (1.41) bây giờ có dạng

$$\begin{cases} S_{11} = \sqrt{a_{11}}; S_{1j} = \dfrac{a_{1j}}{S_{11}} (j > 1) \\ S_{ij} = \dfrac{a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} S_{ki} S_{kj}}{S_{ii}} (i < j); S_{ij} = 0 (i > j); \\ S_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} S_{ki}^2} (1 < i \le n) \end{cases} \tag{1.43}$$

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{b_1}{S_{11}}; y_i = b_i - \sum\limits_{k=1}^{i-1} S_{ki} y_k (i > 1) \\ x_n = \dfrac{y_n}{S_{nn}}; x_i = \dfrac{y_i - \sum\limits_{k=i+1}^{n} S_{ik} x_k}{S_{ii}} \end{cases}. \tag{1.44}$$

Thông thường ta chỉ sử dụng phương pháp Cholesky cho các hệ đối với A là ma trận đối xứng, xác định dương. Tuy nhiên, nếu A đối xứng nhưng không xác định dương thì ta vẫn có thể sử dụng (1.43);(1.44) để tính nghiệm. Trong trường hợp này, 1 số giá trị S_{ii} có thể là thuần ảo nhưng khi thay vào (1.44) thì ta vẫn nhận được nghiệm thực.

Ví dụ 1.9: Giải hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_5 = 0,5 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 - 3x_5 = 5,4 \\ -2x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 5 \\ x_2 - 2x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 7,5 \\ -2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 3,3 \end{cases}. \tag{1.45}$$

1.5.5. Phương pháp phân rã QR

Dựa trên một khẳng định sau của đại số ma trận. Nếu A là ma trận $n\times n$ thì nó luôn có thể phân tích ở dạng:

$$A = QR. \tag{1.46}$$

Trong đó R là ma trận tam giác trên, Q là ma trận trực giao, $Q^T = Q^{-1}$. Khẳng định này trên thực tế còn đúng cho cả khi A không phải là ma trận vuông. Ta sẽ mô tả chi tiết cách thức xây dựng ma trận Q.

Ta hình dung, nếu có phép biến đổi nào là trực giao và đưa các phần tử nằm dưới đường chéo của các cột trở về giá trị không thì đó chính là biến đổi Q ta cần tìm. Ta có biến đổi Householder là biến đổi trực giao, có khả năng đưa một loạt các phần tử của một cột bất kỳ về không, tính từ một vị trí nào đó trở lên hoặc trở xuống mà vẫn giữ nguyên các phần tử bằng không của các cột bên trái hoặc bên phải của nó. Chẳng hạng, ta muốn làm bằng không các phần tử trên cột một, tính từ phần tử thứ hai trở xuống, ta xây dựng ma trận Householder $H^{(n)}$ theo công thức:

$$H^{(n)} = E - \frac{2u_1.u_1^T}{\|u_1\|^2}. \tag{1.47}$$

Với véctơ sinh

$$u_1 = \left(a_{11} + sign\left(a_{11}\right).\alpha, a_{21}, ..., a_{n1}\right)^T; \alpha = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_{i1}^2}. \tag{1.48}$$

Ký hiệu cho phép biến đổi Householder tương ứng với ma trận (1.47) là P_1 . Khi đó bằng phép kiểm tra trực tiếp, ta thấy các phần tử nằm trên cột một của ma trận P_1A đều có giá trị bằng không, ngoại trừ phần tử đầu tiên có giá trị là:

$$-sign(a_{11}).\alpha. \qquad (1.49)$$

Cũng bằng kiểm tra trực tiếp, ta thấy các phần tử khác của ma trận P_1A đều được tính bằng công thức sau:

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_1 a_j}{\|u_1\|^2/2} a_{i1}. \qquad (1.50)$$

Trong đó ta dùng ký hiệu a_1 và a_j để chỉ cột thứ nhất và cột thứ j của ma trận $A.$ Trong công thức (1.50), khi $i=1$ thì thay vì a_{11} ta phải lấy $a_{11} + sign(a_{11}).\alpha.$

Tiếp theo, ta xây dựng ma trận Householder của phép biến đổi

$$u_2 = \left(0, a'_{22} + sign(a'_{22}).\alpha, a'_{32}, ..., a'_{n2}\right)^T; \alpha' = \sqrt{\sum_{i=2}^{n} a'^2_{i2}}. \qquad (1.51)$$

Khi đó ma trận P_2P_1A sẽ có cột một và cột hai thỏa mãn điều kiện của ma trận tam giác trên. Không những thế, các phần tử nằm trên cột một và dòng một không thay đổi giá trị, trong khi các phần tử còn lại của ma trận P_1A sẽ thay đổi giá trị nhưng vẫn tuân thủ (1.49) và (1.50) với các chỉ số thay đổi tương ứng.

Như vậy, sử dụng $n-1$ phép biến đổi Householder $P_1; P_2; ...; P_{n-1}$ được xây dựng bằng cách thức mô tả ở trên, ta sẽ đưa được ma trận A ban đầu về dạng R là ma trận của tam giác trên:

$$P_{n-1}...P_1A = R. \qquad (1.52)$$

Ký hiệu $Q^T = P_{n-1}...P_1,$ từ (1.16) và từ tính chất của ma trận trực giao, ta suy ra

$$A = QR; Q = P_1^T...P_{n-1}^T. \qquad (1.53)$$

Bây giờ ta xem xét việc tính nghiệm của hệ $Ax = b$ sau khi đã sử dụng phép phân rã $QR.$ Từ (1.52) và (1.53) ta có:

$$P_{n-1}...P_1Ax = P_{n-1}...P_1b \to Rx = Q^Tb. \qquad (1.54)$$

Do R là ma trận tam giác trên nên hệ (1.54) giải được ngay bằng công thức truy hồi dạng:

$$x_n = b'_n / a'_{nn}; x_k = \frac{b'_k - \sum_{j=k+1}^{n} a'_{kj} x_j}{a'_{kk}}; k = n-1,...,1. \qquad (1.55)$$

Ví dụ 1.10: Giải hệ phương trình tuyến tính (1.31) bằng phương pháp phân rã QR $\begin{pmatrix} 1 & 10 & -5 & 2 \\ 5 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 5 \\ 15 \\ -9 \end{pmatrix}.$

1.5.6. Phương pháp lặp đơn

Mô tả phương pháp lặp đơn

Để sử dụng phương pháp lặp, từ hệ (1.20) bằng các phép biến đổi tương đương ta được hệ ở dạng:

$$x = Bx + g. \qquad (1.56)$$

Phép lặp đơn được xây dựng trên (1.56) theo công thức:

$$x^{k+1} = Bx^k + g; (k = 0,1,2,3,...). \qquad (1.57)$$

Hoặc viết theo từng ẩn ta có:

$$x_i^{k+1} = b_{i1}x_1^k + b_{i2}x_2^k + ... + b_{in}x_n^k + g_i; (i = 1 \div n). \qquad (1.58)$$

trong đó x^k và x^{k+1} là các xấp xỉ của nghiệm ở bước lặp thứ k và $k+1$. Như vậy, bằng phép lặp (1.57) ta tạo ra được dãy các vectơ. Vậy khi nào thì dãy đó hội tụ đến x^* là nghiệm đúng của (1.20)? Ta có định lý:

Định lý 1.5 *(về điều kiện đủ để phép lặp* (1.57); (1.58) *hội tụ)* *Phép lặp* (1.57); (1.58) *sẽ hội tụ đến nghiệm* x^* *của hệ* (1.20) *với mọi xấp xỉ ban đầu* x^0*, nếu ta có*

$$\|B\| < 1. \qquad (1.59)$$

Đánh giá sai số của nghiệm xấp xỉ ở bước lặp thứ k, ta có đánh giá: $\forall m > k \geq 0$

$$\left\| x^{m+1} - x^m \right\| = \left\| Bx^m - Bx^{m-1} \right\| \leq \|B\| \left\| x^m - x^{m-1} \right\| \leq ... \leq \|B\|^{m-k} \left\| x^{k+1} - x^k \right\|. \quad (1.60)$$

Sử dụng đánh giá này vào bất đẳng thức:

$$\left\| x^{k+p} - x^k \right\| \leq \left\| x^{k+p} - x^{k+p-1} \right\| + ... + \left\| x^{k+1} - x^k \right\|. \quad (1.61)$$

Ta được

$$\left\| x^{k+p} - x^k \right\| \leq \left(1 + \|B\| + \|B\|^2 + ... + \|B\|^{p-1}\right) \left\| x^{k+1} - x^k \right\|. = \frac{1 - \|B\|^p}{1 - \|B\|} \left\| x^{k+1} - x^k \right\| \quad (1.62)$$

Đánh giá này trên thực tế hay được sử dụng để làm tiêu chuẩn dừng phép lặp; nghĩa là ta lặp theo (1.57);(1.58) đến bước *k* + 1 thì dừng nếu thỏa mãn điều kiện:

$$\frac{\left\| x^{k+1} - x^k \right\|}{1 - \|B\|} < \varepsilon. \quad (1.63)$$

Lưu ý

- .Đối với phép lặp (1.57); (1.58) khi (1.59) thỏa mãn thì ta có thể lấy $x^0 \equiv g$

- Luôn tồn tại cách thức để đưa (1.20) về (1.56) với B thỏa mãn (1.59)

- Điều kiện hội tụ: $\|B\|_p \leq q < 1$

- Sai số:

○ Sai số tiên nghiệm

$$\left\| X^{(k=1)} - X^* \right\| \leq \frac{\left(\|B\|_p\right)^{k+}}{1 - \|B\|_p} \left\| X^{(1)} - X^{(o)} \right\|_p. \quad (1.69)$$

○ Sai số hậu nghiệm

$$\left\|Y^{(k+1)} - X^*\right\|_p \le \frac{\|B\|_p}{1-\|B\|_p}\left\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\right\|_p. \qquad (1.70)$$

1.5.7. Phương pháp lặp theo Seidel

Mô tả phương pháp lặp theo Seidel

Xét hệ phương trình tuyến tính (1.56). Ta phân tích ma trận B thành tổng của hai ma trận: $B = B_1 + B_2$.

trong đó B_1 là ma trận tam giác dưới nhận được từ B bằng cách giữ nguyên các phần tử dưới đường chéo chính, các phần tử khác cho bằng 0, còn ma trận B_2 nhận được từ hiệu số $B - B_1$. khi đó ta viết (1.56) ở dạng: $x = B_1x + B_2x + g.$ (1.74)

Phép lặp theo Seidel dựa trên (1.74) được xây dựng như sau:

$$x^{k+1} = B_1x^{k+1} + B_2x^k + g; \left(k = 0,1,2,...\right). \qquad (1.75)$$

Hoặc ở dạng chi tiết:

$$x_i^{k+1} = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij}x_j^{k+1} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j^k + g_i. \qquad (1.76)$$

Định lý 1.6 *(về điều kiện đủ để phép lặp Seidel hội tụ) Nếu ta có* $\|B\| < 1$ *thì phép lặp (1.75), (1.76) hội tụ.*

1.5.8. Phương pháp lặp theo Jacobi và lặp theo Gauss-Seidel

Nội dung:

Nếu hệ (1.19) có ma trận hệ số A là chéo trội thì bằng cách chuyển các số hạng dạng $a_{ik}x_k$ trên dòng thứ $i, \left(i = 1 \div n\right);$ sang vế phải, chỉ giữ lại số hạng $a_{ii}x_i$ bên vế trái, rồi chia tất cả các hệ số cho a_{ii} ta được hệ phương trình tuyến tính ở dạng:

$$x = Cx + g, \qquad (1.89)$$

trong đó các phần tử của ma trận C và vectơ g được xác định như sau:

Để cho trường hợp chéo trội theo hàng:

$$c_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}(i \neq j); c_{ij} = 0(i = j); g_i = \frac{b_i}{a_{ii}}(i = 1 \div n). \qquad (1.90)$$

Để cho trường hợp chéo trội theo cột:

$$c_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{jj}}(i \neq j); c_{ij} = 0(i = j); g_i = b_i (i = 1 \div n). \qquad (1.91)$$

Dễ dàng chứng minh được rằng $\|C\| < 1$ trong cả hai trường hợp, nhờ có (1.90), (1.91). Vì vậy phép lặp đơn cho hệ (1.89) hội tụ. Trong trường hợp chéo trội theo cột thì nghiệm của hệ (1.19) nhận được bằng cách chia nghiệm x_i tính được bằng phép lặp nói trên cho hệ số a_{ii} tương ứng.

Phép lặp đơn trong trường hợp này gọi là lặp theo Jacobi. Công thức lặp như sau:

$$x_i^{k+1} = \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} x_j^k + \sum_{j=i+1}^{n} c_{ij} x_j^k + g_i, (i = 1 \div n). \qquad (1.92)$$

Nếu ta sử dụng phép lặp theo Seidel cho hệ (1.74) thì phép lặp đó được gọi là lặp theo Gauss-Seidel. Công thức lặp như sau:

$$x_i^{k+1} = \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} x_j^{k+1} + \sum_{j=i+1}^{n} c_{ij} x_j^k + g_i, (i = 1 \div n) \qquad (1.93)$$

1.5.9. Phương pháp lắc

Mô tả phương pháp lắc

Gọi x^{old} là xấp xỉ ở bước lặp trước (bước thứ k chẳng hạn) và x^{new} là xấp xỉ ở bước tiếp theo (bước thứ $k+1$). Khi đó công thức xác định x^{new} có dạng:

$$x^{new} = \omega x^{k+1} + (1 - \omega) x^{old}. \qquad (1.94)$$

Trong đó ω gọi là hệ số lắc, còn x^{k+1} thì được tính theo (1.75) nghĩa là:

$$x^{k+1} = B_1 x^{k+1} + B_2 x^{old} + g.$$

Người ta đã chứng minh rằng phép lặp trên hội tụ với $0 < \omega < 2$ và không hội tụ với $\omega > 2$. Nếu $0 < \omega < 1$ ta có phương pháp lặp được gọi là phép lắc dưới, còn với $1 < \omega < 2$ ta gọi là phép lắc trên. Khi $\omega = 1$ ta có phép lặp theo Seidel. Với mỗi hệ phương trình tuyến tính cụ thể, nếu phép lặp Seidel hội tụ thì tồn tại một giá trị $\omega = \omega_{opt}$ tối ưu sao cho tốc độ hội tụ đến nghiệm là nhanh nhất. Rất tiếc là chưa có một thuật toán nào hữu hiệu để xác định thông số tối ưu đó cho từng trường hợp cụ thể.

Có thể nói rằng, nếu hệ phương trình tuyến tính đã cho có tính chéo trội thì phép lặp theo Gauss-Seidel thường là đã gần tối ưu nhất $\left(\omega_{opt} \approx 1\right)$ Trong trường hợp hệ không có tính chéo trội thì tồn tại các giá trị của ω sao cho phép lắc trên hoặc lắc dưới sẽ có tốc độ hội tụ nhanh hơn phép lặp Seidel $\left(\omega_{opt} \neq 1\right)$ Thực tế tính toán cho thấy, ít có trường hợp mà cả phép lắc trên lẫn phép lắc dưới cùng hội tụ đối với một hệ phương trình tuyến tính cụ thể (ngoại trừ trường hợp hệ đó đã được đưa về dạng chéo trội như trong phép lặp Gauss-Seidel). Ngoài ra, tốc độ hội tụ cũng rất nhạy cảm đối với sự thay đổi giá trị của thông số lắc.

Trước khi thực hiện phép lắc, ta nên kiểm tra xem hệ đã cho có chéo trội hay không. Nếu chéo trội thì dùng phép lặp Gauss-Seidel, còn nếu không chéo trội thì sử dụng phép biến đổi sơ cấp để đưa hệ về dạng có phần tử đường chéo là lớn nhất theo modul trong số các phần tử cùng cột trước khi thực hiện phép lắc. Phép biến đổi như vậy trong nhiều trường hợp làm cho phép lắc hội tụ, trong khi phép lặp theo Seidel sử dụng dạng ban đầu của ma trận hệ số có thể không hội tụ.

CHƯƠNG 2
PHƯƠNG PHÁP TÌM NGHIỆM HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH GẦN SUY BIẾN

2.1. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH GẦN SUY BIẾN.

2.1.1. Định nghĩa và tính chất

2.1.2. Phương pháp phân rã suy biến

Cơ sở của phương pháp

Mô tả phương pháp

Từ $QD^{-1}P^Tb = x; A^{-1} = QD^{-1}P^T$ ta thấy, nếu tồn tại một hoặc một số các d_k bằng không hoặc gần bằng không thì hệ $Ax=b$ suy biến hoặc gần suy biến. Nếu các $d_k \neq 0$ nhưng lại có $\max d_k / \min d_k \gg 1$ thì A có thể trạng xấu. Như vậy, nếu A là ma trận không thuộc vào một trong ba dạng kể trên thì nghiệm của $Ax=b$ có thể tính theo

$$QD^{-1}P^Tb = x; A^{-1} = QD^{-1}P^T, \forall b \in \mathbb{R}^n. \qquad (2.11)$$

Đối với trường hợp A suy biến hoặc gần suy biến, ta thay D^{-1} bằng ma trận S bằng cách cho các đại lượng $1/d_k$ với $d_k = 0$ hoặc $d_k \ll 1$ nhận giá trị bằng không, các đại lượng khác giữ nguyên. Khi đó có thể chỉ ra rằng nghiệm có xấp xỉ tốt nhất theo nghĩa nói trên sẽ là nghiệm tính theo công thức:

$$x = QSP^Tb, \qquad (2.12)$$

với mọi b cho trước.

Đối với trường hợp A có thể có trạng xấu, nếu ta cũng thay D^{-1} bằng ma trận S theo cách nói trên (đối với các $d_k \ll 1$) thì nghiệm theo (2.12) thường tốt hơn nghiệm nhận được bằng các phương pháp giải trực tiếp, kể cả nghiệm nhận được theo

$QD^{-1}P^{T}b = x; A^{-1} = QD^{-1}P^{T}$ với D^{-1} nguyên bản.

2.1.3. Ví dụ

Giải hệ Vandermond (hệ có nghiệm
$x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = 3; x_4 = 4$)

$$\begin{cases} x_1 + 0,1x_2 + 0,01x_3 + 0,001x_4 = 1,234 \\ x_1 + 0,11x_2 + 0,11^2 x_3 + 0,11^3 x_4 = 1,261624 \\ x_1 + 0,111x_2 + 0,111^2 x_3 + 0,111^3 x_4 = 1,264433524 \\ x_1 + 0,1111x_2 + 0,1111^2 x_3 + 0,1111^3 x_4 = 1,264714953 \end{cases} \quad (2.20)$$

Giải bằng phương pháp phân rã suy biến

Hệ ở dạng ma trận:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0,1 & 0,01 & 0,001 \\ 1 & 0,11 & 0,11^2 & 0,11^3 \\ 1 & 0,111 & 0,111^2 & 0,111^3 \\ 1 & 0,1111 & 0,1111^2 & 0,1111^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,234 \\ 1,261624 \\ 1,264433524 \\ 1,264714953 \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Hệ phương trình tuyến tính tương đương:

$$A^T Ax = A^T b. \quad (2.22)$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0,4321 & 0,4676421 & 0,005069961631 \\ 0,4321 & 0,4676421 & 0,005069961631 & 5,505718741041.10^{-4} \\ 0,4676421 & 0,005069961631 & 5,505718741041.10^{-4} & 5,988230350886551.10^{-5} \\ 0,005069961631 & 5,505718741041.10^{-4} & 5,988230350886551.10^{-5} & 6,522523251679858161.10^{-6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5,024772477 \\ 0,5430405924423 \\ 0,05879537810422313 \\ 0,006376842383394269343 \end{pmatrix}.$$

Sử dụng bước 2 ta dễ dàng thu được giá trị suy biến như sau:

$$d_1 = 2,011773; d_2 = 0,009461; d_3 = 0,000009; d_4 = 7,268 \times 10^{-10}.$$

Tiếp thục thực hiện bước 3, nếu bây giờ ta sử dụng với S là ma trận được từ D^{-1} bằng cách thay đổi phần tử $\frac{1}{d_4}$ bằng phần tử 0 thì ta sẽ thu được nghiệm xấp xỉ của hệ phương trình tuyến tính là:

$$x_1 \approx 0,999079; x_2 \approx 2,025839; x_3 \approx 2,758073; x_4 \approx 4,7532557.$$

Bộ nghiệm này tốt hơn nhiều so với bộ nghiệm mà ta thu được bằng phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính thể trạng tốt hay nghiệm thu dược bằng cách giữ nguyên D^{-1} .

Giải bằng phương pháp Cholesky

Ta được nghiệm:

$$x = \begin{bmatrix} 1.070593858 \\ -6.940691274*10^{-12} \\ 21.86944722 \\ -55.28846155 \end{bmatrix}.$$

Nghiệm nhận được của hệ giải bằng phương pháp này sai khác hoàn toàn so với nghiêm đúng của hệ là $(1,2,3,4)$.

Giải bằng phương pháp phân rã LU

Ta được nghiệm:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9577571706 \\ 2.762438074 \\ 0.00004712911738 \\ -0.001449271444 \end{bmatrix}.$$

2.2. ÁP DỤNG MAPLE VÀO GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

2.2.1. Phương pháp Gauss

2.2.2. Phương pháp phân rã LU

2.2.3. Phương pháp phân rã QR

2.2.4. Phương pháp Cholesky

KẾT LUẬN

Sau một thời gian nghiên cứu thực hiện, luận văn đã hoàn thành được những mục đích và nhiệm vụ như sau:

* Trình bày một số khái niệm, định lý về ma trận, định thức, hạng của ma trận,giá trị riêng, vectơ riêng, hệ phương trình tuyến tính,và một số phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính thể trạng tốt.

* Trình bày về nội dung của phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính gần suy biến,áp dụng maple vào giải hệ phương trình tuyến tính.

* Trong thời gian thực hiện luận văn không thể tránh khỏi những sai sót, kính mong các thầy đóng góp ý kiến để luận văn thêm hoàn thiện.